

PENENTUAN WAKTU KEDATANGAN PESAWAT DI BANDAR UDARA HUSEIN SASTRANEGARA BANDUNG DENGAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR ATAS ALJABAR MAKS-PLUS

Casilda Reva Kartika, Siswanto, dan Sutrima
Program Studi Matematika FMIPA UNS

Abstrak. Aljabar maks-plus merupakan cabang dari ilmu matematika dalam bidang aljabar. Aljabar maks-plus yang dinotasikan dengan \mathbb{R}_{max} merupakan himpunan dari $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan $\varepsilon = -\infty$ yang dilengkapi dua operasi hitung maksimum (\oplus) dan penjumlahan (\otimes). Aljabar maks-plus dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan di dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu permasalahan yaitu masalah penjadwalan yang merupakan contoh dari Sistem Kejadian Diskrit (SKD). Tujuan dari penelitian ini adalah mengaplikasikan aljabar maks-plus pada sistem penjadwalan transit pesawat di Bandung dengan menentukan waktu kedatangan pesawat. Waktu kedatangan pesawat diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan linear $A \otimes x = b$ dengan x merupakan waktu keberangkatan pesawat dari bandara asal dan A merupakan matriks yang elemennya berupa penjumlahan durasi penerbangan dengan durasi transit. Hasil dari penelitian ini adalah diperolehnya jadwal keberangkatan setiap pesawat dari masing-masing bandar udara asal dan jadwal kedatangan pesawat di Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung yaitu pada pukul 07.30 WIB, 07.40 WIB, dan 08.30 WIB. Selain itu, diperoleh waktu penutupan *gate 1* dan *gate 2* yaitu masing-masing pada pukul 09.10 WIB dan 09.15 WIB.

Kata kunci : *aljabar maks-plus, penerbangan, penjadwalan, sistem kejadian diskrit, sistem persamaan linear*

1. PENDAHULUAN

Seiring dengan berkembangnya zaman, masalah yang timbul pada suatu sistem semakin berkembang menjadi lebih rumit atau kompleks. Para ahli baik di dunia industri maupun dunia akademik pun tertarik untuk memodelkan, menganalisa, dan mengontrol sistem-sistem yang kompleks. Sistem manufaktur fleksibel, jaringan telekomunikasi, sistem proses paralel, sistem kontrol lalu lintas, serta sistem logistik merupakan contoh dari sistem kompleks dan juga merupakan contoh dari Sistem Kejadian Diskrit (SKD). Suatu SKD adalah sistem yang mempunyai jumlah komponen berhingga yang digunakan oleh para pengguna untuk mencapai suatu tujuan bersama (de Schutter dan van den Boom [7]). Salah satu contoh dari masalah SKD yang dapat diselesaikan dengan menggunakan aljabar maks-plus adalah masalah penjadwalan transportasi [8].

Aljabar maks-plus merupakan salah satu cabang dalam ilmu matematika bidang aljabar yang mempunyai struktur semi lapangan dan dilengkapi dengan dua operasi biner, yaitu operasi maksimum (\oplus) dan penjumlahan (\otimes). Menurut Goverde [4], aljabar maks-plus merupakan contoh khusus dari semiring idempoten, atau dioid, sebagai suatu struktur aljabar formal untuk memecahkan

berbagai masalah *path* dalam teori graf dan mempunyai notasi $(\mathbb{R}_{max}, \oplus, \otimes)$ dengan $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Salah satu bidang yang membutuhkan penerapan aljabar maks-plus adalah transportasi. Transportasi mempunyai peranan penting dalam kehidupan bermasyarakat. Tidak hanya transportasi darat, pada zaman ini transportasi udara pun sangat dibutuhkan untuk mendukung manusia dalam bermobilitas. Durasi yang cenderung lebih singkat serta harga tiket yang relatif murah serta stabil menyebabkan masyarakat mulai beralih untuk menggunakan pesawat. Selain itu, dengan berbagai aktivitas yang dimiliki masyarakat serta tuntutan untuk bermobilitas tinggi, kebutuhan untuk menggunakan pesawat sebagai alat transportasi utama pun semakin meningkat.

