PEMBERIAN NOMOR *VERTEX* PADA TOPOLOGI JARINGAN GRAF *WHEEL*, GRAF *HELM* DAN GRAF *LOLLIPOP*

Muhamad Sidiq, Tri Atmojo Kusmayadi, Sri Kuntari

Jurusan Matematika FMIPA UNS

Abstrak. Teori graf merupakan ilmu terapan yang banyak dimanfaatkan untuk menyelesaikan beberapa masalah. Pemberian nomor *vertex* pada topologi jaringan bertujuan untuk menghasilkan rute terpendek dan biaya minimum dari lintasan graf. Permasalahan ini dapat diselesaikan dengan *minimum spanning tree* (MST) menggunakan algoritma *BFS* Moore.

Topologi jaringan graf dimisalkan $G = (V, E)$. Eksentrisitas dari *vertex* u adalah jarak terjauh dari *vertex* u ke *vertex* lain, dinotasikan $e(u)$. Pemberian nomor tiap *vertex* pada topologi jaringan graf berdasarkan pada Algoritma Kamalesh-Srivatsa. Dalam artikel ini, diberikan pemberian nomor pada MST topologi jaringan graf yang berbentuk graf *wheel* W_n, graf *helm* H_n dan graf *lollipop* L_{mn}. Didapatkan hasil penelitian berupa penomoran *vertex* dari MST jaringan graf berdasarkan pada urutan nilai eksentrisitas tiap *vertex*.

Kata kunci: *topologi jaringan, minimum spanning tree, graf wheel, graf helm, graf lollipop.*

1. Pendahuluan

Menurut penelitian Kamalesh dan Srivatsa [3] salah satu cara untuk mencari topologi jaringan yang lebih baik dan efisien adalah dengan memberi nomor pada setiap *vertex*. Konsep pemberian nomor *vertex* pada topologi jaringan banyak diteliti oleh peneliti sebelumnya. Pemberian nomor pada *vertex* harus mempertimbangkan tentang kemungkinan terjadi penundaan transmisi dan eksentrisitas setiap *vertex* dalam jaringan.

Menurut Kamalesh dan Srivatsa [2], jaringan graf yang efisien adalah jaringan graf dengan rute terpendek hingga dapat memberikan hasil maksimal dan biaya minimal. Dalam penggunaan model jaringan graf untuk penyelesaian masalah dibutuhkan suatu bentuk *minimum spanning tree* (MST) untuk mendapatkan jaringan graf yang efisien. MST adalah salah satu konsep kajian ilmu terapan teori graf yang diterapkan untuk menentukan rute terpendek dari suatu jaringan graf yang menghubungkan antara satu *vertex* ke *vertex* yang lain. Salah satu cara menentukan bentuk efisien dari MST suatu jaringan graf adalah dengan memberi nomor secara sistematis pada setiap *vertex* dari bentuk MST jaringan graf tersebut. Ketika *vertex* diberi nomor secara sistematik, topologi jaringan menghasilkan rute terpendek antar *vertex* yang lebih baik dan efisien**.**

Kamalesh dan Srivatsa [4] dalam penelitiannya memberikan solusi bentuk efisien dari jaringan komputer yang berbentuk graf tripartit dengan memberikan nomor pada tiap *vertex* dari MSTnya berdasarkan eksentrisitas tiap *vertex*. Selanjutnya dalam artikel ini dibahas pemberian nomor *vertex* pada topologi jaringan graf *wheel*, graf *helm* dan graf *lollipop*, yang belum pernah dikerjakan oleh peneliti sebelumnya.

2. Metode Penelitian

Dalam menyelesaikan masalah lintasan terpendek dalam topologi jaringan graf *G*, digunakan algoritma *BFS* Moore. Menurut Chartrand dan Oellermann [1] algoritma *BFS* Moore adalah sebagai berikut,

1. diambil salah satu *vertex*, misal u, dan dilabeli 0 yang menyatakan jarak dari u ke dirinya sendiri, sedangkan semua *vertex* selain u dilabeli ∞,
2. semua *vertex* berlabel ∞ yang *adjacent* dengan u dilabeli 1,
3. semua *vertex* berlabel ∞ yang *adjacent* dengan *vertex* berlabel 1 dilabeli 2 dan demikian seterusnya sampai *vertex* yang dimaksud, misal v sudah berlabel hingga. Dalam hal ini, label dari setiap *vertex* menyatakan jarak dari *vertex* u.

