MODEL PERSEDIAAN TERINTEGRASI PRODUSEN DAN DISTRIBUTOR DENGAN INVESTASI UNTUK MENGURANGI BIAYA PERSIAPAN, PENINGKATAN KUALITAS PROSES PRODUKSI, DAN POTONGAN HARGA UNTUK *BACKORDER*

Anadiora Eka Putri, Nughthoh Arfawi Kurdhi, dan Mania Roswitha
Program Studi Matematika FMIPA UNS

Abstrak. Manajemen persediaan yang baik diperoleh dari integrasi antara produsen dan distributor. Model persediaan terintegrasi ini mempertimbangkan investasi untuk mengurangi biaya persiapan, peningkatan kualitas proses produksi, dan potongan harga untuk *backorder*. Permintaan selama waktu tunggu berdistribusi normal dan waktu tunggu dapat dipersingkat dengan *crashing cost*. Pengurangan waktu tunggu berbanding lurus dengan menurunnya biaya pemesanan. Tujuan penelitian ini adalah menurunkan model persediaan terintegrasi produsen dan distributor, menentukan penyelesaian optimal dari model persediaan, dan menerapkannya. Hasil dari penelitian ini adalah model persediaan terintegrasi produsen dan distributor serta penyelesaian optimalnya. Pada penerapan dengan parameter-parameter yang telah diketahui, diperoleh total biaya persediaan terintegrasi produsen dan distributor per tahun sebesar \$8297.25.

Kata Kunci: *model persediaan terintegrasi, investasi biaya persiapan, peningkatan kualitas proses produksi, potongan harga untuk backorder*

1. Pendahuluan

Persediaan barang merupakan hal yang penting dalam suatu perusahaan. Pada awalnya, masalah persediaan barang diatur secara terpisah antara produsen dan distributor. Namun beberapa tahun terakhir, sistem manajemen persediaan mempertimbangkan integrasi produsen dan distributor. Goyal [1] pertama kali mengembangkan model persediaan terintegrasi produsen dan distributor. Manajemen ini terbukti memberikan keuntungan untuk produsen dan distributor karena dapat meminimumkan biaya produsen dan distributor.

Pada model persediaan terintegrasi, dimungkinkan adanya waktu tunggu selama distributor melakukan pemesanan barang ke produsen. Menurut Winston [5], jika konsumen memesan barang dan permintaannya tidak dapat dipenuhi, maka terjadi kekurangan persediaan. Saat terjadi kekurangan persediaan, sebagian konsumen bersedia menunggu kedatangan barang (kasus *backorder*) dan sebagian lainnya tidak bersedia menunggu (kasus *lostsales*). Suatu kasus dikatakan *partial backorder* apabila terdapat kasus *backorder* dan *lostsales*. Sarkar *et al.* [4] menyatakan bahwa apabila terjadi kekurangan persediaan, distributor dapat menawarkan potongan harga kepada konsumen agar konsumen bersedia untuk *backorder*.

Ouyang *et al.* [2] meneliti model persediaan terintegrasi dengan mempertimbangkan waktu tunggu, biaya kekurangan, dan *crashing cost*. Pada model Ouyang *et al.* [2], biaya persiapan sudah ditetapkan dan tidak dijadikan sebagai variabel keputusan. Sarkar dan Majumder [3] mengembangkan model Ouyang *et al.* [2] dengan menambahkan investasi untuk mengurangi biaya persiapan tetapi mengasumsikan semua konsumen bersedia menerima keterlambatan kedatangan barang.

Menurut Sarkar *et al.* [4], barang cacat (*non-conforming item*) dapat diproduksi karena proses produksi tidak sempurna (*out-of-control*). Hal ini disebabkan oleh daya kerja mesin yang tidak maksimal atau sedang mengalami kerusakan ataupun bahan baku yang tidak baik. Setelah produsen memproduksi sejumlah barang selanjutnya akan dilakukan pemeriksaan. Apabila terdapat barang cacat, produsen akan memproduksi kembali (*rework*) untuk mengganti barang cacat. Saat terjadinya produksi barang cacat, biaya produksi akan semakin besar. Oleh karena itu, untuk sistem proses produksi yang tidak sempurna, produsen dapat mempertimbangkan investasi modal pada peningkatan kualitas proses produksi. Model persediaan Sarkar *et al.* [4] mempertimbangkan adanya investasi untuk meningkatkan kualitas proses produksi, potongan harga untuk *backorder*, dan kasus *partial backorder* tetapi bukan merupakan model persediaan terintegrasi.

