

PENDEKATAN KALKULUS VARIASIONAL PADA SISTEM KONTROL DAYA DORONG ROKET

Niken Madu Meta
Jurusan Matematika, FMIPA UNS

ABSTRAK. Kalkulus variasional adalah cabang dari kalkulus diferensial yang digunakan untuk menentukan nilai ekstrim suatu fungsional pada domain dan atau kendala yang disyaratkan. Salah satu topik dalam kalkulus variasional adalah masalah sistem kontrol yang dioptimalkan dengan memilih vektor kontrol sehingga indeks performansi diminimumkan atau dimaksimumkan.

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah dapat menyelesaikan sistem kontrol daya dorong roket apabila gesekan udara diabaikan, gesekan udara dipertimbangkan dan jika ekstremalnya memenuhi pertidaksamaan $0 \leq u \leq \beta$. Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi literatur.

Berdasarkan hasil pembahasan pada skripsi ini, diperoleh kesimpulan bahwa sistem kontrol daya dorong roket apabila gesekan udara diabaikan adalah

$$u_0(t) = \frac{3(h + \frac{gT^2}{2})(T - t)}{T^3},$$

apabila gesekan udara dipertimbangkan adalah

$$u_0(t) = \frac{h + g[T - 1 + e^{-T}]}{T - \frac{3}{2} + 2e^{-T} - \frac{e^{-2T}}{2}} (1 - e^{-(T-t)}),$$

dan apabila ekstremalnya memenuhi pertidaksamaan $0 \leq u \leq \beta$ adalah

$$u_0(t) = \begin{cases} \beta & , t < \tau \\ \frac{\beta}{\sqrt{T^2 - 2h}} & , t \geq \tau \end{cases}$$

dengan waktu *switch*

$$\tau = T - \sqrt{T^2 - 2h}.$$

Kata kunci: kalkulus variasional, sistem kontrol optimal, roket.

1. PENDAHULUAN

Kalkulus variasional adalah cabang dari kalkulus diferensial yang digunakan untuk menentukan nilai ekstrim suatu fungsional pada domain dan atau kendala yang disyaratkan. Fungsi yang menghasilkan nilai ekstrim suatu fungsional disebut ekstremal. Istilah kalkulus variasional pertama kali diperkenalkan oleh Lagrange pada sekitar tahun 1760 untuk membandingkan nilai fungsional pada suatu ekstremal dengan nilai fungsional pada fungsi kendala di sekitar ekstremal, yaitu dengan menambahkan variasi dari fungsi kendala (Prahoro [5]).

Salah satu topik dalam kalkulus variasional adalah masalah sistem kontrol. Sebagai contoh adalah masalah sistem kontrol daya dorong roket. Sistem kontrol dioptimalkan dengan memilih vektor kontrol sehingga indeks performansi

diminimumkan atau dimaksimumkan. Indeks performansi, yaitu suatu fungsi yang harganya menunjukkan seberapa baik performansi sistem yang sebenarnya mendekati performansi sistem yang diinginkan (Ogata [4]). Dalam hal ini, indeks performansi digunakan untuk meminimumkan pemakaian bahan bakar roket.

2. EKSISTENSI NILAI EKSTRIM

Nilai ekstrim adalah nilai maksimum atau minimum dari suatu fungsi pada domain tertentu. Eksistensi nilai ekstrim dijamin oleh Teorema Eksistensi Maks-Min (Purcell, E. J., *et al.* [6]) dan Teorema Weierstrass (Manderscheid [3]). Kedua teorema tersebut menyatakan bahwa jika fungsi f kontinu pada domain \varnothing yang tertutup dan terbatas, maka f mempunyai nilai ekstrim.

3. FUNGSI KONVEKS

Definisi 3.1. (Troutman, [8]) Fungsi $f(x, y, z)$ dikatakan konveks [kuat] pada $S \subseteq \mathbb{R}^3$ jika $f = f(x, y, z)$ dan turunan parsialnya f_y dan f_z terdefinisi dan kontinu pada S serta memenuhi ketaksamaan

$$f(x, y + v, z + w) - f(x, y, z) \geq f_y(x, y, z)v + f_z(x, y, z)w$$

untuk setiap (x, y, z) dan $(x, y + v, z + w)$ di dalam S , [berlaku kesamaan di (x, y, z) hanya jika $v = 0$ atau $w = 0$].