Menurut Kamalesh dan Srivatsa [2] dalam menentukan jaringan graf yang efisien, dilakukan pemberian nomor *vertex* dengan langkah-langkah berikut,

1. mengkonstruksikan bentuk topologi jaringan pada graf,
2. memberikan label tiap *vertex* dengan simbol misal $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$,
3. menentukan bentuk MST pada graf tersebut,
4. mencari nilai eksentrik tiap $vertex$ dari MST,
5. memberikan nomor *vertex* pada topologi jaringan pada graf berdasarkan nilai eksentrisitas secara sistematis, *vertex* yang memiliki nilai eksentrisitas terkecil maka diberikan nomor terkecil. Jika terdapat *vertex* dengan $d(v_i, v_{awal})$ sama maka *vertex* dengan indeks lebih kecil dan jarak lebih dekat dengan *vertex* awal diberikan penomoran *vertex* lebih kecil.

3. Pembahasan

3.1.Pemberian Nomor *Vertex* pada topologi Graf *Wheel* W_n

Menurut Chartrand dan Oellerman [1] graf *wheel* dengan $n+1$ *vertex*, dinotasikan W_n dengan himpunan *vertex* $V(W_n) = \{u, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Graf *wheel* merupakan join dari graf K_1 dan graf *cycle* C_n , sehingga dapat dituliskan $W_n = K_1 + C_n$ *untuk* $n \geq 3$, *vertex* $x \in V(K_1)$ sebagai *vertex* pusat *(central vertex)* dari *wheel* dan *cycle* C_n sebagai *rim* dari *wheel*. *Vertex* awal pada pemberian nomor *vertex* dinotasikan v_r dengan $1 \leq r \leq n$.

Jika W_n' merupakan bentuk MST dari graf *wheel* W_n maka $V(W_n') = V(W_n)$ dan urutan penomoran *vertex* dari MST graf *wheel* W_n' dinotasikan dengan $\lambda(u)$, $u \in V(W_n')$.

Teorema 3.1. *Jika* $\mathrm{W_n'}$ *merupakan MST dari graf wheel, vertex awal* $1 \leq r \leq n$, *maka penomoran setiap vertex dalam* W_n' *mengikuti rumus sebagai berikut.*

Untuk $v_r = u$

$$\lambda(u) = 1,$$
$$\lambda(v_j) = 1 + j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Untuk $v_r = v_1$

$$\lambda(u) = 2,$$
$$\lambda(v_j) = \begin{cases} 1, & j = 1 \\ j + 1, & j = 2, 3, \ldots, n. \end{cases}$$

Untuk $v_r = 2 \leq r \leq n - 1$

$$\lambda(u) = 2,$$
$$\lambda(v_j) = \begin{cases} 1, & j = r \\ j + 2, & j = 1, 2, \ldots, r - 1 \\ j + 1 & j = r + 1, r + 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Untuk $v_r = v_n$

$$\lambda(u) = 2\,,$$
$$\lambda(v_j) = \begin{cases} 1, & j = n \\ j + 2, & j = 1, 2, \ldots, n - 1. \end{cases}$$

Bukti. Untuk $v_r = u$, diberikan MST graf *wheel* W_n' dengan pengambilan *vertex* awal u_1, sehingga urutan pemberian nomor *vertex* dari eksentrisitas *vertex* u_i, $\lambda(u)$ adalah 1, sedangkan *vertex* v_j, $\lambda(v_j)$ adalah $1 + j$ untuk setiap $j = 1, 2, \ldots, n$.

Untuk $v_r = v_1$, pengambilan *vertex* awal v_1 dari MST graf *wheel* W_n' sehingga urutan pemberian nomor *vertex* dari eksentrisitas *vertex* u_1, $\lambda(u)$ adalah 2 untuk $i = 1$, dan *vertex* v_j, $\lambda(v_j)$ adalah 1 untuk $j = 1$, serta $\lambda(v_j)$ adalah $j + 1$ untuk setiap $j = 2, 3, \dots, n$.