Sistem penjadwalan penerbangan dapat direpresentasikan dalam bentuk graf berarah, dengan waktu sebagai *vertex*, jarak penerbangan sebagai *edge* serta durasi penerbangan sebagai bobot dari *edge*. Selanjutnya, graf tersebut diubah ke dalam bentuk matriks dan diselesaikan menggunakan sistem persamaan linear atas aljabar maks-plus. Pada penelitian ini, aljabar maks-plus diaplikasikan dalam sistem penjadwalan pesawat di Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung yang mengacu pada Heidergott [6] dan Baccelli [2] yang menerapkan aljabar maks-plus pada masalah penjadwalan transportasi serta Andersen [1] dan Subiono [8] yang secara khusus menerapkan aljabar maks-plus pada masalah penjadwalan pesawat secara sederhana di suatu bandara.

2. ALJABAR MAKS-PLUS

Menurut Heidergott [5], aljabar maks-plus dinotasikan sebagai $(\mathbb{R}_{max}, \oplus, \otimes)$, dengan $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Aljabar maks-plus mempunyai dua operasi yaitu maksimum (\oplus) dan penjumlahan (\otimes), didefinisikan oleh

$$a \oplus b = \max\{a, b\} \quad \text{dan} \quad a \otimes b = a + b$$

untuk semua $a, b \in \mathbb{R}_{max}$.

Mengacu pada Farlow [3], sifat-sifat dasar dari aljabar maks-plus adalah asosiatif, komutatif, distributif, terdapat elemen identitas yaitu ε terhadap (\oplus) dan $e = 0$ terhadap (\otimes) serta idempoten. Untuk $x \in \mathbb{R}_{max}$ dan untuk semua $n \in \mathbb{N}$ didefinisikan

$$\begin{aligned} x^{\otimes n} &= \underbrace{x \otimes x \otimes \dots \otimes x}_{n \text{ kali}} \\ &= \underbrace{x + x + \dots + x}_{n \text{ kali}} \\ &= n \times x \end{aligned}$$

sedangkan untuk $n = 0$ didefinisikan $x^n = e = 0$.

3. MATRIKS DALAM \mathbb{R}_{\max}

Menurut Farlow [3], himpunan matriks berukuran $n \times m$ untuk $n, m \in \mathbb{N}$ dalam \mathbb{R}_{\max} dinotasikan sebagai $\mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$. Operasi matriks dalam \mathbb{R}_{\max} didefinisikan sebagai

- (1) untuk $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$,

$$[A \oplus B]_{i,j} = a_{i,j} \oplus b_{i,j} = \max(a_{i,j}, b_{i,j})$$

dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, m$,

- (2) untuk $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times p}$ dan $B \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times m}$,

$$[A \otimes B]_{i,j} = \bigoplus_{k=1}^p a_{i,k} \otimes b_{k,j} = \max_{k \in \{1, 2, \dots, p\}} (a_{i,k} + b_{k,j})$$

dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, m$.

4. SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Menurut Tam [9], jika diberikan $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dan $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, maka diperoleh

$$A \otimes x = b \quad (4.1)$$

yang merupakan sistem persamaan linear aljabar maks-plus satu sisi atau sistem persamaan linear aljabar maks-plus. Dengan menggunakan notasi pada aljabar konvensional, sistem (4.1) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \max_{j=1, \dots, n} (a_{i,j} + x_j) &= b_i, \quad i \in M \\ \max_{j=1, \dots, n} (a_{i,j} - b_i + x_j) &= 0, \quad i \in M. \end{aligned}$$