Teorema 3.2. (Troutman, [8]) *Penjumlahan fungsi konveks [kuat] dengan satu atau lebih fungsi konveks [kuat] adalah fungsi konveks [kuat].*

Teorema 3.3. (Gregory, J and Lin, C., [1]) *Misal D domain di dalam \mathbb{R}^2 dan terdapat konstanta $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, N$, dimana $f(x, y, z)$ dan $\lambda_j g_j(x, y, z)$ adalah konveks pada $[a, b] \times D$ [dan setidaknya-tidaknya ada satu fungsi yang merupakan fungsi konveks kuat]. Selanjutnya, dibentuk fungsi baru*

$$\tilde{f} = f + \sum_{j=1}^N \lambda_j g_j$$

sehingga y_0 penyelesaian dari persamaan

$$\frac{d}{dx} \tilde{f}_z[y(x)] = \tilde{f}_y[y(x)]$$

pada (a, b) akan meminimumkan

$$F(y) = \int_a^b f[y(x)] dx$$

secara tunggal pada

$$\varnothing = \{y \in C^1[a, b]; y(a) = y_0(a), y(b) = y_0(b), (y(x), y'(x)) \in D\}.$$

terhadap kendala

$$G_j(y) = \int_a^b g_j[y(x)]dx = G_j(y_0), j = 1, 2, \dots, N.$$

4. MOMENTUM DAN GAYA

Menurut Tipler [7], momentum sebuah partikel adalah besaran vektor yang didefinisikan sebagai hasil kali massa dan kecepatan, yaitu

$$p = mv.$$

Hukum II Newton, dalam kaitannya dengan momentum partikel dapat ditulis

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} = ma = F.$$

Jadi gaya yang bekerja pada sebuah partikel sama dengan laju perubahan momentum partikel per satuan waktu.

5. MODEL GERAKAN SISTEM

Sebagaimana dituliskan Harris, N. C., *et al.* [2], sebuah roket mempunyai dua buah tangki. Satu tangki berisi bahan bakar cair dan tangki yang lain berisi *oxidizing agent* (zat yang dapat mengoksidasi). Pada ruang pembakaran, bahan bakar cair dan *oxidizing agent* dicampur sehingga terjadi pembakaran dan menghasilkan gas panas yang akan menyembur keluar melalui mulut pipa pada ekor roket. Selama selang waktu t , terjadinya perubahan momentum gas dari nol menjadi mv sehingga menghasilkan gaya yang dikerjakan roket pada gas kearah bawah.

Sesuai Hukum III Newton, timbul reaksi gaya yang besarnya sama dengan yang dikerjakan gas pada roket tetapi arahnya berlawanan. Jadi gas akan menyebabkan gaya ke atas pada roket sehingga roket terdorong ke atas. Gaya inilah yang disebut sebagai daya dorong roket (*thrust*).

Pendekatan yang digunakan untuk memodelkan gerakan roket saat meluncur ke atas adalah menghitung perubahan momentum total sistem (termasuk gas panasnya) untuk selang waktu tertentu dan menyamakan perubahan ini dengan impuls yang dikerjakan pada sistem oleh gaya eksternal yang bekerja padanya.

Misalkan pada saat t , roket meluncur dengan massa m (ditambah bahan bakar) dan kelajuan relatif roket v terhadap bumi. Sedangkan pada saat $t + \Delta t$, roket mengeluarkan gas bermassa $|\Delta m|$. Jadi pada saat $t + \Delta t$, roket mempunyai massa $m - |\Delta m|$ dan bergerak dengan kelajuan $v + \Delta v$.