Penelitian ini mengembangkan model persediaan terintegrasi produsen dan distributor dengan investasi untuk mengurangi biaya persiapan yang mengacu pada Sarkar dan Majumder [3] serta peningkatan kuliatas proses produksi dan potongan harga untuk *backorder* yang mengacu pada Sarkar *et al.* [4]. Selanjutnya menentukan penyelesaian optimal untuk meminimumkan total biaya persediaan berdasarkan model yang diperoleh.

2. Asumsi

Berikut adalah asumsi dalam pembentukan model persediaan.

(1) Hanya ada satu produsen, satu distributor, dan satu jenis barang.

(2) Waktu tunggu (L) diketahui dan mempunyai m komponen yang saling independen. Setiap komponen ke-i mempunyai durasi minimum a_i, durasi normal b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ dengan *crashing cost* per unit waktu c_i, $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_m$. Diberikan L_i sebagai lama waktu tunggu yang telah diperpendek menggunakan *crashing cost* dengan $i = 1, 2, \ldots, m$. Nilai L_i dapat dinyatakan sebagai $L_i = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{j=1}^{i}(b_j - a_j)$ sehingga diperoleh nilai *crashing cost* per siklus untuk $L \in (L_i, L_{i-1})$ yaitu

$$C(L) = c_i(L_{i-1} - L) + \sum_{j=1}^{i-1}(b_j - a_j).$$

(3) Distributor melakukan pemesanan kembali ketika persediaan mencapai titik pemesanan kembali (r). Titik pemesanan kembali merupakan penjumlahan dari ekspektasi permintaan selama waktu tunggu (DL) dan persediaan pengaman ($k\sigma\sqrt{L}$). Rata-rata permintaan konsumen per tahun adalah D dan k merupakan faktor pengaman sehingga $r = DL + k\sigma\sqrt{L}$.

(4) Jumlah permintaan selama waktu tunggu (x) berdistribusi normal dengan rata-rata DL dan standar deviasi $\sigma\sqrt{L}$.
(5) Rasio permintaan tertunda (β) dianggap sebagai variabel dan merupakan proporsi potongan harga (π_x) yang ditawarkan oleh distributor per unit. Nilai β dinyatakan dalam $\beta = \frac{\beta_0 \pi_x}{\pi_0}$ dengan β_0 adalah batas atas rasio permintaan tertunda dan π_0 adalah keuntungan per unit, untuk $0 \leq \beta_0 \leq 1, 0 \leq \pi_x \leq \pi_0$.
(6) Ketika produsen memproduksi dalam jumlah yang besar, proses produksi dapat di luar kontrol dengan probabilitas θ.
(7) Investasi produsen $I(\theta)$ diperlukan untuk mengurangi proses produksi yang di luar kontrol dengan $I(\theta) = b\ln(\theta_0/\theta)$, untuk $0 < \theta \leq \theta_0$ dengan $b = 1/\delta_1$ dan δ_1 adalah laju pengurangan probabilitas proses produksi di luar kontrol.
(8) Investasi untuk mengurangi biaya persiapan $I(B)$ dapat dituliskan sebagai $I(B) = f\ln(B_0/B)$ untuk $0 < B \leq B_0$ dengan $f = 1/\delta_2$ dan δ_2 adalah laju pengurangan biaya persiapan.
(9) Pengurangan waktu tunggu berbanding lurus dengan menurunnya biaya pemesanan.

3. Penurunan Model

Pada bagian ini dijelaskan penurunan model persediaan, yaitu model persediaan produsen, model persediaan distributor, dan model persediaan terintegrasi produsen dan distributor. Rata-rata permintaan konsumen kepada distributor per tahun adalah D unit barang. Untuk memenuhi permintaan tersebut distributor memesan barang kepada produsen sebanyak Q unit barang dengan panjang siklus pemesanan adalah Q/D sehingga frekuensi pemesanan per tahunnya sebesar D/Q. Produsen memproduksi sebanyak nQ unit barang dan mengirimkan Q unit barang kepada distributor dalam n kali pengiriman. Panjang siklus produksi adalah nQ/D sehingga banyak siklus produksi per tahunnya sebesar D/nQ.

