

PENERAPAN MODEL PERTUMBUHAN LOGISTIK DENGAN MEMPERHATIKAN LAJU INTRINSIK

Andrian Guntur Nugrahanto, Respatiwan dan Siswanto
Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Sebelas Maret

ABSTRAK: Perubahan jumlah populasi setiap waktu merupakan salah satu penanda terjadinya pertumbuhan. Pertumbuhan populasi dipengaruhi oleh jumlah kelahiran, kematian, emigrasi, dan imigrasi. Salah satu model matematika yang mengkaji pertumbuhan populasi adalah model pertumbuhan logistik. Model pertumbuhan logistik dibatasi oleh suatu ruang yang terbatas artinya pertumbuhan populasi bergantung pada kerapatan wilayahnya. Tujuan penelitian ini adalah mengonstruksi ulang model pertumbuhan logistik serta menyimulasikannya. Nilai laju intrinsik merupakan nilai yang diharapkan dapat menggambarkan daya tumbuh suatu populasi yang didapatkan dari laju kelahiran dikurangi laju kematian. Model pertumbuhan logistik diterapkan pada Kabupaten Klaten dengan laju intrinsik diperoleh dari data tahun 1984 sampai 2010. Dari pembahasan didapatkan jika semakin besar nilai laju intrinsik maka pertumbuhan populasi semakin cepat. Hal ini dapat dilihat dari hasil simulasi pada saat $t = 100$ dan $r = 0,008152866$ jumlah populasi Kabupaten Klaten adalah 1.502.740 jiwa sedangkan pada saat $t = 100$ dan $r = 0,00555521$ adalah 1.397.490 jiwa dan pada saat $t = 100$ dan $r = 0,002957554$ adalah 1.281.140 jiwa.

Kata Kunci: *model pertumbuhan logistik, laju intrinsik, laju kelahiran, laju kematian, kapasitas batas lingkungan*

1. PENDAHULUAN

Makhluk hidup mengalami perubahan dari waktu ke waktu, dimulai dari lahir, tumbuh, berkembang biak hingga mengalami kematian. Proses berkembang biak merupakan kemampuan dari suatu individu untuk melakukan reproduksi dalam rangka mempertahankan keturunannya. Menurut Tobing [6], populasi adalah sekelompok organisme yang mempunyai spesies sama serta hidup atau menempati kawasan tertentu pada waktu tertentu.

Suatu populasi dapat mengalami pertumbuhan dengan baik jika memiliki persediaan pangan yang cukup dan luas wilayah yang memadai. Perubahan jumlah populasi setiap waktu merupakan salah satu penanda terjadinya pertumbuhan populasi yang dipengaruhi oleh jumlah kelahiran, kematian, emigrasi, dan imigrasi.

commit to user

Beberapa model matematika yang mengkaji pertumbuhan populasi adalah model pertumbuhan eksponensial dan model pertumbuhan logistik. Model pertumbuhan eksponensial pertama kali dikemukakan oleh Thomas R. Malthus pada tahun 1766-1834. Menurut Gotelli [3], Thomas R. Malthus menjelaskan di dalam model pertumbuhan eksponensial didasarkan pada sumber daya dan wilayah yang tidak terbatas. Pierre Verhulst pada tahun 1838 mengembangkan model pertumbuhan eksponensial menjadi model pertumbuhan logistik karena didasarkan pada kenyataan bahwa pertumbuhan populasi bergantung pada kerapatan wilayahnya (kapasitas batas lingkungan). Model pertumbuhan logistik dicetuskan oleh Pierre Verhulst pada tahun 1838 sehingga model tersebut sering juga disebut model Verhulst (Muchyidin [5]).

Menurut Allen [1], pertumbuhan populasi pada model pertumbuhan logistik tidak hanya bergantung pada ukuran populasi tetapi juga efek dari “*carrying capacity*” atau kapasitas batas lingkungan yang akan membatasi pertumbuhan populasi. Pertumbuhan populasi di dalam model pertumbuhan logistik dipengaruhi oleh laju intrinsik yaitu nilai yang diharapkan dapat menggambarkan daya tumbuh suatu populasi. Laju intrinsik di dalam model pertumbuhan logistik tidak konstan namun bergantung pada laju kelahiran dan kematian pada setiap periode waktu. Semakin besar laju intrinsik, populasi akan tumbuh semakin cepat. Penelitian ini mengonstruksi ulang model pertumbuhan logistik dan menyimulasikan model tersebut serta menginterpretasikannya.

