library.uns.ac.id digilib.uns.ac.id

SISTEM MAKS-LINEAR DUA SISI ATAS ALJABAR MAKS-PLUS

Kiki Aprilia, Siswanto, dan Titin Sri Martini
Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Sebelas Maret

ABSTRAK. Aljabar maks-plus adalah himpunan $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dimana $\mathbb{R}$ himpunan bilangan real, $\varepsilon = -\infty$ yang dilengkapi dengan operasi maksimum $\oplus$ dan plus $\otimes$. Sistem maks-linear dua sisi atas aljabar maks-plus dapat dinotasikan sebagai $A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d$ dengan $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times n}$ dan $c, d \in \overline{\mathbb{R}}^{m}$. Penelitian ini bertujuan mengkaji ulang tentang sistem persamaan linear dengan variabel terpisah, sistem umum maks-linear dua sisi, dan *semiring* tersimetri. Dalam penelitian ini dibahas tentang penyelesaian dari sistem persamaan linear dengan variabel terpisah menggunakan metode Alternatif, penyelesaian sistem umum maks-linear dua sisi, dan *semiring* tersimetri.

Kata Kunci: *sistem dua sisi, semiring tersimetri, aljabar maks-plus*

1. PENDAHULUAN

Aljabar maks-plus adalah himpunan $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dimana $\mathbb{R}$ himpunan bilangan real, $\varepsilon = -\infty$ yang dilengkapi dengan operasi maksimum "$\oplus$" dan plus "$\otimes$". Aljabar maks-plus merupakan *semifield* komutatif idempoten [1]. Aljabar maks-plus telah digunakan untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah rute terdekat, penjadwalan, produksi, dan sistem antrian dengan kapasitas berhingga. Terdapat beberapa konsep ilmu yang dipelajari dalam aljabar maks-plus, salah satunya sistem maks-linear dua sisi. Menurut Butkovič [2], untuk mencari penyelesaian sistem maks-linear dua sisi yaitu $A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d$ dengan $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times n}$ dan $c, d \in \overline{\mathbb{R}}^{m}$, terlebih dahulu dicari penyelesaian sistem maks-linear satu sisi dengan bentuk $A \otimes x = b$. Jika $c = d = \xi$ yaitu matriks yang semua elemennya ε maka sistem maks-linear dua sisi menjadi sistem homogen $A \otimes x = B \otimes x$, dan yang lainnya sistem nonhomogen. Sistem $A \otimes x = B \otimes y$ dengan $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times n}$ dan $B \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times k}$ adalah sistem homogen khusus atau sistem persamaan linear dengan variabel terpisah. Penyelesaian sistem persamaan linear dengan variabel terpisah menggunakan metode Alternatif. Menurut Cuninghame-Green dan Butkovič [3], sistem umum maks-linear dua sisi dapat diubah menjadi sistem persamaan linear dengan variabel terpisah, sehingga untuk menyelesaikannya dapat menggunakan metode Alternatif. Sistem homogen $A \otimes x = B \otimes x$ mempunyai penyelesaian nontrivial apabila A dan B simetri.

library.uns.ac.id digilib.uns.ac.id

Menurut Gaubert dan Butkovič [4], *semiring* tersimetri dapat digunakan untuk mempelajari persamaan sistem maks-linear dua sisi.

Oleh karena itu, penelitian ini mengkaji ulang sistem maks-linear dua sisi yang dijelaskan oleh Butkovič [2]. Selanjutnya mencari penyelesaian untuk sistem persamaan linear dengan variabel terpisah menggunakan metode Alternatif, sistem umum maks-linear dua sisi, dan *semiring* tersimetri.

2. ALJABAR MAKS-PLUS

Berikut definisi aljabar maks-plus yang dijelaskan oleh Bachelli dkk. [1] dan Butkovič [2] serta definisi himpunan $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$, matriks konjugat, dan aljabar min-plus yang dijelaskan oleh Tam [5].

Definisi 2.1 *Aljabar maks-plus adalah himpunan* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ *dimana* $\mathbb{R}$ *himpunan bilangan real,* $\varepsilon = -\infty$ *dilengkapi dengan operasi maksimum "*$\oplus$*" dan plus "*$\otimes$*".*

Definisi 2.2 *Himpunan* $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ *adalah himpunan yang terdiri dari* $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Definisi 2.3 *Misalkan* $A = (a_{ij}) \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}^{m\times n}$. *Matriks konjugat dari A adalah* $A^* = (a_{ji}^*)$, *dengan* $A^* = -A^T$ *sehingga* $(a_{ji}^*) = -(a_{ji})$.