3.1. **Model Persediaan Produsen.** Produsen memiliki tingkat produksi sebesar P per tahun dengan $P > D$ dan mengeluarkan biaya persiapan sebesar B. Persentase biaya penyimpanan produsen per tahun sebesar r_v dari biaya produksi per unit barang sebesar C_v. Proses produksi yang di luar kontrol dan biaya persiapan dapat dikurangi menggunakan investasi dengan biaya investasi berturut-turut $\alpha I(\theta)$ dan $\alpha I(B)$ dengan α adalah persentase biaya tahunan investasi terhadap modal. Untuk mengganti barang cacat yang diproduksi, produsen dikenakan biaya sebesar s per unit barang. Total biaya persediaan produsen per tahun adalah jumlah dari biaya persiapan, biaya penyimpanan, biaya investasi, dan biaya barang cacat.

3.2. **Model Persediaan Distributor.** Waktu tunggu dapat dikurangi dengan *crashing cost*. Hubungan interaksi antara waktu tunggu dan biaya pemesanan dapat dituliskan sebagai $\frac{A_0-A}{A_0} = \gamma \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$ yang berarti $A(L) = p + q\ln L$ dengan $p = A_0(1+\gamma\ln L_0)$, $q = -\gamma A_0$, dan $\gamma(<0)$ merupakan parameter yang menggambarkan hubungan antara persentase dari pengurangan waktu tunggu dan biaya pemesanan. Persentase biaya penyimpanan distributor per tahun sebesar r_b dari biaya pembelian per unit barang sebesar C_b $(C_b > C_v)$. Permintaan selama waktu tunggu berdistribusi normal. Ekspektasi jumlah permintaan karena kekurangan persediaan adalah $E(x-r) = \sigma\sqrt{L}\psi(k)$ dengan $\psi(k) = \phi(k) - k[1-\Phi(k)]$, ϕ dan Φ berturut-turut adalah fungsi densitas probabilitas (*probability density function*) dan fungsi distribusi komulatif (*cumulative distribution function*) normal standar. Ekspektasi jumlah *backorder* dan *lostsales* per siklus adalah $\beta\sigma\sqrt{L}\psi(k)$ dan $(1-\beta)\sigma\sqrt{L}\psi(k)$ dengan β adalah persentase jumlah permintaan yang mengalami *backorder*. Biaya kekurangan persediaan per siklus adalah $\pi_x\beta + \pi_0(1-\beta)\sigma\sqrt{L}\psi(k)$. Total biaya persediaan distributor per tahun adalah jumlah dari biaya pemesanan, biaya penyimpanan, biaya kekurangan persediaan, dan *crashing cost*.

3.3. **Model Persediaan Terintegrasi Produsen dan Distributor.** Total biaya persediaan terintegrasi produsen dan distributor per tahun/*Joint Annual Total Cost* $(JATC)$ adalah jumlah dari total biaya persediaan produsen per tahun/*Annual Total Cost for Vendor* (ATC_v) dan total biaya distributor per tahun/*Annual Total Cost for Buyer* (ATC_b). Permasalahan yang harus diselesaikan adalah meminimumkan $JATC(Q,k,\pi_x,B,\theta,n,L)$

$$\begin{aligned} = {} & \frac{BD}{nQ} + r_vC_v\frac{Q}{2}\left((n-1)+(2-n)\frac{D}{P}\right) + \alpha b\ln\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right) + \frac{snQD\theta}{2} \\ & +\alpha f\ln\left(\frac{B_0}{B}\right) + (p+q\ln L)\frac{D}{Q} + r_bC_b\left(\frac{Q}{2} + k\sigma\sqrt{L} + \left(1-\frac{\beta_0\pi x}{\pi_0}\right)\sigma\sqrt{L}\psi(k)\right) \\ & +\frac{D}{Q}\left(\frac{\beta_0\pi_x^2}{\pi_0} + \pi_0 - \beta_0\pi_x\right)\sigma\sqrt{L}\psi(k) + \frac{D}{Q}C(L), \end{aligned} \tag{3.1}$$

terhadap kendala $0 < \pi_x \le \pi_{x_0}$, $0 < B \le B_0$, dan $0 < \theta \le \theta_0$.