2. MODEL PERTUMBUHAN LOGISTIK

Model pertumbuhan logistik merupakan salah satu model yang digunakan untuk mengetahui perubahan jumlah populasi yang diturunkan terhadap waktu. Sehingga fenomena dari perubahan jumlah populasi dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial. Laju pertumbuhan intrinsik (r) dalam model pertumbuhan logistik digunakan untuk mengetahui daya tumbuh populasi dan kapasitas batas lingkungan atau *carrying capacity* (K) digunakan sebagai faktor penghambat pertumbuhan

commit to user

populasi. Daya tumbuh merupakan kemampuan maksimal populasi untuk tumbuh dalam periode waktu tertentu. Untuk menurunkan ulang model pertumbuhan logistik terdapat beberapa asumsi, yaitu

- a. tidak ada struktur genetik yang artinya bahwa semua individu dalam populasi tersebut memiliki tingkat kelahiran dan kematian yang sama, sehingga tidak ada variasi genetik yang memengaruhi kelahiran dan kematian,
- b. tidak ada waktu tunda, yang artinya bahwa individu lahir dan mati secara kontinu,
- c. laju intrinsik selalu bernilai positif, yang artinya populasi selalu tumbuh dan tidak ada penurunan jumlah populasi karena laju intrinsik yang bernilai negatif dan,
- d. kapasitas batas lingkungan (*carrying capacity*) konstan, artinya bahwa luasan kawasan pada daerah yang diteliti tidak akan pernah berubah (tidak ada penambahan dan pengurangan wilayah) sehingga kapasitas batas individu pada kawasan tersebut tidak berkurang dan tidak bertambah.

Menurut Gotelli [3], konstruksi model pertumbuhan logistik merupakan pengembangan dari model pertumbuhan eksponensial, yang dinyatakan

$$\frac{dN}{dt} = (b_i - d_i)N. \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) merupakan persamaan pertumbuhan eksponensial. Persamaan (2.1) menunjukkan bahwa pertumbuhan populasi selalu tumbuh dan belum dipengaruhi oleh suatu kapasitas batas lingkungan. Menurut Allen [1], pertumbuhan populasi pada model pertumbuhan logistik tidak hanya bergantung pada ukuran populasi tetapi juga efek dari kapasitas batas lingkungan yang akan membatasi pertumbuhan populasi. Maka akan dituliskan persamaan untuk b_i dan d_i sehingga didapatkan persamaan yang bergantung pada suatu kapasitas batas lingkungan.

Menurut Gotelli [3], tingginya kepadatan populasi akan menurunkan laju kelahiran dan meningkatkan laju kematian yang dapat dinyatakan sebagai

$$b_i = b - aN, \quad (2.2)$$

$$d_i = d + cN, \quad (2.3)$$

dengan b dan d merupakan laju kelahiran dan laju kematian yang dipengaruhi oleh suatu kepadatan, berbeda dengan b_i dan d_i yang merupakan laju kelahiran dan kematian saat sumber daya tidak terbatas. Konstanta a dan c menggambarkan kepadatan pada populasi tersebut, serta N merupakan jumlah populasi. Persamaan (2.2) merupakan persamaan yang menunjukkan bahwa laju kelahiran menurun karena tingginya kepadatan. Persamaan (2.3) merupakan persamaan yang menunjukkan bahwa laju kematian meningkat karena tingginya kepadatan.

Dari persamaan (2.1), (2.2), dan (2.3) diperoleh penurunan model pertumbuhan logistik dengan cara menyubstitusikan persamaan (2.2) dan (2.3) pada persamaan (2.1) sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= [(b - aN) - (d + cN)]N \\ &= [(b - d) - (a + c)N]N \\ &= \left[\frac{(b - d)}{(b - d)} \right] [(b - d) - (a + c)N]N \\ &= (b - d) \left[\frac{(b - d)}{(b - d)} - \frac{(a + c)}{(b - d)} N \right] N. \end{aligned}$$

Jika mengacu pada Allen dan Allen [2], Gotelli [3], serta Matis dan Kiffe [4] diketahui bahwa laju intrinsik (r) dapat dituliskan dengan $r = b - d$, dengan mengacu pada persamaan (2.2) dan (2.3) persamaan pada model dapat dituliskan

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= rN \left[1 - \frac{(a + c)}{(b - d)} N \right] \\ &= rN \left[1 - \frac{1}{\frac{(b - d)}{(a + c)}} N \right]. \end{aligned}$$

Besaran $\frac{(b-d)}{(a+c)}$ adalah kapasitas batas lingkungan (K) yaitu kapasitas batas maksimal lingkungan (Gotelli [3]). Persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right). \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) disebut model pertumbuhan logistik yang mempunyai penyelesaian:

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - N_0}{N_0}\right) e^{-rt}}. \quad (2.5)$$

Persamaan (2.5) merupakan penyelesaian model pertumbuhan logistik dengan N_0 sebagai nilai awal. Menurut Matis dan Kiffe [4], jika nilai awal $N_0 = 0$, maka populasi akan terus meningkat sampai mendekati nilai kapasitas batas lingkungan. Jika nilai awal $N_0 = K$, maka populasi tidak akan berkurang dan tidak akan bertambah, tetapi jika nilai awal $N_0 > K$, maka populasi akan berkurang sampai berada pada $N_0 = K$.