Jika diberikan matriks $\bar{A} = (\bar{a}_{i,j}) = (a_{i,j} - b_i)$, maka akan diperoleh suatu sistem baru dengan sisi kanan dari sistem persamaan (4.1) adalah nol, seperti

$$\bar{A} \otimes x = 0. \quad (4.2)$$

sehingga dapat dikatakan bahwa sistem (4.2) telah dinormalisasi. Jika diberikan matriks $B = \text{diag}(-b_1, -b_2, \dots, -b_m)$, maka akan diperoleh

$$B \otimes A \otimes x = \bar{A} \otimes x = 0$$

5. HASIL DAN PEMBAHASAN

5.1. Sistem Penjadwalan Pesawat. Pada aplikasi ini akan dibahas mengenai penerbangan domestik yang terdapat di Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung. Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung memiliki rute atau relasi penerbangan dengan kota Denpasar, Balikpapan, Bandar Lampung, Banjarmasin, Batam, Makassar, Medan, Padang, Palembang, Pekanbaru, Semarang, Solo, Surabaya dan Yogyakarta. Sedangkan maskapai penerbangan yang melayani

rute penerbangan domestik antara Bandung dengan empat belas kota tersebut adalah Lion Air (JT), AirAsia (QZ), Citilink (QG), Garuda Indonesia (GA), NAM (IN), Wings Air (IW), Kalstar (KD) dan XpressAir (XN). Kemudian dicari waktu perjalanan atau durasi masing-masing penerbangan dalam satuan menit. Berikut ini diberikan data berupa rute dan durasi penerbangan yang diambil dari situs traveloka [10] yang dapat dilihat pada Tabel 1.

Table 1: Data Durasi Penerbangan Domestik menuju BDO

Dari	Maskapai	Durasi	Dari	Maskapai	Durasi
Denpasar	JT	105	Palembang	QG	85
Denpasar	QZ	115	Pekanbaru	QG	110
Denpasar	QG	85	Pekanbaru	QZ	100
Denpasar	GA	105	Semarang	IW	70
Balikpapan	JT	120	Semarang	KD	60
Lampung	IW	60	Solo	IW	70
Lampung	XN	65	Surabaya	JT	75
Banjarmasin	JT	90	Surabaya	IN	80
Batam	JT	105	Surabaya	QZ	75
Batam	QG	100	Surabaya	QG	90
Makassar	JT	130	Surabaya	GA	80
Medan	JT	140	Surabaya	IW	155
Medan	QG	150	Yogyakarta	JT	65
Padang	XN	115	Yogyakarta	IW	70
Palembang	XN	70			

Untuk lebih memudahkan dalam membuat model, dilakukan pemisalan terhadap durasi penerbangan dan waktu keberangkatan pesawat dari bandar udara asal yaitu masing-masing d_i dan \bar{x}_i dengan $i = 1, 2, \dots, 29$ seperti yang dapat dilihat pada Tabel 2.

Table 2: Pemisalan Durasi dan Waktu Keberangkatan

Dari	Maskapai	d_i	\bar{x}_i	Dari	Maskapai	d_i	\bar{x}_i
Denpasar	JT	d_1	\bar{x}_1	Palembang	QG	d_{16}	\bar{x}_{16}
Denpasar	QZ	d_2	\bar{x}_2	Pekanbaru	QG	d_{17}	\bar{x}_{17}
Denpasar	QG	d_3	\bar{x}_3	Pekanbaru	QZ	d_{18}	\bar{x}_{18}
Denpasar	GA	d_4	\bar{x}_4	Semarang	IW	d_{19}	\bar{x}_{19}
Balikpapan	JT	d_5	\bar{x}_5	Semarang	KD	d_{20}	\bar{x}_{20}
Lampung	IW	d_6	\bar{x}_6	Solo	IW	d_{21}	\bar{x}_{21}
Lampung	XN	d_7	\bar{x}_7	Surabaya	JT	d_{22}	\bar{x}_{22}
Banjarmasin	JT	d_8	\bar{x}_8	Surabaya	IN	d_{23}	\bar{x}_{23}
Batam	JT	d_9	\bar{x}_9	Surabaya	QZ	d_{24}	\bar{x}_{24}
Batam	QG	d_{10}	\bar{x}_{10}	Surabaya	QG	d_{25}	\bar{x}_{25}
Makassar	JT	d_{11}	\bar{x}_{11}	Surabaya	GA	d_{26}	\bar{x}_{26}
Medan	JT	d_{12}	\bar{x}_{12}	Surabaya	IW	d_{27}	\bar{x}_{27}
Medan	QG	d_{13}	\bar{x}_{13}	Yogyakarta	JT	d_{28}	\bar{x}_{28}

