BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Konsep integral sering digunakan untuk menentukan luas daerah di bawah kurva. Selain itu, integral juga sering digunakan untuk mencari penyelesaian dari suatu model matematika. Seiring dengan perkembangan zaman, saat ini banyak ditemui *software-software* yang sudah menyertakan operasi integral sehingga memudahkan pengguna dalam mencari nilai integral suatu fungsi. Adapun semua itu tidak terlepas dari awal mula ilmu kalkulus yang telah mengalami perkembangan dan juga perbaikan.

Selama tahun 1630-an perkembangan kalkulus, yang dipelopori oleh Fermat dan Descartes, mengarah ke geometri analitik dan teori derivatif. Bagaimanapun juga, perkembangan kalkulus tidak mengalami perkembangan yang berarti sebelum pada tahun 1660-an saat Isaac Newton menemukan teorema *fluxions* dan metode *inverse tangents* untuk mencari luas daerah di bawah kurva (Bartle dan Sherbert, 1991: 229). Metode membalikkan proses dalam mencari garis singgung untuk menentukan luas daerah di bawah kurva juga ditemukan oleh Gottfried Leibniz pada tahun 1680-an. Baik Newton dan Leibniz, masih menurut Bartle dan Sherbert (1991: 229), berpendapat bahwa integrasi yang merupakan proses penjumlahan adalah kebalikan (*inverse*) dari operasi diferensiasi. Selama kurang lebih satu setengah abad perkembangan kalkulus masih mengenai sepasang operasi tersebut beserta terapannya, adapun terapan yang paling besar adalah dalam bidang fisika.

Newton dan Leibniz memang berhasil membuat kalkulus menjadi alat untuk menyelesaikan masalah di berbagai terapan, tetapi keduanya belum dapat memberikan definisi mengenai apa yang disebut sebagai integral. Hal tersebut menjadi perhatian paling dominan di abad 19 (Shenitzer dan Steprāns, 1994: 4).

Lebih lanjut menurut Shenitzer dan Steprāns (1994: 4), definisi mengenai integral pertama kali diberikan oleh Cauchy pada tahun 1820-an.

Cauchy menggunakan fungsi yang kontinu. Namun, mengingat pentingnya peran deret Fourier, yang koefisiennya diberikan oleh integral, maka diperlukan definisi integral yang berlaku untuk fungsi yang lebih umum. Hal tersebut kemudian diteliti oleh Riemann.

Menurut Bartle dan Sherbert (1991: 229), pada tahun 1850-an, Bernard Riemann berhasil menemukan bentuk integral yang baru dan berbeda. Riemann memisahkan konsep integrasi dari diferensiasi dan menggunakan ide penjumlahan dan proses limit untuk menentukan luas daerah di bawah kurva. Selanjutnya bentuk integral ini disebut integral Riemann. Setiap fungsi kontinu f pada $[a,b]$ dijamin juga terintegral Riemann pada $[a,b]$.

Integral lain yang dibangun pada abad 19 selain integral Riemann adalah integral Darboux (Shenitzer dan Steprāns, 1994: 1). Integral yang dibangun oleh Gaston Darboux tersebut menggunakan jumlah bawah dan jumlah atas sebagai syarat keterintegralan. Kenyataan menunjukkan bahwa integral Darboux ekuivalen dengan integral Riemann.

Kenyataan lain menunjukkan bahwa masih terdapat banyak fungsi yang tidak terintegral secara Riemann. Salah satu fungsi yang tidak terintegral secara Riemann adalah fungsi Dirichlet yang didefinisikan sebagai berikut

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x\in \text{rasional} \\ 0, & x\in \text{irrasional} \end{cases}, \quad x\in[0,1].$$

Padahal secara awam, orang dapat mengetahui bahwa luas daerah di bawah kurva dari fungsi tersebut adalah nol (Gordon, 1994: 29). Fungsi Dirichlet itu sendiri juga sering diaplikasikan sebagai alat untuk menyelesaikan suatu masalah. Salah satu aplikasi fungsi Dirichlet tersebut dalam bidang statistik yaitu untuk mengkonstruksikan fungsi indikator yang kemudian digunakan di dalam pembentukan fungsi kernel (Halim dan Bisono, 2006: 76).

Kelemahan dari integral Riemann tersebut berhasil diatasi oleh Henry Lebesgue yang membangun integral Lebesgue di awal abad 20 dengan menggunakan pengertian dan sifat-sifat dari himpunan terukur dan fungsi terukur. Didapat bahwa fungsi Dirichlet tersebut terintegral Lebesgue dengan nilai integral nol. Bahkan didapat juga bahwa setiap fungsi yang terintegral Riemann juga terintegral Lebesgue pada interval yang sama, tapi tidak berlaku sebaliknya (Royden, 1968: 79).

Menurut Lee (1989: 1), integral dapat didefinisikan melalui dua cara yaitu secara konstruktif dan deskriptif. Baik integral Riemann ataupun integral Lebesgue dapat didefinisikan melalui dua cara tersebut. Definisi integral Riemann secara konstruktif disajikan dalam bentuk limit dari suatu jumlahan. Definisi ini dikenal dengan integral Riemann sebagai limit jumlah yang kemudian dapat digunakan untuk membuktikan sifat-sifat yang berlaku pada integral Riemann. Berdasarkan hal tersebut, penulis tertarik untuk membahas integral Lebesgue melalui limit jumlah sebagaimana halnya pada integral konstruktif Riemann. Akan tetapi, pembahasan sedikit berbeda karena partisi yang dibangun adalah pada daerah hasil (*range*) fungsi. Selanjutnya bentuk integral ini dikenal dengan integral Lebesgue sebagai limit jumlah.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, dapat dirumuskan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah

1. bagaimana bentuk integral Lebesgue melalui konsep integral sebagai limit jumlah?
2. bagaimana membuktikan sifat-sifat yang berlaku pada integral Lebesgue dengan menggunakan konsep integral sebagai limit jumlah?

1.3 Batasan Masalah

Pada penulisan skripsi ini, fungsi yang dibahas dibatasi hanya untuk fungsi-fungsi $f:[a,b]\to R$ yang terbatas.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah

1. membahas integral Lebesgue melalui konsep integral sebagai limit jumlah dan
2. membuktikan sifat-sifat yang berlaku pada integral Lebesgue dengan menggunakan konsep integral sebagai limit jumlah.

1.5 Manfaat Penulisan

Hasil dari penulisan skripsi ini diharapkan akan bermanfaat bagi penulis, maupun pembaca. Manfaat yang diharapkan dari penulisan skripsi ini adalah

1. memberikan kemudahan dalam memahami integral Lebesgue karena dibahas seperti halnya pada integral Riemann,
2. memberikan ragam pembuktian sifat-sifat yang berlaku pada integral Lebesgue dan
3. menambah pengetahuan dan wawasan tentang integral Lebesgue.