Untuk meminimumkan $JATC(Q,k,\pi_x,B,\theta,n,L)$, diperlukan penyelesaian optimal dari Q, k, π_x, B, θ, n, dan L.

4. Penyelesaian Optimal

Penyelesaian dapat ditentukan dengan mengabaikan kendala $0 < \pi_x \le \pi_{x_0}$, $0 < B \le B_0$, dan $0 < \theta \le \theta_0$ terlebih dahulu, kemudian menentukan penyelesaian optimal dari Q, k, π_x, B, θ, n, dan L terhadap $L \in [L_i, L_{i-1}]$ yang meminimumkan total biaya persediaan tahunan $JATC(Q,k,\pi_x,B,\theta,n,L)$. Jika (Q,k,π_x,B,θ,n) tetap, maka fungsi pada Persamaan (3.1) konkaf terhadap L pada interval $[L_i, L_{i-1}]$ karena $\frac{\partial^2 JATC(Q,k,\pi_x,B,\theta,n,L)}{\partial L^2} = -\frac{q}{L^2}\frac{D}{Q} - \frac{1}{4}r_bC_bk\sigma L^{-3/2} - \frac{1}{4}[r_bC_b(1-\frac{\beta_0\pi_x}{\pi_0}) + \frac{D}{Q}(\frac{\beta_0\pi_x^2}{\pi_0} + \pi_0 -$

$\beta_0\pi_x)]\sigma L^{-3/2}\psi(k) < 0$. Jadi untuk$(Q, k, \pi_x, B, \theta, n)$ tetap, $JATC(Q, k, \pi_x, B, \theta, n, L)$ akan minimum pada titik-titik ujung interval $L \in [L_i, L_{i-1}]$. Penyelesaian optimal dari L (L^*) diperoleh dengan membandingkan nilai-nilai total biaya persediaan untuk setiap L_i.

Penyelesaian optimal dari Persamaan (3.1) diperoleh dari turunan pertama terhadap Q, k, π_x, B, dan θ yang disamadengankan nol, yaitu

$$Q^* = \sqrt{\frac{\frac{B}{D} + (p + q\ln L)D + D(\frac{\beta_0\pi_x^2}{\pi_0} + \pi_0 - \beta_0\pi_x)\sigma\sqrt{L}\psi(k) + DC(L)}{\frac{r_v C_v}{2}((n-1) + (2-n)\frac{D}{P}) + \frac{snD\theta}{2} + \frac{r_b C_b}{2}}} \tag{4.1}$$

$$\psi(k^*) = 1 - \frac{Qr_bC_b}{Qr_bC_b(1 - \frac{\beta 0\pi_x}{\pi_0}) + D(\frac{\beta_0\pi_x^2}{\pi_0} + \pi_0 - \beta_0\pi_x)} \tag{4.2}$$

$$\pi_x^* = \frac{Qr_bC_b}{2D} + \frac{\pi_0}{2} \tag{4.3}$$

$$B^* = \frac{nQ\alpha f}{D} \tag{4.4}$$

$$\theta^* = \frac{2\alpha b}{snQD}, \tag{4.5}$$

dengan Q^*, k^*, π_x^*, B^*, dan θ^* merupakan banyak pesanan dari distributor, faktor pengaman, besar potongan harga untuk *backorder*, biaya persiapan, probabilitas proses produksi yang di luar kontrol yang optimal.