Pada saat t , momentum awal sistem adalah $P_0 = mv$. Jika gas panas yang dibuang mempunyai kelajuan u_{keluar} relatif terhadap roket, maka kecepatan roket pada saat $t + \Delta t$ relatif terhadap bumi adalah $v - u_{keluar}$. Oleh karena itu,

momentum sistem pada saat $t + \Delta t$ adalah

$$\begin{aligned} P_1 &= (m - |\Delta m|)(v + \Delta v) + |\Delta m|(v - u_{keluar}) \\ &= mv + m\Delta v - v|\Delta m| - |\Delta m|\Delta v + v|\Delta m| - u_{keluar}|\Delta m|. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Karena nilai $|\Delta m|\Delta v$ mendekati nol, maka persamaan (5.1) dapat ditulis

$$P_1 = mv + m\Delta v - u_{keluar}|\Delta m|.$$

Jika perubahan momentum total sama dengan impuls, maka

$$\Delta P = P_1 - P_0 = m\Delta v - u_{keluar}|\Delta m| = F_{eks}\Delta t. \quad (5.2)$$

Dengan kata lain, persamaan (5.2) dapat ditulis

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = u_{keluar} \left| \frac{\Delta m}{\Delta t} \right| + F_{eks}$$

setara dengan

$$m \frac{dv}{dt} = u_{keluar} \left| \frac{dm}{dt} \right| + F_{eks}$$

dengan $u_{keluar} \left| \frac{dm}{dt} \right|$ disebut daya dorong roket dan $\left| \frac{dm}{dt} \right| = u$. Jadi persamaan daya dorong roket untuk meminimumkan pemakaian bahan bakar adalah

$$F_{dorong} = u^2. \quad (5.3)$$

6. SISTEM KONTROL DAYA DORONG ROKET APABILA GESEKAN UDARA DIABAIKAN

Misal sebuah roket dengan massa m meluncur ke atas sampai ketinggian h dalam waktu T dengan daya dorong mesin u . Berdasarkan persamaan (5.3), daya dorong roket dapat dikontrol dengan meminimumkan

$$F(u) = \int_0^T u^2(t) dt \quad (6.1)$$

Jika T , m , dan g (percepatan gravitasi) diasumsikan konstan selama peluncuran maka berdasarkan Hukum Newton II tentang gerak, pada saat t , roket mencapai ketinggian $y = y(t)$ dan mengalami percepatan sebesar

$$\ddot{y} = u - g \quad (6.2)$$

dengan syarat batas

$$y(0) = \dot{y}(0) = 0 \text{ dan } y(T) = h. \quad (6.3)$$

Jika $y(0) = 0$, maka $y(T) = \int_0^T \dot{y}(t) dt$. Dengan menggunakan integral parsial, diperoleh

$$y(T) = -(T-t)\dot{y}(t)|_0^T + \int_0^T (T-t)\ddot{y}(t) dt. \quad (6.4)$$

Dari persamaan (6.2), (6.3), dan (6.4) diperoleh

$$h = y(T) = \int_0^T (T-t)u(t) dt - \frac{gT^2}{2}.$$

Jadi kendala untuk persamaan (6.1) dapat ditulis

$$G_1(u) = \int_0^T (T-t)u(t)dt = h + \frac{gT^2}{2} = k. \quad (6.5)$$

Karena ekstremal dari persamaan (6.1) adalah kontinu dan domainnya adalah tertutup dan terbatas maka eksistensi nilai ekstrim dijamin. Untuk mencari nilai ekstrim dari persamaan (6.1) dengan menggunakan metode Euler-Lagrange, terlebih dahulu harus dibuktikan bahwa ekstremal dan kendalanya adalah konveks (dan setidaknya-tidaknya ada satu fungsi yang merupakan fungsi konveks kuat).