Untuk $v_r = 2 \leq r \leq n - 1$, diberikan MST graf *wheel* W_n' dengan pengambilan *vertex* awal v_r *untuk* $2 \leq r \leq n - 1$, sehingga urutan pemberian nomor *vertex* dari eksentrisitas *vertex* u_1, $\lambda(u)$ = 2 untuk $i = 2$ dan *vertex* v_j, $\lambda(v_j)$ adalah 1 untuk $j = r$, $\lambda(v_j)$ adalah $j + 2$ untuk $1, 2, \dots, r - 1$ serta $\lambda(v_j)$ adalah $j + 1$ untuk setiap $j = r + 1, r + 2, \dots, n$.

Untuk $v_r = v_n$, pengambilan *vertex* awal v_n dari MST graf *wheel* W_n' sehingga u rutan pemberian nomor *vertex* dari eksentrisitas *vertex* u_1, $\lambda(u_i)$ = 2 untuk $i = 1$, dan *vertex* v_j, $\lambda(v_j)$ adalah 1 untuk $j = n$, $\lambda(v_j)$ adalah $j + 2$ untuk $j = 1, 2, \dots, n - 1$. □

3.2 Pemberian Nomor *Vertex* Pada Topologi Jaringan Graf *Helm* H_n

Menurut Wallis [5] graf *helm* merupakan graf yang diperoleh dari graf *wheel* dengan menambahkan satu *vertex* berderajat satu pada setiap *vertex* terminalnya dengan n berorder $n \geq 3$, memiliki himpunan *vertex* $V(Hn) = \{u, v_1, v_2, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_n\}$.

Jika H_n' merupakan bentuk MST dari graf *helm* H_n dengan u sebagai *vertex* awal, maka $V(H_n') = V(H_n)$ dan urutan penomoran *vertex* dari MST graf *wheel* H_n' dinotasikan dengan $\lambda(u)$, $u \in V(H_n')$.

Teorema 3.2. *Jika H_n' merupakan bentuk MST dari graf helm H_n maka penomoran setiap vertex dalam H_n' mengikuti rumus sebagai berikut.*

$$\lambda(u) = 1,$$

$$\lambda(v_j) = 1 + j, \qquad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\lambda(w_k) = 1 + n + k, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Bukti. Diberikan MST graf *helm* H_n', sehingga urutan pemberian nomor *vertex* dari eksentrisitas *vertex* u_i, $\lambda(u)$ adalah 1 untuk setiap $i = 1$, dan *vertex* v_j, $\lambda(v_j)$ adalah

$1+j$ untuk setiap $j=1,2,\dots,n$, serta *vertex* w_k ,$\lambda(w_k)$ adalah $1+n+k$ untuk setiap $k=1,2,\dots,n$. □

3.3 Pemberian Nomor *Vertex* Pada Topologi Jaringan Graf *Lollipop* $L_{m,n}$

Menurut Weisstein [6] graf *lollipop* dinotasikan dengan $L_{m,n}$ merupakan graf lengkap (K_m) berorder m dengan $m \geq 3$ yang ditambahkan dengan graf lintasan (P_n) berorder n dengan $n \geq 1$.Graf *lollipop* $L_{m,n}$ memiliki himpunan *vertex* $V(L_{m,n}) = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m\}$. Jika $L'_{m,n}$ merupakan MST dari graf *lollipop* $L_{m,n}$ dengan u_1 sebagai *vertex* awal, maka $V(L'_{m,n}) = V(L_{m,n})$ dan urutan penomoran *vertex* dari graf *lollipop* $L'_{m,n}$ dinotasikan dengan $\lambda(u)$, $u \in V(L'_{m,n})$.

Teorema 3.3. *Jika $L'_{m,n}$ merupakan MST dari graf lollipop $L_{m,n}$ maka penomeran dengan pengambilan vertex awal u_1 dirumuskan sebagai berikut.*

Untuk $n=1$

$$\lambda(u_1) = 2, \qquad i = 1,$$

$$\lambda(v_j) = \begin{cases} 1, & j = 1 \\ n+j, & j = 2,3,\dots,m. \end{cases}$$

Untuk $n=2$

$$\lambda(u_i) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 3, & i = 2, \end{cases}$$

$$\lambda(v_j) = \begin{cases} 2, & j = 1 \\ n+j, & j = 2,3,\dots,m. \end{cases}$$