Lanjutan dari Tabel 1							
Dari	Maskapai	d_i	\bar{x}_i	Dari	Maskapai	d_i	\bar{x}_i
Padang	XN	d_{14}	\bar{x}_{14}	Yogyakarta	IW	d_{29}	\bar{x}_{29}
Palembang	XN	d_{15}	\bar{x}_{15}				

Oleh karena Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung hanya mempunyai dua *gate* untuk keberangkatan domestik, maka b_1 dan b_2 masing-masing menyatakan waktu penutupan *gate* 1 dan *gate* 2 pada Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung. Sedangkan durasi transfer diantara dua puluh sembilan kedatangan dan dua keberangkatan pesawat adalah a_{ij} dengan $i = 1, 2$ dan $j = 1, 2, \dots, 29$. Untuk durasi transfer pesawat diambil waktu sebesar 40 menit baik untuk a_{1j} maupun a_{2j} . Waktu transit sebesar 40 menit sendiri diambil dari standar waktu transit maskapai Garuda Indonesia yang merupakan *Full Board Airlines* dan memiliki waktu transit lebih lama jika dibandingkan maskapai penerbangan lainnya yang merupakan *Low Cost Airlines*. Untuk waktu penutupan *gate* 1 (b_1) dan *gate* 2 (b_2) diperoleh dari penambahan dua waktu penerbangan yang memiliki durasi paling lama yaitu 150 menit dan 155 menit dengan durasi transfer pesawat yaitu 40 menit.

5.2. Model Aljabar Maks-Plus. Berdasarkan data yang terdapat pada Tabel 1, model aljabar maks-plus pada penentuan waktu kedatangan pesawat diberikan dalam persamaan berikut

$$\max(d_1 + a_{1,1} + x_1, \quad d_2 + a_{1,2} + x_2, \quad d_3 + a_{1,3} + x_3, \quad \dots, \quad d_{29} + a_{1,29} + x_{29}) = b_1$$

$$\max(d_1 + a_{2,1} + x_1, \quad d_2 + a_{2,2} + x_2, \quad d_3 + a_{2,3} + x_3, \quad \dots, \quad d_{29} + a_{2,29} + x_{29}) = b_2$$

$$\max(d_1 \otimes a_{1,1} \otimes x_1, \quad d_2 \otimes a_{1,2} \otimes x_2, \quad d_3 \otimes a_{1,3} \otimes x_3, \quad \dots, \quad d_{29} \otimes a_{1,29} \otimes x_{29}) = b_1$$

$$\max(d_1 \otimes a_{2,1} \otimes x_1, \quad d_2 \otimes a_{2,2} \otimes x_2, \quad d_3 \otimes a_{2,3} \otimes x_3, \quad \dots, \quad d_{29} \otimes a_{2,29} \otimes x_{29}) = b_2$$

$$(d_1 \otimes a_{1,1} \otimes x_1) \oplus (d_2 \otimes a_{1,2} \otimes x_2) \oplus (d_3 \otimes a_{1,3} \otimes x_3) \oplus \dots \oplus (d_{29} \otimes a_{1,29} \otimes x_{29}) = b_1$$

$$(d_1 \otimes a_{2,1} \otimes x_1) \oplus (d_2 \otimes a_{2,2} \otimes x_2) \oplus (d_3 \otimes a_{2,3} \otimes x_3) \oplus \dots \oplus (d_{29} \otimes a_{2,29} \otimes x_{29}) = b_2$$

