

PROSES PERCABANGAN PADA POLA PENYEBARAN PENYAKIT

Sofiin, Respatiwan, Supriyadi Wibowo

Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Sebelas Maret

ABSTRAK: Suatu penyakit bersifat epidemi jika banyaknya orang yang terjangkit dalam suatu populasi bertambah besar, seiring bertambahnya waktu dengan laju yang tinggi. Salah satu cara penyebaran penyakit dalam suatu populasi adalah melalui kontak langsung antara individu yang terinfeksi penyakit dengan individu yang rentan terhadap penyakit. Individu yang terinfeksi penyakit dapat menginfeksi individu yang rentan terhadap penyakit sehingga jumlah individu yang terinfeksi penyakit bertambah banyak pada periode berikutnya. Banyaknya individu rentan yang terinfeksi penyakit pada suatu periode adalah i . Proses percabangan pada pola penyebaran penyakit adalah proses penyebaran penyakit dimana individu yang terinfeksi penyakit bertambah banyak pada setiap periode. Probabilitas berakhirnya epidemi pada proses percabangan diperoleh dari $u_n = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (u_{n-1})^k$. Penerapan proses percabangan pada penyebaran penyakit dengan menggunakan $p_0 = 0.5$ dan $p_2 = 0.5$ diperoleh probabilitas berakhirnya epidemi pada periode ke-194 adalah $u_{194} = 0.990003$ dan dapat dikatakan epidemi pada periode tersebut berakhir.

Kata Kunci: *epidemi, proses percabangan, probabilitas berakhirnya epidemi*

1. PENDAHULUAN

Setiap orang wajib menjaga kesehatannya, namun terkadang manusia lalai dan terkena penyakit. Salah satu faktor yang dapat menyebabkan timbulnya penyakit adalah perubahan cuaca, pola hidup serta kondisi lingkungan yang kurang sehat dalam suatu populasi. Penyakit dapat dibedakan menjadi dua yaitu penyakit menular dan penyakit tidak menular. Contoh penyakit menular diantaranya cacar air, influenza, demam berdarah, SARS, HIV (Isham [4]). Penyebaran penyakit menular dapat melalui kontak langsung dengan penderita penyakit, udara dan hewan.

Menurut Graves [2], suatu penyakit bersifat epidemi jika banyaknya orang yang terjangkit dalam suatu populasi bertambah besar, seiring bertambahnya waktu dengan laju yang tinggi. Epidemi tidak hanya dapat menimbulkan tingginya angka kematian tetapi juga mengakibatkan kerugian finansial berupa biaya pengobatan dan perawatan. Jenis penyakit yang berpotensi dapat mengakibatkan terjadinya epidemi yaitu penyakit menular. Oleh karena itu, perlu

dilakukan upaya pengendalian terhadap penyebaran penyakit yaitu dengan mempelajari sifat penyebarannya.

Menurut Parzen [5], banyaknya individu yang terinfeksi dan yang sembuh pada suatu epidemi tidak dapat diprediksi dengan pasti. Hal tersebut menunjukkan bahwa penyebaran epidemi merupakan suatu kejadian random sehingga dapat dipandang sebagai proses stokastik. Selain itu, banyaknya individu yang terinfeksi pada periode ke- n (I_n) hanya dipengaruhi oleh jumlah individu yang terinfeksi pada periode ke- $n-1$ (I_{n-1}). Proses kejadian tersebut menunjukkan bahwa penyebaran epidemi merupakan suatu kejadian khusus dari proses stokastik yaitu proses Markov. Suatu proses Markov yang mempunyai ruang state diskrit disebut rantai Markov.

Penyebaran penyakit yang bersifat epidemi dikatakan mencapai puncak epidemi ketika banyaknya individu yang terinfeksi mencapai maksimum. Penyebaran penyakit paling bahaya adalah saat terjadinya puncak epidemi, sehingga perlu suatu tindakan pencegahan sebelum terjadinya puncak epidemi. Penyebaran penyakit dikatakan berakhir jika tidak ada individu yang terinfeksi atau dapat dikatakan bahwa banyaknya individu yang terinfeksi sama dengan nol. Pada penelitian ini penulis menentukan pola penyebaran penyakit dengan proses percabangan dan menerapkannya dalam contoh kasus.