Definisi 2.4 *Aljabar min-plus adalah himpunan* $\mathbb{R}_{min} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *dimana* $\mathbb{R}$ *himpunan bilangan real, dilengkapi dengan operasi minimum "*$\oplus'$*" dan plus "*$\otimes$*".*

3. SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN VARIABEL TERPISAH

Diberikan sistem persamaan linear dengan variabel terpisah

$$A \otimes x = B \otimes y$$

dengan $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$, $B \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times k}$, $x \in \overline{\mathbb{R}}^{n}$ dan $y \in \overline{\mathbb{R}}^{k}$. Untuk mencari penyelesaian sistem persamaan linear dengan variabel terpisah menggunakan metode Alternatif. Berikut langkah-langkah metode Alternatif.

Algoritme 3.1 *Metode Alternatif untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dangan variabel terpisah*

1. *Ambil* $r = 0$ *dan sembarang vektor awal* $x(0)$
2. *Menghitung nilai* $y(r)$ *dimana* $y(r) = B^* \otimes' (A \otimes x(r))$
3. *Menghitung nilai* $x(r+1)$ *dimana* $x(r+1) = A^* \otimes' (B \otimes y(r))$

library.uns.ac.id digilib.uns.ac.id

4. *Diperiksa apakah* $x_i(r+1) < x_i(0)$ *untuk setiap* $i \in N$*? Jika ya, maka berhenti, berarti sistem tersebut tidak mempunyai penyelesaian. Jika tidak, maka lanjut ke langkah berikutnya.*
5. *Diperiksa apakah* $A \otimes x(r+1) = B \otimes y(r)$*? Jika ya, maka berhenti, berarti sistem tersebut mempunyai penyelesaian dan* $\big(x(r+1), y(r)\big)$ *adalah penyelesaian dari sistem tersebut. Jika tidak, maka kembali ke langkah 2.*

4. SISTEM UMUM MAKS-LINEAR DUA SISI

Diberikan sistem umum maks-linear dua sisi

$$A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d$$

dengan $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times n}$ dan $c, d \in \overline{\mathbb{R}}^{m}$.

Lema 4.1 (Hukum penghapusan) *Diberikan* $v, w, a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$. *Untuk* $x \in \mathbb{R}$ *berlaku*

$$v \oplus a \otimes x = w \oplus b \otimes x$$

jika dan hanya jika

$$v \oplus a \otimes x = w.$$

Bukti.

Akan dibuktikan jika $v \oplus a \otimes x = w \oplus b \otimes x$ maka $v \oplus a \otimes x = w$ untuk $x \in \mathbb{R}$. Diketahui $v \oplus a \otimes x = w \oplus b \otimes x$ dan $w \leq w \oplus b \otimes x$ sehingga $w \leq v \oplus a \otimes x$. Selanjutnya diketahui $a > b$ sehingga

$v \oplus a \otimes x = w \oplus b \otimes x \geq v \oplus b \otimes x$

$\Leftrightarrow w \oplus b \otimes x \oplus a \otimes x \geq w \oplus b \otimes x \geq v \oplus b \otimes x$

$\Leftrightarrow w \oplus a \otimes x \geq w \oplus b \otimes x \oplus a \otimes x \geq w \oplus b \otimes x$

$\Leftrightarrow w \oplus a \otimes x \geq w \oplus b \otimes x \oplus a \otimes x$

$\Leftrightarrow w \geq v \oplus a \otimes x$

Karena $w \leq v \oplus a \otimes x$ dan $w \geq v \oplus a \otimes x$ maka $v \oplus a \otimes x = w$

Selanjutnya akan dibuktikan jika $v \oplus a \otimes x = w$ maka $v \oplus a \otimes x = w \oplus b \otimes x$ untuk $x \in \mathbb{R}$. Diketahui $v \oplus a \otimes x = w$ dan $w \leq w \oplus b \otimes x$ sehingga $v \oplus a \otimes x \leq w \oplus b \otimes x$. Selanjutnya diketahui $a > b$ sehingga

$w \oplus a \otimes x \geq w \oplus b \otimes x \Leftrightarrow v \oplus a \otimes x \oplus a \otimes x = v \oplus a \otimes x \geq w \oplus b \otimes x$