dan mempunyai bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} (d_1 \otimes a_{1,1} \otimes x_1) \oplus (d_2 \otimes a_{1,2} \otimes x_2) \oplus \dots \oplus (d_{29} \otimes a_{1,29} \otimes x_{29}) \\ (d_1 \otimes a_{2,1} \otimes x_1) \oplus (d_2 \otimes a_{2,2} \otimes x_2) \oplus \dots \oplus (d_{29} \otimes a_{2,29} \otimes x_{29}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ((d_1 \otimes a_{1,1}) \otimes x_1) \oplus ((d_2 \otimes a_{1,2}) \otimes x_2) \oplus \dots \oplus ((d_{29} \otimes a_{1,29}) \otimes x_{29}) \\ ((d_1 \otimes a_{2,1}) \otimes x_1) \oplus ((d_2 \otimes a_{2,2}) \otimes x_2) \oplus \dots \oplus ((d_{29} \otimes a_{2,29}) \otimes x_{29}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \otimes a_{1,1} & d_2 \otimes a_{1,2} & \dots & d_{29} \otimes a_{1,29} \\ d_1 \otimes a_{2,1} & d_2 \otimes a_{2,2} & \dots & d_{29} \otimes a_{2,29} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{29} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

commit to user

$$\begin{pmatrix} d_1 + a_{1,1} & d_2 + a_{1,2} & \dots & d_{29} + a_{1,29} \\ d_1 + a_{2,1} & d_2 + a_{2,2} & \dots & d_{29} + a_{2,29} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{29} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Oleh karena itu, diperoleh matriks A dan b sebagai berikut

$$A = \begin{pmatrix} d_1 + a_{1,1} & d_2 + a_{1,2} & \dots & d_{29} + a_{1,29} \\ d_1 + a_{2,1} & d_2 + a_{2,2} & \dots & d_{29} + a_{2,29} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 190 \\ 195 \end{pmatrix}.$$

dengan matriks x adalah $x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_{29})^T$ sehingga diperoleh model aljabar maks-plusnya adalah

$$A \otimes x = b \quad (5.1)$$

dengan x merupakan waktu keberangkatan pesawat dari bandara asal. Banyaknya pesawat yang melayani rute penerbangan domestik menuju Bandung sebanyak empat belas dan banyaknya *gate* keberangkatan di Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung adalah dua. Hal ini sama dengan dimensi matriks A yang berukuran 2×29 . Sedangkan matriks b merupakan waktu penutupan *gate 1* dan *gate 2*.

5.3. Jadwal Kedatangan Pesawat. Menurut Subiono [8], waktu keberangkatan pesawat dapat diperoleh dengan menyelesaikan model aljabar maks-plus pada persamaan 5.1. Mengacu pada Tam [9], untuk menyelesaikan persamaan 5.1 digunakan sistem persamaan linear. Pertama-tama yaitu dengan menormalisasikan persamaan 5.1 menjadi $A \otimes x = 0$ dengan matriks A diperoleh dari hasil $B \otimes A$ dan matriks B

$$B = \text{diag}(-b_1, -b_2) = \begin{pmatrix} -190 & \epsilon \\ \epsilon & -195 \end{pmatrix}.$$