Untuk $n=3$

$$\lambda(u_i) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 2, & i = 2 \\ 4, & i = 3, \end{cases}$$

$$\lambda(v_j) = \begin{cases} 3, & j = 1 \\ n+j, & j = 2,3,\dots,m. \end{cases}$$

Untuk $n=4$

$$(u_i) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 2, & i = 2 \\ 4, & i = 3 \\ m+n, & i = 4, \end{cases}$$

$$\lambda(vj) = \begin{cases} 3, & j = 1 \\ n + j - 1, & j = 2, 3, \dots, m. \end{cases}$$

Bukti. Diberikan MST dari graf *lollipop* $L_{m,n}$ untuk $n = 1$, sehingga urutan pemberian nomor *vertex* dari eksentrisitas *vertex* u_i, $\lambda(u_i)$ adalah 2 untuk setiap $i = 1$ dan $\lambda(v_j)$ adalah 1 untuk setiap $j = 1$, serta $\lambda(v_j)$ adalah $n + j$ untuk $2 \leq j \leq m$.

Pengambilan *vertex awal* u_1 untuk $n = 2$ pada *MST* dari graf *lollipop*, sehingga urutan pemberian nomor *vertex* dari eksentrisitas *vertex* u_i dan $v_j, \lambda(u_i)$ adalah 1 untuk $i = 1$ dan $m + n$ untuk setiap $i = 2$. Sedangkan untuk $\lambda(v_j)$ adalah 2 untuk setiap $j = 1$ dan $n + j$ untuk setiap $2 \leq j \leq m$.

Diberikan MST dari graf *lollipop* untuk $n = 3$, sehingga urutan pemberian nomor *vertex* dari eksentrisitas *vertex* u_i, $\lambda\,(u_i)$ adalah 1 untuk i dan 3 untuk $i = 2$ serta 4 untuk $i = 3$. Demikian juga untuk $\lambda(v_j)$ adalah 3 untuk setiap $j = 1$ dan $n + j$ untuk $j = 2, 3, \dots, m$.

Pengambilan *vertex awal* u_1 untuk $n = 4$ pada MST dari graf *lollipop*, sehingga urutan pemberian nomor *vertex* dari eksentrisitas *vertex* u_i, $\lambda(u_i)$ adalah i untuk $i = 1$ dan 3 untuk $i = 2$ serta $m + n$ untuk $i = 4$. Demikian juga $\lambda(v_i)$ adalah 2 untuk setiap $j = 1$ dan $n + j - 1$ untuk $j = 2, 3, \dots, m$. □

Teorema 3.4. *Jika* $L'_{m,n}$ *merupakan bentuk MST dari graf lollipop dengan n ganjil untuk* $n \geq 5$*, maka penomoran setiap vertex dalam* $L'_{m,n}$ *mengikuti rumus,*

$$\lambda(u_i) = \begin{cases} 1, & i = \dfrac{n-1}{2} \\ \left(i - \left(\dfrac{n+1}{2} - 1\right)\right)2 + 1, & i = \left(\dfrac{n-1}{2} + 1\right), \left(\dfrac{n-1}{2} + 2\right), \dots, n-2 \\ \left(\dfrac{n-1}{2} - i\right)2, & i = \left(\dfrac{n-1}{2} - 1\right), \left(\dfrac{n-1}{2} + 2\right), \dots, 1 \\ n, & i = n - 1 \\ m + n, & i = n, \end{cases}$$

$$\lambda\,(v_j) = \begin{cases} n - 1, & j = 1 \\ n - 1 + j, & j = 2, 3, \dots, m. \end{cases}$$

Bukti. Diberikan MST dari graf *lollipop* dengan *n ganjil* untuk $n \geq 5$, Sehingga urutan pemberian nomor *vertex* dari eksentrisitas *vertex* u_i, $\lambda(u_i)$ adalah 1 untuk

$i=\frac{n+1}{2}$ dan $\left(i-\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\right)2+1$ untuk $i=\left(\frac{n+1}{2}+1\right),\left(\frac{n+1}{2}+2\right),\dots,n-2$ serta $\left(\frac{n-1}{2}-i\right)2$ untuk $\left(\frac{n-1}{2}-1\right),\left(\frac{n-1}{2}+2\right),\dots,1$ dan n untuk $i=n-1$ dan $m+n$ untuk $i=n$. Demkian juga $\lambda(v_j)$ adalah n untuk $j=1$ dan $n-1+j$ untuk $j=2,3,\dots,m$. □