Untuk nilai n dan $L \in [L_i, L_{i-1}]$ tetap, titik $(Q^*, k^*, \pi_x^*, B^*, \theta^*)$ merupakan penyelesaian optimal dan memenuhi syarat cukup untuk meminimumkan fungsi pada Persamaan (3.1). Hal ini dapat ditunjukkan dengan semua nilai *principal minor determinant* dari matriks Hessian $JATC(Q, k, \pi_x, B, \theta, n, L)$ bernilai positif. Matriks Hessian dari $JATC(Q, k, \pi_x, B, \theta, n, L)$ adalah

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial Q^2} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial Q\partial \pi_x} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial Q\partial k} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial Q\partial \theta} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial Q\partial B} \\ \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial \pi_x\partial Q} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial \pi_x^2} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial \pi_x\partial k} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial \pi_x\partial \theta} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial \pi_x\partial B} \\ \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial k\partial Q} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial k\partial \pi_x} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial k^2} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial k\partial \theta} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial k\partial B} \\ \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial \theta\partial Q} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial \theta\partial pi_x} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial \theta\partial k} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial \theta\partial B} \\ \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial B\partial Q} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial B\partial pi_x} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial B\partial k} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial B\partial \theta} & \frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial B^2} \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

dengan $JATC(.) = JATC(Q, k, \pi_x, B, \theta, n, L)$.

Berdasarkan matriks Hessian (4.6) diperoleh tanda dari *principal minor determinant* pertama$(|H_{11}|)$, kedua$(|H_{22}|)$, ketiga$(|H_{33}|)$, dan keempat $(|H_{44}|)$ bernilai positif. Namun secara matematis, tanda dari *principal minor determinant* kelima $(|H_{55}|)$ sulit ditentukan, sehingga penyelesaian optimal Q^*, k^*, π_x^*, B^*, dan θ^* pada Persamaan (4.1) - (4.5) merupakan penyelesaian dari model persediaan pada Persamaan (3.1) jika $|H_{55}| > 0$.

Jika (Q, k, π_x, B, θ) ditetapkan, $JATC(Q, k, \pi_x, B, \theta, n, L)$ merupakan fungsi konveks terhadap variabel n karena $\frac{\partial^2 JATC(.)}{\partial n^2} = \frac{2BD}{n^3 Q} > 0$. Akan tetapi, nilai n harus bilangan bulat positif sehingga penyelesaian optimal dari n (n^*) dapat ditentukan ketika $JATC(n^*) \leq JATC(n^* - 1)$ dan $JATC(n^*) \leq JATC(n^* + 1)$.

Selanjutnya, terdapat tiga kendala $0 < \pi_x \leq \pi_{x_0}$, $0 < B \leq B_0$, dan $0 < \theta \leq \theta_0$. Berdasarkan Persamaan (4.3), (4.4), dan (4.5), nilai π_x^*, B^*, dan θ^* positif ketika nilai α, b, f, s, Q, D, π_0, dan n semua bernilai positif. Jika $\pi_x^* > \pi_0$, $B^* > B_0$, dan $\theta^* > \theta_0$, maka tidak terdapat potongan harga yang diberikan oleh distributor, tidak ada investasi untuk meningkatkan kualitas proses produksi, dan tidak ada investasi untuk mengurangi biaya persiapan. Oleh karena itu, ditetapkan nilai awal $\pi_x^* = \pi_0$, $B^* = B_0$, $\theta^* = \theta_0$. Berikut algoritme untuk memperoleh penyelesaian optimal dari Q, k, π_x, B, θ, n, dan L.

Algoritme 4.1

(1) Menetapkan $n = 1$.

(2) Untuk setiap L_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, melakukan langkah (a) sampai (f).

  (a) Menetapkan nilai awal $\pi_{x_{i1}} = \pi_0$, $B_{i1} = B_0$, $\theta_{i1} = \theta_0$, dan $k_{i1} = 0$ (dengan $\psi(k_{i1}) = 0.39894$).

  (b) Substitusi $\pi_{x_{i1}}$, B_{i1}, θ_{i1}, dan $\psi(k_{i1})$ ke Persamaan (4.1) diperoleh Q_{i1}.

  (c) Menggunakan nilai Q_{i1} untuk menentukan nilai $\psi(k_{i2})$.

  (d) Memeriksa nilai $\psi(k_{i2})$ dari tabel normal standar sehingga diperoleh nilai k_{i2}.

  (e) Menentukan nilai $\pi_{x_{i2}}$, B_{i2}, dan θ_{i2} menggunakan Persamaan (4.3), (4.4), dan (4.5).