Setelah proses normalisasi, diperoleh dua persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \max \quad & (-45 + x_1, \ -35 + x_2, \ -65 + x_3, \ -45 + x_4, \ -30 + x_5, \\ & -90 + x_6, \ -85 + x_7, \ -60 + x_8, \ -45 + x_9, \ -50 + x_{10}, \\ & -20 + x_{11}, \ -10 + x_{12}, \ 0 + x_{13}, \ -35 + x_{14}, \ -80 + x_{15}, \ = \ 0, \\ & -65 + x_{16}, \ -40 + x_{17}, \ -50 + x_{18}, \ -80 + x_{19}, \ -90 + x_{20}, \\ & -80 + x_{21}, \ -75 + x_{22}, \ -70 + x_{23}, \ -75 + x_{24}, \ -60 + x_{25}, \\ & -70 + x_{26}, \ -5 + x_{27}, \ -85 + x_{28}, \ -80 + x_{29}) \\ \max \quad & (-50 + x_1, \ -40 + x_2, \ -70 + x_3, \ -50 + x_4, \ -35 + x_5, \\ & -95 + x_6, \ -90 + x_7, \ -65 + x_8, \ -50 + x_9, \ -55 + x_{10}, \\ & -25 + x_{11}, \ -15 + x_{12}, \ 5 + x_{13}, \ -40 + x_{14}, \ -85 + x_{15}, \ = \ 0. \\ & -70 + x_{16}, \ -45 + x_{17}, \ -55 + x_{18}, \ -85 + x_{19}, \ -95 + x_{20}, \\ & -85 + x_{21}, \ -80 + x_{22}, \ -75 + x_{23}, \ -80 + x_{24}, \ -65 + x_{25}, \\ & -75 + x_{26}, \ 0 + x_{27}, \ -90 + x_{28}, \ -85 + x_{29}) \end{aligned}$$

Sebagai contoh, jika diperhatikan x_1 dari dua persamaan, maka diketahui bahwa

$$-45 + x_1 \leq 0 \quad \text{atau} \quad x_1 \leq 45; \quad -50 + x_1 \leq 0 \quad \text{atau} \quad x_1 \leq 50$$

oleh karena itu, diperoleh persamaan sebagai berikut

$$x_1 \leq \min(45, 50) = -\max(-45, -50) = -(-45) = 45 = \bar{x}_1$$

commit to user

dengan \bar{x}_1 adalah *column maximum* dari kolom pertama. Untuk mencari *column maximum* dari kolom-kolom berikutnya, dapat digunakan cara penyelesaian

seperti pada kolom pertama sehingga diperoleh matriks x

$$x = \begin{pmatrix} 45 & 35 & 65 & 45 & 30 & 90 & 85 & 60 & 45 & 50 & 20 & 10 & 0 & 35 & 80 & 65 \\ 40 & 50 & 80 & 90 & 80 & 75 & 70 & 75 & 60 & 70 & -5 & 85 & 80 \end{pmatrix}^T$$

Keberangkatan awal pesawat dari bandara asal dimulai pada pukul 06.00 WIB untuk kota Bandar Lampung, Batam, Medan, Padang, Palembang, Pekanbaru, Semarang, Solo, Surabaya serta Yogyakarta dan pukul 06.00 WITA untuk kota Denpasar, Balikpapan, Banjarmasin dan Makassar sehingga menit ke-0 dimulai pada pukul tersebut. Untuk lebih jelas, jadwal keberangkatan pesawat dari bandara asal dapat dilihat pada Tabel 3.

Table 3: Jadwal Keberangkatan Pesawat Menuju BDO

Dari	Maskapai	\bar{x}_i	Pukul	Dari	Maskapai	\bar{x}_i	Pukul
Denpasar	JT	45	06.45	Palembang	QG	65	07.05
Denpasar	QZ	35	06.35	Pekanbaru	QG	40	06.40
Denpasar	QG	65	07.05	Pekanbaru	QZ	50	06.50
Denpasar	GA	45	06.45	Semarang	IW	80	07.20
Balikpapan	JT	30	06.30	Semarang	KD	90	07.30
Lampung	IW	90	07.30	Solo	IW	80	07.20
Lampung	XN	85	07.25	Surabaya	JT	75	07.15
Banjarmasin	JT	60	07.00	Surabaya	IN	70	07.10
Batam	JT	45	06.45	Surabaya	QZ	75	07.15
Batam	QG	50	06.50	Surabaya	QG	60	07.00
Makassar	JT	20	06.20	Surabaya	GA	70	07.10
Medan	JT	10	06.10	Surabaya	IW	-5	05.55
Medan	QG	0	06.00	Yogyakarta	JT	85	07.25
Padang	XN	35	06.35	Yogyakarta	IW	80	07.20
Palembang	XN	80	07.20				