Teorema 6.1. *Ekstremal dari fungsional (6.1), yaitu $f(t, u, z) = u^2$ adalah konveks kuat pada domain \wp .*

Bukti. Berdasarkan Definisi 3.1., maka

$$\begin{aligned} f(t, u+v, z+w) - f(t, u, z) &= (u+v)^2 - u^2 \\ &\geq 2uv \\ &= f_u(t, u, z)v. \end{aligned} \quad (6.6)$$

□

Teorema 6.2. *Fungsi kendala g_1 pada persamaan (6.5), yaitu $g_1(t, u, z) = (T-t)u$ adalah konveks pada domain \wp .*

Bukti. Berdasarkan Definisi 3.1., maka

$$\begin{aligned} g_1(t, u+v, z+w) - g_1(t, u, z) &= (T-t)(u+v) - (T-t)u \\ &= (T-t)v \\ &= (g_1)_u(t, u, z)v. \end{aligned} \quad (6.7)$$

□

Selanjutnya, dengan menggunakan metode Euler-Lagrange diperoleh sistem kontrol daya dorong roket apabila gesekan udara diabaikan adalah

$$u_0(t) = \frac{3(h + \frac{gT^2}{2})(T-t)}{T^3},$$

yang meminimumkan pemakaian bahan bakar sebesar

$$F(u_0) = 3\left(\frac{h^2}{T^3} + \frac{gh}{T} + \frac{g^2T}{4}\right)$$

dengan waktu penerbangan optimal

$$T_0 = \sqrt{\frac{6h}{g}}.$$

7. SISTEM KONTROL DAYA DORONG ROKET APABILA GESEKAN UDARA DIPERTIMBANGKAN

Pada kasus ini, gesekan udara dipertimbangkan sehingga percepatan yang dialami roket berubah menjadi

$$\ddot{y} = u - g - \alpha \dot{y}, \alpha > 0 \quad (7.1)$$

dan

$$\frac{d}{dt}(e^{\alpha t} \dot{y}) = e^{\alpha t}(u - g)$$

sehingga

$$\alpha e^{\alpha t} \dot{y} = e^{\alpha t}(u - g)$$

atau

$$\dot{y} = \frac{1}{\alpha}(u - g) \quad (7.2)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan Transformasi Laplace pada persamaan diferensial dengan koefisien konstan pada persamaan (7.1) dan syarat batas pada persamaan (7.2) diperoleh

$$y(T) = h = \frac{1}{\alpha} \int_0^T (1 - e^{-\alpha(T-t)})(u(t) - g) dt.$$

Jadi kendala untuk persamaan (6.1) apabila gesekan udara dipertimbangkan adalah

$$G(u) = \int_0^T (1 - e^{-\alpha(T-t)})(u(t) - g) dt = \alpha h. \quad (7.3)$$

Karena pada bagian sebelumnya, ekstremal persamaan (6.1) sudah terbukti konveks kuat, maka untuk kasus apabila gesekan udara dipertimbangkan, cukup dibuktikan bahwa fungsi kendala adalah konveks.

Teorema 7.1. *Fungsi kendala g_2 pada persamaan (7.3), yaitu $g_2(t, u, z) = (1 - e^{-\alpha(T-t)})(u - g)$ adalah konveks pada domain \wp .*

Bukti. Berdasarkan Definisi 3.1., maka

$$\begin{aligned} g_2(t, u + v, z + w) - g_2(t, u, z) &= (1 - e^{-\alpha(T-t)})(u - g) + (1 - e^{-\alpha(T-t)})v \\ &\quad - (1 - e^{-\alpha(T-t)})(u - g) \\ &= (1 - e^{-\alpha(T-t)})v \\ &= (g_2)_u(t, u, z)v. \end{aligned} \quad (7.4)$$

□

Dengan menggunakan metode Euler-Lagrange, sistem kontrol daya dorong roket apabila gesekan udara dipertimbangkan adalah

$$u_0(t) = \frac{h + g[T - 1 + e^{-T}]}{T - \frac{3}{2} + 2e^{-T} - \frac{e^{-2T}}{2}} (1 - e^{-(T-t)})$$

yang meminimumkan pemakaian bahan bakar sebesar

$$F(u_0) = \frac{(h + g[T - 1 + e^{-T}])^2}{T - \frac{3}{2} + 2e^{-T} - \frac{e^{-2T}}{2}}$$

dan tidak mempunyai waktu penerbangan optimal.