  (f) Ulangi langkah (b) - (d) hingga nilai Q_i, k_i, π_{x_i}, B_i, dan θ_i konvergen. Notasikan dengan $(\hat{Q}_i, \hat{k}_i, \hat{\pi}_{x_i}, \hat{B}_i, \hat{\theta}_i)$.

(3) Bandingkan $\hat{\pi}_{x_i}$ dan π_0, $\hat{B}_i$ dan B_0, serta $\hat{\theta}_i$ dan θ_0.

  (a) Jika $\hat{\pi}_{x_i} < \pi_0$, $\hat{B}_i < B_0$, dan $\hat{\theta}_i < \theta_0$, maka penyelesaian pada langkah (2) adalah penyelesaian optimal untuk nilai L_i yang diberikan. Diperoleh penyelesaian optimal $(Q_i^*, k_i^*, \pi_{x_i}^*, B_i^*, \theta_i^*)$, lanjut ke langkah (5).

  (b) Jika $\hat{\pi}_{x_i} \geq \pi_0$, $\hat{B}_i < B_0$, dan $\hat{\theta}_i \geq \theta_0$, maka kembali ke langkah (2) dengan $\pi_{x_i}^* = \pi_0$ dan $\theta_i^* = \theta_0$ dan menentukan $(\hat{Q}_i, \hat{k}_i, \hat{B}_i)$ baru. Jika $\hat{B}_i < B_0$, maka diperoleh penyelesaian optimal $(Q^*, k^*, \pi_x^*, B^*, \theta^*) = (\hat{Q}_i, \hat{k}_i, \pi_0, \hat{B}_i, \theta_0)$, kemudian ke langkah (5), jika tidak ke langkah (4).

  (c) Jika $\hat{\pi}_{x_i} < \pi_0$, $\hat{B}_i \geq B_0$, dan $\hat{\theta}_i \geq \theta_0$, maka kembali ke langkah (2) dengan $B_i^* = B_0$ dan $\theta_i^* = \theta_0$ dan menentukan $(\hat{Q}_i, \hat{k}_i, \hat{\pi}_{x_i})$ baru. Jika $\hat{\pi}_{x_i} < \pi_0$ maka diperoleh penyelesaian optimal $(Q^*, k^*, \pi_x^*, B^*, \theta^*) = (\hat{Q}_i, \hat{k}_i, \hat{\pi}_{x_i}, B_0, \theta_0)$, kemudian ke langkah (5), jika tidak ke langkah (4).

  (d) Jika $\hat{\pi}_{x_i} \geq \pi_0$, $\hat{B}_i \geq B_0$, dan $\hat{\theta}_i < \theta_0$, maka kembali ke langkah (2) dengan $\pi_{x_i}^* = \pi_0$ dan $B_i^* = B_0$ dan menentukan $(\hat{Q}_i, \hat{k}_i, \hat{\theta}_i)$ baru. Jika $\hat{\theta}_i < \theta_0$ maka diperoleh penyelesaian optimal $(Q^*, k^*, \pi_x^*, B^*, \theta^*) = (\hat{Q}_i, \hat{k}_i, \pi_0, B_0, \hat{\theta}_i)$, kemudian ke langkah (5), jika tidak ke langkah (4).

(e) Jika $\hat{\pi}_{x_i} < \pi_0$, $\hat{B}_i < B_0$, dan $\hat{\theta}_i \geq \theta_0$, maka kembali ke langkah (2) dengan $\theta_i^* = \theta_0$ dan menentukan $(\hat{Q}_i, \hat{k}_i, \hat{\pi}_{x_i}, \hat{B}_i)$ baru. Jika $\hat{\pi}_{x_i} < \pi_0$ dan $\hat{B}_i < B_0$ maka diperoleh penyelesaian optimal $(Q^*, k^*, \pi_x^*, B^*, \theta^*) = (\hat{Q}_i, \hat{k}_i, \hat{\pi}_{x_i}, \hat{B}_i, \theta_0)$, kemudian ke langkah (5), jika tidak ke langkah (4).