Selanjutnya dari jadwal pada Tabel 3 akan dicari jadwal kedatangan pesawat di Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung dengan cara menjumlahkan \bar{x}_i dengan durasi penerbangan (d_i). Untuk lebih jelasnya, jadwal kedatangan pesawat dapat dilihat pada Tabel 4. Sedangkan $b_1 = 190$ memiliki arti bahwa *gate* 1 ditutup pada pukul 09.10 WIB dan $b_2 = 195$ memiliki arti bahwa *gate* 2 ditutup pada pukul 09.15 WIB. Jadwal keberangkatan maupun kedatangan pesawat serta penutupan *gate* terjadi dalam rentang waktu pukul 06.00 WIB hingga 09.30 WIB.

Table 4: Jadwal Kedatangan Pesawat di BDO

Dari	Maskapai	Pukul	Dari	Maskapai	Pukul
Denpasar	JT	07.30	Palembang	QG	08.30
Denpasar	QZ	07.40	Pekanbaru	QG	08.30
Denpasar	QG	07.30	Pekanbaru	QZ	08.30
Denpasar	GA	07.30	Semarang	IW	08.30
Balikpapan	JT	07.30	Semarang	KD	08.30

Lanjutan dari Tabel 4					
Dari	Maskapai	Pukul	Dari	Maskapai	Pukul
Lampung	IW	08.30	Solo	IW	08.30
Lampung	XN	08.30	Surabaya	JT	08.30
Banjarmasin	JT	07.30	Surabaya	IN	08.30
Batam	JT	08.30	Surabaya	QZ	08.30
Batam	QG	08.30	Surabaya	QG	08.30
Makassar	JT	07.30	Surabaya	GA	08.30
Medan	JT	08.30	Surabaya	IW	08.30
Medan	QG	08.30	Yogyakarta	JT	08.30
Padang	XN	08.30	Yogyakarta	IW	08.30
Palembang	XN	08.30			

6. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dijelaskan sebelumnya, diperoleh jadwal keberangkatan pesawat dari bandara asal menuju Bandung seperti yang terlihat pada Tabel 3. Untuk jadwal kedatangan pesawat di Bandar Udara Husein Sastranegara Bandung dapat dilihat pada Tabel 4. Sedangkan untuk $b_1 = 190$ memiliki arti bahwa *gate* 1 ditutup pada pukul 09.10 WIB dan $b_2 = 195$ memiliki arti bahwa *gate* 2 ditutup pada pukul 09.15 WIB.

REFERENCES

- [1] Andersen, Maria H. (2002), *Max-Plus Algebra: Properties and Applications*. Master's thesis, Laramie, WY.
- [2] Baccelli, Francois, G. Cohen, G. J. Olsder, and J. P. Quadrat (1992), *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*. J. Wiley and Sons, New York.
- [3] Farlow, Kasie G. (2009), *Max-Plus Algebra*. Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia.
- [4] Goverde, Rob M. P. (2005), *Punctuality of Railway Operations and Timetable Stability Analysis*. Delft University of Technology, Netherlands.
- [5] Heidergott, B. (2006), *Max Plus Algebra and Queues*. EURANDOM research fellow Vrije Universiteit Departemen of Econometrics and Operations Research De Boelelaan, The Netherlands.
- [6] Heidergott, B., G. Olsder, and J. Van de Woude (2006), *Max Plus at Work*. Princeton University Press, New Jersey.
- [7] Schutter, B. de, and T. Van den Boom (2008), *Max-Plus Algebra and Max-Plus Linear Discrete System: An Introduction*. Proceedings of The 9th International Workshop on Discrete Event Systems (WODES'08), Sweden, 36-42.
- [8] Subiono (2014), *Aljabar Maxplus dan Terapannya*. Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- [9] Tam, Kin Po (2010), *Optimizing and Approximating Eigenvectors in Max-Algebra*. The University of Birmingham, UK, 18-21.
- [10] www.traveloka.com. Diakses pada hari Rabu, tanggal 20 Juli 2016.