3. PENERAPAN DAN SIMULASI

Model pertumbuhan logistik dapat didefinisikan sebagai model pertumbuhan yang dibatasi oleh suatu faktor penghambat serta memperhitungkan faktor logistik yang berupa makanan dan ruang hidup (Matis dan Kiffe [4]). Data untuk laju intrinsik model pertumbuhan logistik diperoleh dari Dinas Kependudukan dan Pencatatan Sipil Kabupaten Klaten. Data yang didapatkan adalah jumlah penduduk, jumlah kelahiran, jumlah kematian serta jumlah imigrasi dan emigrasi di Kabupaten Klaten pada tahun 1984 sampai 2010. Menurut Gotelli [3], diasumsikan bahwa populasi tertutup yang artinya tidak ada individu yang berpindah (tidak ada imigrasi dan emigrasi). Asumsi ini digunakan karena laju pertumbuhan intrinsik pada model pertumbuhan logistik difokuskan pada kelahiran dan kematian.

Dari asumsi tersebut penduduk yang masuk (imigrasi) dianggap sebagai penduduk yang lahir dan penduduk yang keluar (emigrasi) adalah penduduk yang mati. Dari data tersebut dicari nilai laju intrinsik pada setiap tahun. Laju intrinsik diperoleh dari nilai laju kelahiran dikurangi laju kematian ($r = b - d$). Laju kelahiran didapatkan dari jumlah kelahiran ditambah jumlah imigrasi dibagi jumlah penduduk dan laju kematian didapatkan dari jumlah kematian ditambah jumlah emigrasi dibagi jumlah penduduk. Perhitungan laju intrinsik disajikan dalam Tabel 1.

commit to user

Tabel 1. Data laju intrinsik dengan kelahiran dan kematian

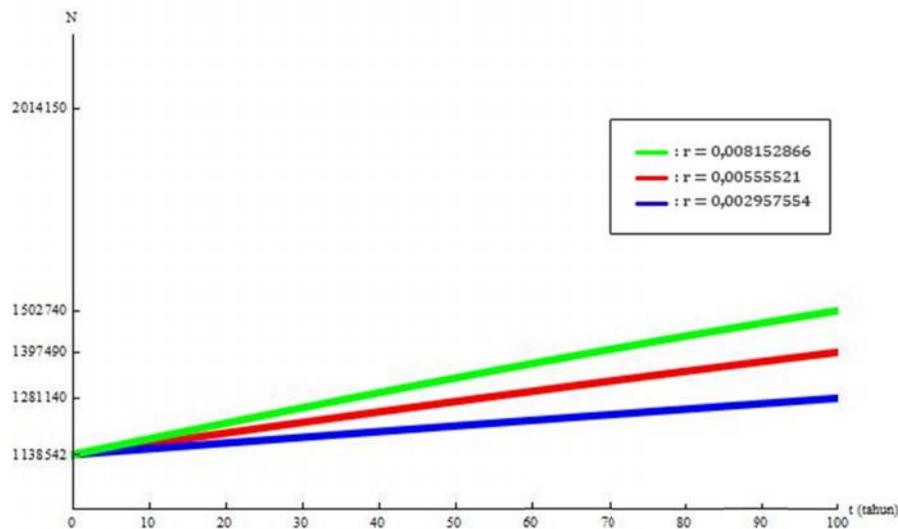
Tahun	Laju Intrinsik	Tahun	Laju Intrinsik
1983	-	1997	0,004233136
1984	0,012009219	1998	0,004434764
1985	0,009249276	1999	0,006918745
1986	0,004864096	2000	0,011903645
1987	0,005568975	2001	0,006016779
1988	0,004597049	2002	0,004903451
1989	0,005420401	2003	0,004515003
1990	0,005149074	2004	0,003502145
1991	0,004703622	2005	0,003502145
1992	0,004491733	2006	0,003321779
1993	0,00546343	2007	0,002887461
1994	0,005188977	2008	0,002696668
1995	0,010910281	2009	0,002627462
1996	0,006073045	2010	0,002785336