(f) Jika $\hat{\pi}_{x_i} \geq \pi_0$, $\hat{B}_i < B_0$, dan $\hat{\theta}_i < \theta_0$, maka kembali ke langkah (2) dengan $\pi_{x_i}^* = \pi_0$ dan menentukan $(\hat{Q}_i, \hat{k}_i, \hat{B}_i, \hat{\theta}_i)$ baru. Jika $\hat{B}_i < B_0$ dan $\hat{\theta}_i < \theta_0$, maka diperoleh penyelesaian optimal $(Q^*, k^*, \pi_x^*, B^*, \theta^*) = (\hat{Q}_i, \hat{k}_i, \pi_0, \hat{B}_i, \hat{\theta}_i)$, kemudian ke langkah (5), jika tidak ke langkah (4).

(g) Jika $\hat{\pi}_{x_i} < \pi_0$, $\hat{B}_i \geq B_0$, dan $\hat{\theta}_i < \theta_0$, maka kembali ke langkah (2) dengan $B_i^* = B_0$ dan menentukan $(\hat{Q}_i, \hat{k}_i, \hat{\pi}_{x_i}, \hat{\theta}_i)$ baru. Jika $\hat{\pi}_{x_i} < \pi_0$ dan $\hat{\theta}_i < \theta_0$, maka diperoleh penyelesaian optimal $(Q^*, k^*, \pi_x^*, B^*, \theta^*) = (\hat{Q}_i, \hat{k}_i, \hat{\pi}_{x_i}, B_0, \hat{\theta}_i)$, kemudian ke langkah (5), jika tidak ke langkah (4).

(h) Jika $\hat{\pi}_{x_i} \geq \pi_0$, $\hat{B}_i \geq B_0$, dan $\hat{\theta}_i \geq \theta_0$, maka ke langkah (4).

(4) Untuk setiap L_i, $\pi_{x_i}^* = \pi_0$, $B_i^* = B_0$, dan $\theta_i^* = \theta_0$, disubstitusi pada Persamaan (4.1) dan (4.2) untuk menentukan penyelesaian optimal (Q_i^*, k_i^*) dengan prosedur yang sama dengan langkah 2.

(5) Menghitung $JATC(Q_i^*, k_i^*, \pi_{x_i}^*, B_i^*, \theta_i^*, L_i, n)$ menggunakan Persamaan (3.1).

(6) Mencari nilai $JATC(Q_s^*, k_s^*, \pi_{x_s}^*, B_s^*, \theta_s^*, L_s^*, n) = \min_{i=0,1,\ldots,n} JATC(Q_i^*, k_i^*, \pi_{x_i}^*, B_i^*, \theta_i^*, L_i^*, n)$ sehingga $JATC(Q_s^*, k_s^*, \pi_{x_s}^*, B_s^*, \theta_s^*, L_s^*, n)$ merupakan solusi optimal untuk nilai n.

(7) Menetapkan $n = n+1$. Jika $JATC(Q_n^*, k_n^*, \pi_{x_n}^*, B_n^*, \theta_n^*, L_n^*, n) \leq JATC(Q_{n-1}^*, k_{n-1}^*, \pi_{x_{n-1}}^*, B_{n-1}^*, \theta_{n-1}^*, L_{n-1}^*, n-1)$, maka ulangi langkah (2) - (6), jika tidak ke langkah (8).

(8) Menetapkan $JATC(Q^*, k^*, \pi_x^*, B^*, \theta^*, L^*, n^*) = JATC(Q_{s-1}^*, k_{s-1}^*, \pi_{x_{s-1}}^*, B_{s-1}^*, \theta_{s-1}^*, L_{s-1}^*, s-1)$ sehingga $(Q^*, k^*, \pi_x^*, B^*, \theta^*, L^*, n^*)$ adalah penyelesaian optimal. Titik pemesanan kembali diperoleh sebagai $r^* = DL^* + k^*\sigma\sqrt{L^*}$.