Karena $v \oplus a \otimes x \leq w \oplus b \otimes x$ dan $v \oplus a \otimes x \geq w \oplus b \otimes x$ maka

$$v \oplus a \otimes x = w \oplus b \otimes x. \qquad \square$$

Diberikan sistem homogen dengan bentuk

$$A \otimes x = B \otimes x \tag{4.1}$$

library.uns.ac.id digilib.uns.ac.id

dengan $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$. Sistem (4.1) ekuivalen dengan

$$A \otimes x = y$$
$$B \otimes x = y$$

atau dapat ditulis dengan

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} \otimes y. \tag{4.2}$$

Sistem (4.2) merupakan sistem persamaan linear dengan variabel terpisah dengan $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} \in \overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$. Oleh karena itu, untuk menyelesaikan sistem ini dapat menggunakan metode Alternatif.

5. *SEMIRING* TERSIMETRI

Suatu *semiring* $\mathbb{S} = \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ dilengkapi dengan $\oplus$ dan $\otimes$ sehingga

$$(a, a') \oplus (b, b') = (a \oplus b, a' \oplus b'),$$
$$(a, a') \otimes (b, b') = (a \otimes b \oplus a' \otimes b', a \otimes b' \oplus a' \otimes b),$$

dengan $\tau = (-\infty, -\infty)$ elemen netral dari $\mathbb{S}$ terhadap operasi $\oplus$ dan $\tau = (0, -\infty)$ elemen netral terhadap operasi $\otimes$. Jika $x = (a, a')$ maka $\ominus x = (a', a)$. Diberikan $x, y \in \mathbb{S}$ berlaku $x \ominus y = x \oplus (\ominus y)$, $|x| = a \oplus a' \in \overline{\mathbb{R}}$, dan operator keseimbangan $x^{\bullet} = x \ominus x = (|x|, |x|)$. Sifat-sifat dari *semiring* tersimetri yaitu

(a) $\ominus (\ominus x) = x$
(b) $\ominus (x \oplus y) = (\ominus x) \oplus (\ominus y)$
(c) $\ominus (x \otimes y) = (\ominus x) \otimes y$.

Lema 5.1 *Misalkan $x, y \in \mathbb{S}$ berlaku*

(a) $|x \oplus y| = |x| \oplus |y|$,
(b) $|x \otimes y| = |x| \otimes |y|$,
(c) $|\ominus x| = |x|$.

Bukti.

Ambil $x = (a, b), y = (c, d)$.

(a) Akan dibuktikan $|x \oplus y| = |x| \oplus |y|$.

$$|x \oplus y| = a \oplus c \oplus b \oplus d$$
$$= a \oplus b \oplus c \oplus d = |x| \oplus |y|$$

Jadi terbukti $|x \oplus y| = |x| \oplus |y|$.

(b) Akan dibuktikan $|x \otimes y| = |x| \otimes |y|$.

$$|x \otimes y| = a \otimes c \oplus a \otimes d \oplus b \otimes c \oplus b \otimes d$$
$$= (a \oplus b) \otimes (c \oplus d) = |x| \otimes |y|$$

library.uns.ac.id digilib.uns.ac.id

Jadi terbukti $|x \otimes y| = |x| \otimes |y|$.

(c) Akan dibuktikan $|\ominus x| = |x|$.

$$|\ominus x| = |(b,a)| = b \oplus a = a \oplus b$$
$$= |(a,b)| = |x|$$

Jadi terbukti $|\ominus x| = |x|$. □

Misalkan $x = (a, a')$, $y = (b, b')$. Jika $a \oplus b' = a' \oplus b$ maka *x* seimbang *y* ($x \nabla y$). Misalkan $x = (a, b)$, *x* disebut *sign-positive* apabila $a > b$ atau $x = \tau$. Sedangkan *x* disebut *sign-negative* apabila $a < b$ atau $x = \tau$. Jika *x sign-positive* atau *sign-negative* maka *x signed*. Jika $a = b$ maka *x* seimbang, dan yang lainnya tidak seimbang. Oleh karena itu, τ satu-satunya elemen $\mathbb{S}$ yang memiliki kedua *signed* dan seimbang.