2. PROSES PERCABANGAN

2.1 Proses Percabangan. Menurut Taylor dan Karlin [6], proses percabangan adalah proses dari $\{X_0\}$ menuju $\{X_n\}$, dengan X_i adalah ukuran populasi pada generasi ke- i . Proses ini merupakan struktur khusus dari rantai Markov. Misalkan sebuah organisme pada masa hidupnya menghasilkan keturunan untuk menjaga agar spesiesnya tidak punah dengan cara memperbanyak jumlah spesies dan jumlah keturunan yang dihasilkan dalam satu generasi (ξ) adalah random, dengan probabilitas sebagai

$$\Pr\{\xi = k\} = p_k \quad \text{untuk } k = 0, 1, 2, \dots$$

dengan $p_k \geq 0$ dan $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Diasumsikan setiap keturunan satu independen dengan keturunan yang lainnya dan jangka waktu hidup dari setiap individu adalah sama.

Sifat dari rantai Markov memberikan gambaran untuk menghitung populasi pada generasi ke- $(n + 1)$, yaitu

$$X_{n+1} = \xi_1^n + \xi_2^n + \dots + \xi_{I_n}^n$$

dengan ξ_i^n adalah semua keturunan yang mungkin dari individu ke- i pada generasi ke- n .

3. PENERAPAN DAN PEMBAHASAN

3.1 Pola Penyebaran Penyakit dengan Proses Percabangan. Salah satu cara penyebaran penyakit dalam suatu populasi adalah melalui kontak langsung antara individu yang terinfeksi penyakit dengan individu yang rentan terhadap penyakit. Kelompok individu yang terinfeksi penyakit (I) dapat menginfeksi kelompok individu yang rentan terhadap penyakit (S) dan banyaknya individu S yang terinfeksi penyakit dari individu I adalah sebanyak i , dengan probabilitas

$$\Pr\{i = k\} = p_k \text{ untuk } k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

dengan, $p_k \geq 0$ dan $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Asumsi yang digunakan dalam proses percabangan pola penyebaran penyakit adalah

- Jumlah individu awal yang terinfeksi penyakit $I_0 \geq 1$.
- Setiap individu yang terinfeksi penyakit pada satu periode saling independen antara satu dengan yang lainnya.
- Ukuran populasi pada periode ke- n hanya dihitung dari banyaknya individu yang terinfeksi pada saat periode ke- n saja.
- Jangka waktu (lamanya sakit) yang dibutuhkan setiap individu dari mulai sakit sampai sembuh adalah sama.
- Hanya terdapat satu penyakit yang menyebar dalam suatu populasi.

Diasumsikan bahwa semua individu *susceptible* yang terinfeksi penyakit saling independen satu sama lain dan setelah individu *susceptible* berubah menjadi individu *infected* mereka dapat menularkan penyakit ke individu *susceptible* lainnya, sehingga memperbanyak jumlah kelompok individu *infected*.

Dalam proses percabangan, untuk menghitung jumlah individu terinfeksi pada periode ke- n (I_n) tidak melibatkan jumlah individu terinfeksi pada periode ke- $(n-1)$ yang artinya bahwa I_{n-1} tidak dihitung. Proses percabangan pada pola penyebaran penyakit adalah proses penyebaran penyakit dimana individu terinfeksi penyakit (I) menginfeksi individu S sehingga jumlah individu terinfeksi bertambah banyak dari periode awal hingga periode ke- n . Proses ini merupakan struktur khusus dari rantai Markov.

Sifat Markov yaitu kejadian pada saat ke- n hanya dipengaruhi oleh kejadian ke- $(n-1)$ dapat menjadi pertimbangan sebagai berikut, pada periode ke- n ada sebanyak I_n individu *infected* yang dapat menginfeksi kelompok individu *susceptible* dan banyaknya individu yang terinfeksi penyakit dari periode ke- n adalah $i_1^{(n)}, i_2^{(n)}, \dots, i_{I_n}^{(n)}$. Dengan demikian, banyaknya individu *infected* pada periode ke- $(n+1)$ adalah

$$I_{n+1} = i_1^n + i_2^n + \dots + i_{I_n}^n \quad (1.2)$$

dengan i_i^n adalah semua individu yang mungkin dapat tertular penyakit dari individu *infected* i pada periode ke- n dan $i = 1, 2, \dots, I_n$.

3.2 Mean dan Variansi Proses Percabangan Penyebaran Penyakit. Persamaan (1.2) merupakan proses percabangan dengan jumlah individu yang terinfeksi dari individu *infected* adalah random. Misalkan $\mu = E[i]$ dan $\sigma^2 = Var[i]$ adalah mean dan variansi dari proses percabangan. Misalkan $M(I_n)$ dan $V(I_n)$ adalah mean dan variansi dari I_n dengan kondisi awal $I_0 = 1$ kemudian diterapkan dalam kejadian pada jumlahan random pada persamaan (1.2) menghasilkan