8. SISTEM KONTROL DAYA DORONG ROKET JIKA EKSTREMAL MEMENUHI PERTIDAKSAMAAN $0 \leq u \leq \beta$

Kasus ini merupakan pengembangan dari kasus pertama, yaitu ekstremal dari persamaan (6.1) memenuhi pertidaksamaan $0 \leq u \leq \beta$, yaitu

$$\tilde{f}(t, u, z) = u^2 + \lambda(t)(u^2 - \beta^2) + \lambda_1(T - t)u \quad (8.1)$$

dengan λ_1 adalah konstanta.

Mengacu pada Teorema 3.2, untuk membuktikan bahwa ekstremal yang memenuhi pertidaksamaan $0 \leq u \leq \beta$ adalah konveks kuat, cukup dibuktikan bahwa persamaan (8.1) adalah konveks kuat.

Teorema 8.1. *Persamaan (8.1) adalah konveks kuat pada domain φ .*

Bukti. Berdasarkan Definisi 3.1., maka

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t, u + v, z + w) - \tilde{f}(t, u, z) &= (u + v)^2 + \lambda(t)((u + v)^2 - \beta^2) \\ &\quad + \lambda_1(T - t)(u + v) - (2u + 2\lambda u + \lambda_1(T - t)) \\ &\geq 2uv + 2\lambda uv + \lambda_1(T - t)v \\ &= \tilde{f}_u(t, u, z)v. \end{aligned} \quad (8.2)$$

□

Dengan menggunakan metode Euler-Lagrange, sistem kontrol daya dorong roket jika ekstremal memenuhi pertidaksamaan $0 \leq u \leq \beta$ adalah

$$u_0(t) = \begin{cases} \beta & , t < \tau \\ \frac{\beta}{\sqrt{T^2 - 2h}} & , t \geq \tau \end{cases}$$

dengan waktu *switch*

$$\tau = T - \sqrt{T^2 - 2h}$$

yang meminimumkan pemakaian bahan bakar sebesar

$$F(u_0) = \beta^2 T - \frac{2}{3} \beta^2 \sqrt{T^2 - 2h}$$

dengan waktu penerbangan optimal

$$T_0 = 3\sqrt{\frac{2h}{5}}.$$

9. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan pada skripsi ini, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

- (1) Sistem kontrol daya dorong roket apabila gesekan udara diabaikan adalah

$$u_0(t) = \frac{3(h + \frac{gT^2}{2})(T - t)}{T^3}.$$

- (2) Sistem kontrol daya dorong roket apabila gesekan udara dipertimbangkan adalah

$$u_0(t) = \frac{h + g[T - 1 + e^{-T}]}{T - \frac{3}{2} + 2e^{-T} - \frac{e^{-2T}}{2}} (1 - e^{-(T-t)}).$$

- (3) Sistem kontrol daya dorong roket apabila ekstremalnya memenuhi per-tidaksamaan $0 \leq u \leq \beta$ adalah

$$u_0(t) = \begin{cases} \beta & , t < \tau \\ \frac{\beta}{\sqrt{T^2 - 2h}} & , t \geq \tau \end{cases}$$

dengan waktu *switch*

$$\tau = T - \sqrt{T^2 - 2h}.$$

DAFTAR PUSTAKA

1. Gregory, J and Lin, C., *Constrained Optimization in the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Van Nostrand Reinold, New York, 1990.
2. Harris, N. C., et al., *Physics Principles Applications Fifth Edition*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1990.
3. Manderscheid, U. B., *Introduction to The Calculus of Variations*, ChapmanHall Mathematics, London, 1991.
4. Ogata, K., *Teknik Kontrol Automatik Jilid I Edisi Kedua*, Erlangga, Jakarta, 1997.
5. Prahoro, D., *Kalkulus Variasi dan Penerapannya pada Masalah Aerodinamika*, FMI-PA Institut Teknologi Bandung, 1985.
6. Purcell, E. J., et al., *Edisi Kedelapan Kalkulus Jilid 1*, Erlangga, Jakarta, 2004.
7. Tipler, P. A., *Fisika Untuk Sains dan Teknik Edisi Ketiga Jilid 1*, Erlangga, Jakarta, 1991.
8. Troutman, J. L., *Variational Calculus and Optimal Control*, Springer-Verlag, New York, 1996.