Teorema 3.5. *Jika $L'_{m,n}$ merupakan bentuk MST dari graf lollipop dengan n genap untuk $n\geq 6$, maka penomoran setiap vertex dalam $L'_{m,n}$ mengikuti rumus,*

$$\lambda(u_i)=\begin{cases}1, & i=\frac{n}{2}-1\\ \left(i-\left(\frac{n}{2}-1\right)\right)2, & i=\left(\frac{n}{2}-1\right)+1,\left(\frac{n}{2}-1\right)+2,\dots,n-2\\ \left(\left(\frac{n}{2}-1\right)-i\right)2+1, & i=\left(\frac{n}{2}-1\right)-1,\left(\frac{n}{2}-1\right)-2,\dots,1\\ n & i=n-1\\ m+n, & i=n,\end{cases}$$

$$\lambda(v_j)=\begin{cases}n-1, & j=1\\ n-1+j & j=2,3,\dots,m.\end{cases}$$

Bukti. Pengambilan *vertex awal* u_1 untuk $n=4$ pada graf *lollipop* dengan n genap untuk $n\geq 6$, sehingga urutan pemberian nomor *vertex* dari eksentrisitas *vertex* u_i, $\lambda(u_i)$ adalah 1 untuk $i=\frac{n}{2}-1$ dan $\left(i-\left(\frac{n}{2}-1\right)2\right)$ untuk $i=\left(\frac{n}{2}-1\right)+1,\left(\frac{n}{2}-1\right)+2,\dots,n-2$ serta $\left(\left(\frac{n}{2}-1\right)-i\right)2)+1$ untuk $i=\left(\frac{n}{2}-1\right)-1,\left(\frac{n}{2}-1\right)-2,\dots,1$ lalu n untuk $i=n-1$ dan $m+n$ untuk $i=n$, serta $\lambda(v_i)$ adalah $(n-1)$ untuk $j=1$ dan $n+1$ untuk $j=2,3,\dots,m$. □

4 Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Pemberian nomor *vertex* pada topologi jaringan dari graf *Wheel* W'_n bisa dilakukan dengan pengambilan *vertex* awal dari semua titik *vertex* sembarang, sehingga memperoleh penomoran yang dirumuskan pada Teorema 3.1.
2. Pemberian nomor *vertex* pada topologi jaringan dari graf *Helm* H'_n untuk pengambilan *vertex* awal u sehingga memperoleh penomoran yang dirumuskan pada Teorema 3.2.

3. Pemberian nomor *vertex* pada topologi jaringan dari graf *Lollipop* $L'_{m,n}$ untuk pengambilan *vertex* awal u_1, sehingga memperoleh penomoran dengan $n = 1, 2, 3, 4$ seperti pada Teorema 3.3, sedangkan untuk n ganjil dengan $n \geq 5$ seperti pada Teorema 3.4, serta untuk n genap dengan $n \geq 6$ seperti pada Teorema 3.5.

Daftar Pustaka

[1] Chartrand, G. and O.R. Oellermann, *Applied and Algorithmic Graph Theory*, McGraw-Hill Inc., New York, 1993.

[2] Kamalesh, V. N. and S. K. Srivatsa, *Node numbering in topological structure of interconnection network*. Indian Journal of Science and Technology, India (Nov 2009). Vol. 2 No.11, pp: 37-40.

[3] Kamalesh, V. N. and S. K. Srivatsa, *On the design of minimum cost survivable network topologies*. 15th Natl. Conf. on Commun, IIT Guwahati, India (2009), 16- 18th Jan, pp: 394-397.

[4]Kamalesh, V. N. And S. K. Srivatsa, *Topological Design of Minimum CostSurvivable Computer Communication Networks: Bipartite Graph Method.* International Journal of Computer Science and Information Security (IJCSIS), India (2009) . Vol. 3 No.1.

[5] Wallis, W. D., *Magic Graphs*, Birkhauser, Boston, 2001.

[6] Weisstein, E. W., *Lollipop Graph*. MathWorld--A Wolfarm Web Resource. http: //mathworld.wolfarm.com/LollipopGraph.html, 2011.