Dari perhitungan didapatkan nilai rata-rata laju intrinsik adalah 0,00555521, standar deviasi sebesar 0,002597656. Untuk mendapatkan nilai di atas rata-rata dan di bawah rata-rata maka nilai standar deviasi digunakan untuk menambah dan mengurangi rata-rata nilai laju intrinsik. Dari perhitungan didapatkan nilai r sebesar 0,00555521, 0,008152866 dan 0,002957554. Nilai laju r tersebut akan digunakan sebagai nilai laju intrinsik pada simulasi model pertumbuhan logistik. Jumlah populasi yang dapat ditampung oleh Kabupaten Klaten sebesar 3.072,41 jiwa/km² sedangkan luas wilayah Kabupaten Klaten adalah 655,56 km² sehingga

$$\begin{aligned}
 K &= \text{Luas daerah} \times \text{Kapasitas tampung/km}^2 \\
 &= 655,56 \text{ km}^2 \times 3.072,41 \text{ jiwa/km}^2 \\
 &= 2.014.149,1 \\
 K &\approx 2.014.150 \text{ jiwa}
 \end{aligned}$$

Simulasi dari model pertumbuhan logistik diambilkan dari persamaan (2.5). Pertumbuhan populasi dengan laju intrinsik sebesar 0,00555521, 0,008152866 dan 0,002957554 serta nilai kapasitas batas lingkungan sebesar 2.014.150 dengan nilai awal $N_0 = 1.138.542$ serta rentang waktu adalah 100 tahun disajikan pada Gambar 1.

commit to user



Gambar 1. Pertumbuhan populasi dengan $K = 2.014.150$, $N_0 = 1.138.542$

Gambar 1 menunjukkan bahwa garis berwarna hijau mempunyai pertumbuhan populasi yang lebih cepat dari garis berwarna merah dan biru. Hal ini dapat dibuktikan dari hasil simulasi pada garis hijau yang menunjukkan jumlah populasi Kabupaten Klaten saat $t = 100$ adalah sebesar 1.502.740 sedangkan jumlah populasi Kabupaten Klaten yang ditunjukkan garis berwarna merah adalah sebesar 1.397.490 dan untuk garis berwarna biru menunjukkan bahwa jumlah populasi Kabupaten Klaten saat $t = 100$ adalah sebesar 1.281.140. Berdasarkan hasil simulasi dapat dikatakan bahwa saat nilai laju intrinsik besar maka pertumbuhan populasi semakin cepat yang artinya bahwa pertumbuhan populasi semakin cepat untuk mencapai nilai kapasitas batas lingkungan saat nilai laju intrinsik besar.

4. KESIMPULAN

Dari hasil dan pembahasan, diperoleh dua kesimpulan.

1. Model pertumbuhan logistik dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

commit to user

2. Berdasarkan hasil penerapan dan simulasi model pertumbuhan logistik didapatkan jika semakin besar nilai r maka pertumbuhan populasi semakin cepat. Hal ini dapat dilihat dari hasil simulasi pada saat $t = 100$ dan $r = 0,008152866$ jumlah populasi Kabupaten Klaten adalah 1.502.740 sedangkan jumlah populasi Kabupaten Klaten pada saat $t = 100$ dan $r = 0,00555521$ adalah sebesar 1.397.490 dan pada saat $t = 100$ dan $r = 0,002957554$ jumlah populasi Kabupaten Klaten adalah sebesar 1.281.140.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Allen, L. J. S., *An Introduction to Stochastic Epidemic Models*, Department of Mathematics and Statistic, Texas Tech University, Lubbock, Texas, 2008.
- [2] Allen, L. J. S., and E. J. Allen., *A Comparison of Three Different Stochastic Population Models with Regard to Persistence Time*. *Theoretical Population Biology*, Texas Tech University, Lubbock, Texas **64** (2003), 439-449
- [3] Gotelli, N. J., *A Primer of Ecology*. Sinour Associates, Inc. University of Vermont, USA, 1995.
- [4] Matis, J. H., and T. R. Kiffe., *Effect of Immigration on some Stochastic Logistic Models*. *Theoretical Population Biology*, USA **56** (1999), 139-161
- [5] Muchyidin, A., *Model Pertumbuhan Populasi dan Kaitannya dengan Epidemi Penyakit Tuberkolosis*. Thesis Magister, Institut Teknologi Bandung, Bandung, 2009.
- [6] Tobing, I. S. L., *Teknik Estimasi Ukuran Populasi Suatu Spesies Primata*. Universitas Jakarta, Jakarta, 2008, Vol 01, no. **01**, 01-10.