5. Penerapan

Penerapan model persediaan menggunakan nilai parameter yang diperoleh dari Sarkar dan Majumder [3] dipadukan dengan Sarkar *et al.* [4], yaitu $D = 600$ unit, $A_0 = \$200$, $C_v = \$100$, $C_b = \$125$, $r_v = 0.2$, $r_b = 0.2$, $\pi_0 = \$150$, $\sigma = 7$ unit, $\theta_0 = 0.0002$, $s = 75$, $\alpha = 0.1$, $b = 400$, $B_0 = 1500$, $f = 18000$, $P = 2000$, $\gamma = -0.8$, $\beta_0 = 0.95$. Data waktu tunggu dengan tiga komponen dan *crashing cost* diambil dari Sarkar dan Majumder [3] dan ditunjukkan pada Tabel 1 sehingga diperoleh $L = 8, 6, 4, 3$ dengan $C(L)$ berturut-turut $0, 5.6, 22.4, 57.4$.

Berdasarkan fungsi total biaya persediaan yang diberikan pada Persamaan (3.1) dan dengan menerapkan algoritme 4.1 diperoleh penyelesaian optimal yang ditunjukkan pada Tabel 2. Dari Tabel 2 dapat dilihat bahwa penyelesaian optimal

Tabel 1. Data waktu tunggu dan *crashing cost*

Waktu tunggu komponen i	Durasi normal b_i (hari)	Durasi minimum a_i (hari)	*crashing cost* c_i (\$/hari)
1	20	6	0.4
2	20	6	1.2
3	16	9	5.0

dari total biaya persediaan terintegrasi produsen dan distributor per tahun ($JATC$) sebesar \$8297.25 dengan $n^* = 4$, $L^* = 3$, $Q^* = 91.38$, $k^* = 2.06$, $B^* = 657.93$, $\theta^* = 2.92 \times 10^{-6}$, $\pi_x^* = 76.14$, dan $|H_{55}| = 1.35 \times 10^{12} > 0$.

Tabel 2. Hasil $JATC(Q, k, \pi_x, B, \theta, n, L)$ optimal

n	L	Q	k	π_x	B	θ	$JATC(\cdot)$
1	3	146.43	1.86	76.83	263.581	7.28×10^{-6}	9033.14
2	3	120.38	1.94	76.50	433.354	4.43×10^{-6}	8475.03
3	3	103.4	2.01	76.29	558.36	3.44×10^{-6}	8318.18
4	3	91.38	2.06	76.14	657.93	2.92×10^{-6}	8297.25
5	3	82.37	2.1	76.03	741.32	2.59×10^{-6}	8337.89

6. Kesimpulan

(1) Model persediaan terintegrasi $JATC(Q, k, \pi_x, B, \theta, n, L)$ dinyatakan pada Persamaan (3.1).

(2) Penyelesaian optimal berdasarkan model persediaan terintegrasi adalah (Q^*, $k^*, \pi_x^*, B^*, \theta^*$) yaitu pada Persamaan (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), dan (4.5).

(3) Pada penerapan dengan parameter-parameter yang telah ditentukan, diperoleh total biaya persediaan terintegrasi produsen dan distributor per tahun ($JATC$) sebesar \$8297.25 dengan $n^* = 4$, $L^* = 3$, $Q^* = 91.38$, $k^* = 2.06$, $B^* = 657.93$, $\theta^* = 2.92 \times 10^{-6}$, $\pi_x^* = 76.14$, dan $|H_{55}| = 1.35 \times 10^{12} > 0$.

Daftar Pustaka

1. Goyal, S.K., *An Integrated Inventory Model for a Single Supplier-Single Customer Problem*, International Journal of Production Research **15** (1976), 107–111.
2. Ouyang, L.Y., K.S. Wu, and C.H. Ho, *Integrated Vendor-Buyer Cooperative Models with Stochastic Demand in Controllable Lead Time*, Int. J. Production Economics **92** (2004), 255–266.
3. Sarkar, B. and A. Majumder, *Integrated Vendor-Buyer Supply Chain Model with Vendor's Setup Cost Reduction*, Applied Mathematics and Computation **224** (2013), 362–371.
4. Sarkar, B., B. Mandal, and S. Sarkar, *Quality Improvement and Backorder Price Discount Under Controllable Lead Time in an Inventory Model*, Journal of Manufacturing System **35** (2015), 26–36.
5. Winston, W.L., *Operation Research: Applications and Algorithm*, third ed., Wadsworth, Inc., California, 2003.