$$M(I_{n+1}) = \mu M(I_n) \quad (1.3)$$

dan

$$V(I_{n+1}) = \sigma^2 M(I_n) + \mu^2 V(I_n) \quad (1.4)$$

Dengan kondisi awal $I_0 = 1$ dimasukkan kedalam persamaan (1.3) dan (1.4) diperoleh $M(0) = 1$ dan $V(0) = 1$. Kemudian dari persamaan (1.3) diperoleh $M(1) = \mu \cdot 1 = \mu$, $M(2) = \mu \cdot M(1) = \mu^2$, dan secara umum

$$M(I_n) = \mu^n \quad \text{untuk } n = 0, 1, \dots \quad (1.5)$$

Jadi mean dari populasi individu *infected* akan bertambah secara geometris ketika $\mu > 1$, akan berkurang secara geometris ketika $\mu < 1$, dan akan konstan (tetap) ketika $\mu = 1$.

Selanjutnya, $M(I_n) = \mu^n$ disubstitusikan kedalam persamaan (1.4) dan diperoleh $V(I_{n+1}) = \sigma^2 M(I_n) + \mu^2 V(I_n)$. Dengan hanya memperhatikan $V(0) = 1$, diperoleh

$$V(1) = \sigma^2$$

$$V(2) = \sigma^2 \mu + \mu^2 V(1) = \sigma^2 \mu + \sigma^2 \mu^2$$

$$V(3) = \sigma^2 \mu + \mu^2 V(2) = \sigma^2 \mu^2 + \sigma^2 \mu^3 + \sigma^2 \mu^4.$$

Secara umum, berlaku

$$V(I_n) = \sigma^2 [\mu^{n-1} + \mu^n + \dots + \mu^{2n-2}] = \sigma^2 \mu^{n-1} [1 + \mu + \dots + \mu^{n-1}]$$

atau

$$V(I_n) = \sigma^2 \mu^{n-1} \times \begin{cases} n & \text{jika } \mu = 1, \\ \frac{1-\mu^n}{1-\mu} & \text{jika } \mu \neq 1. \end{cases}$$

Jadi, variansi dari populasi individu *infected* akan bertambah secara geometris jika $\mu > 1$, akan bertambah secara linier jika $\mu = 1$, dan akan berkurang secara geometris jika $\mu < 1$.

3.3 Probabilitas Berakhirnya Epidemi pada Proses Percabangan. Epidemi dikatakan berakhir ketika jumlah individu yang terinfeksi penyakit menjadi nol. Epidemi pada populasi individu yang terinfeksi penyakit I akan berakhir pada periode ke- n di mana $I_n = 0$ sehingga $I_k = 0$ untuk semua $k \geq N$. Didalam terminology rantai Markov, nol (0) adalah *state* yang terabsorpsi artinya semua individu yang terinfeksi penyakit $I(t)$ tidak dapat menginfeksi individu yang rentan terhadap penyakit $S(t)$. Misalkan

$$u_n = P_r\{N \leq n\} = P_r\{I_n = 0\}$$

adalah probabilitas berakhirnya epidemi pada periode ke- n , dimulai dengan individu awal yang terinfeksi penyakit $I_0 = 1$. Andaikan individu awal yang terinfeksi penyakit direpresentasikan dengan $I_0 = 1$ menginfeksi individu yang rentan terhadap penyakit sebanyak $i_1^{(0)} = k$ individu yang terinfeksi. Selanjutnya, setiap individu yang terinfeksi penyakit sebanyak k akan membangun populasi

dari individu yang terinfeksi penyakit dari k . Jika individu awal yang terinfeksi penyakit sembuh pada periode ke- n maka setiap individu yang mungkin terinfeksi penyakit dari k harus sembuh pada periode ke- $(n - 1)$.

Sebanyak k subpopulasi yang dibangun dari individu yang terinfeksi penyakit dari individu awal adalah independen dan memiliki sifat statistik yang sama sebagai individu awal yang terinfeksi penyakit. Oleh karena itu, probabilitas setiap anggota subpopulasi yang sembuh pada periode ke- $(n - 1)$ adalah u_{n-1} . Karena setiap subpopulasi saling independen maka probabilitas dari semua subpopulasi adalah

$$u_n = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (u_{n-1})^k, \quad n = 1, 2, \dots$$

dengan $u_0 = 0$ dan $u_1 = P_0$. Diasumsikan bahwa individu awal yang terinfeksi penyakit sudah pasti dapat menginfeksi penyakit oleh karena itu probabilitas berakhirnya epidemi pada periode awal adalah nol dan p_0 adalah probabilitas suatu periode tidak dapat menginfeksi penyakit.

3.4 Penerapan Probabilitas Berakhirnya Epidemi pada Proses Percabangan.

Dalam sebuah populasi terdapat suatu penyakit yang menyebar dalam populasi tersebut. Banyaknya individu awal yang terinfeksi penyakit adalah satu dan seiring bertambahnya waktu, jumlah individu yang terinfeksi penyakit bertambah banyak. Dari individu awal yang terinfeksi penyakit sebanyak satu dapat menginfeksi individu yang rentan sebanyak dua dan dari dua individu yang terinfeksi penyakit dapat menginfeksi individu yang rentan sebanyak empat dan seterusnya. Misalkan probabilitas bahwa individu yang terinfeksi penyakit dapat menginfeksi individu rentan sebanyak dua sebesar 0.5 ($p_2 = 0.5$) dan probabilitas individu yang terinfeksi penyakit tidak dapat menginfeksi individu rentan sebesar 0.5 ($p_0 = 0.5$). Dicari probabilitas berakhirnya epidemi pada setiap periode. Karena ini

$$u_n = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (u_{n-1})^k$$

dan dengan $u_0 = 0$, diperoleh

$$u_1 = p_0 (u_{1-1})^0 + p_1 (u_{1-1})^1$$

$$u_1 = p_0 (1) + p_1 (u_0)$$

$$u_1 = p_0 + p_1 (0)$$

$$u_1 = p_0 = 0.5.$$

Karena yang diketahui adalah p_0 dan p_2 , dianggap selain itu nilainya adalah nol.

Dengan demikian,

$$u_n = p_0(u_{n-1})^0 + p_1(u_{n-1})^1 + p_2(u_{n-1})^2 + \dots + p_n(u_{n-1})^n$$

$$u_n = p_0 \cdot 1 + 0 + p_2(u_{n-1})^2 + 0 + \dots + 0$$

$$u_n = p_0 + p_2(u_{n-1})^2.$$

Karena $p_0 = \frac{1}{2}$ dan $p_2 = \frac{1}{2}$ maka

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(u_{n-1})^2 = \frac{1+(u_{n-1})^2}{2}.$$

Epidemi dikatakan berakhir jika $u_n = 1$ artinya probabilitas setiap individu yang terinfeksi penyakit pada generasi ke- n tidak dapat menginfeksi individu yang rentan probabilitasnya adalah satu (pasti). Tabel 1 adalah probabilitas bahwa kelompok individu *infected* tidak dapat menginfeksi pada suatu periode

Tabel 1. Probabilitas kelompok individu *infected* tidak dapat menginfeksi pada 3 periode awal dan 3 periode akhir

n	$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(u_{n-1})^2$
0	0.000000
1	0.500000
2	0.625000
192	0.989902
193	0.989953
194	0.990003

Dari Tabel 1 baris terakhir tampak pada periode ke-194 probabilitas berakhirnya epidemi sebesar $0.990003 \approx 1$. Ini berarti banyaknya individu terinfeksi tidak dapat menginfeksi individu rentan, sehingga pada periode ke-194 epidemi dapat dikatakan berakhir.

4. KESIMPULAN

Dari penerapan dan pembahasan, diperoleh dua kesimpulan.

1. Banyaknya individu yang terinfeksi pada setiap periode dapat dirumuskan

$$I_{n+1} = i_1^n + i_2^n + \dots + i_n^n$$

dengan i_i^n adalah semua individu yang mungkin dapat tertular penyakit dari individu *infected i* pada periode ke- n .

2. Probabilitas berakhirnya epidemi pada proses percabangan dengan $p_0 = 0.5$ dan $p_2 = 0.5$ adalah

$$u_n = p_0 + p_2(u_{n-1})^2$$

Dari model tersebut diperoleh probabilitas berakhirnya epidemi sebesar 0.990003 pada periode ke- 194 . Dari hasil $u_{194} = 0.990003$ artinya banyaknya individu yang terinfeksi penyakit pada periode ke-194 tidak dapat menginfeksi individu yang rentan sehingga epidemi pada periode ke-194 dapat dikatakan berakhir.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Crump, K.S and Mode, C.J. 1968. *A General Age-Dependent Branching Process*, 24:494-508.
- [2] Graves, P.M, *Malaria Epidemic Forecasting and Preparedness Manual*, Ministry of Health, Asmara, Eritrea, 2003.
- [3] Heathcote, C.R. 1964. *A Branching Process Allowing Immigration*, 27:138-143.
- [4] Isham, V. *Stochastic Models for Epidemics*. 2004. Department of Statistical Science University College London.
- [5] Parzen, E., *Stochastic Processes*, Holden-Day, Inc, United States of America, 1962.
- [6] Taylor, H.M. and S. Karlin, *An Introduction to Stochastic Modeling*, 3 ed., Academic Press, United States of Amrica, 1994.