Proposisi 5.1 *Diberikan* $x, y \in \mathbb{S}$. *Jika salah satu dari x atau y seimbang maka* $x \otimes y$ *seimbang, sedangkan jika x dan y seimbang maka* $x \oplus y$ *seimbang.*

Fungsi $t \to (t, -\infty)$, dengan t elemen $\overline{\mathbb{R}}$ dan $(t, -\infty)$ elemen *sign-positive* $\mathbb{S}$ merupakan homorfisma *semiring* bijektif. Elemen *sign-positive* dari (a, b) adalah $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Untuk membuktikannya menggunakan pernyataan berikut ini untuk $x, y, u, v \in \mathbb{S}$:

$$x \nabla y, u \nabla v \Longrightarrow x \oplus u \nabla y \oplus v,$$
$$x \nabla y \Longrightarrow x \otimes u \nabla y \otimes u,$$
$$x \nabla y \text{ dan } x = (a, a'), y = (b, b') \text{ adalah } \textit{sign-positive} \Longrightarrow a = b.$$

Vektor disebut *sign-positive* apabila semua komponen *sign-positive*. Sedangkan vektor disebut *sign-negative* apabila semua komponen *sign-negative*. Jika vektor *sign-positive* atau *sign-negative* maka vektor *signed*.

Proposisi 5.2 *Diberikan* $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times n}$. *Setiap penyelesaian* $x \in \overline{\mathbb{R}}^m$ *pada* (4.1) *mempunyai penyelesaian sign-positive pada sistem keseimbangan linear* $(A \ominus B) \otimes x \nabla \tau$, *begitupun sebaliknya.*

Bukti.

Ambil $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times n}$. Misalkan setiap penyelesaian $x \in \overline{\mathbb{R}}^m$ pada $A \otimes x = B \otimes x$ mempunyai penyelesaian *sign-positive*. Akan dibuktikan sistem $(A \ominus B) \otimes x \nabla \tau$ mempunyai penyelesaian *sign-positive*.

$$A \otimes x = B \otimes x, \quad x \; sign - positive$$
$$\Leftrightarrow A \otimes x \nabla B \otimes x, \quad x \; sign - positive,$$
$$\Leftrightarrow A \otimes x \ominus B \otimes x \nabla \tau, \quad x \; sign - positive,$$
$$\Leftrightarrow (A \ominus B) \otimes x \nabla \tau, \quad x \; sign - positive.$$

library.uns.ac.id digilib.uns.ac.id

Begitupula apabila sistem $A \otimes x = B \otimes x$ mempunyai penyelesaian *sign-negative*. Jadi Dalil 5.2 terbukti. □

Selanjutnya akan dicari determinan matriks pada *semiring* tersimetri. *Signed* (tersimetri) dari permutasi σ yaitu $sgn(\sigma) = 0$ untuk σ genap dan $sgn(\sigma) = \ominus 0$ untuk σ ganjil. Determinan dari $A = (a_{ij}) \in \mathbb{S}^{n\times n}$ adalah

$$det(A) = \overset{\oplus}{}_{\sigma\in P_n} \left(sgn(\sigma) \otimes \overset{\otimes}{}_{i\in N} a_{i,\sigma(i)}\right).$$

Teorema 5.3 *Diberikan $A \in \mathbb{S}^{n\times n}$. Sistem keseimbangan $A \otimes x \nabla \xi$ mempunyai penyelesaian nontrivial signed (yaitu $\neq \xi$) jika dan hanya jika A mempunyai keseimbangan determinan.*

Akibat 5.4 *Diberikan $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ dan $C = A \ominus B$. Sistem $A \otimes x = B \otimes x$ mempunyai penyelesaian nontrivial sehingga C mempunyai keseimbangan determinan.*

Aljabar maks permanen $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ adalah

$$maper(A) = \overset{\oplus}{}_{\sigma\in P_n} \overset{\otimes}{}_{i\in N} a_{i,\sigma(i)}.$$

Jika $C = (c_{ij}) \in \mathbb{S}^{n\times n}$ maka $|C| = \left(|c_{ij}|\right) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$, determinan C yaitu $det(C) = \left(d^+(C), d^-(C)\right) = (d^+, d^-)$, dan $|det(C)| = d^+ \oplus d^-$.

Proposisi 5.5 *Untuk setiap $C = (c_{ij}) \in \mathbb{S}^{n\times n}$ berlaku $|det(C)| = maper(C)$.*

Bukti :

Berdasarkan Lema 5.1 di peroleh

$$\begin{aligned} |det(C)| &= \left|\overset{\oplus}{}_{\sigma\in P_n} \left(sgn(\sigma) \otimes \overset{\otimes}{}_{i\in N} c_{i,\sigma(i)}\right)\right| \\ &= \overset{\oplus}{}_{\sigma\in P_n} \left|\left(sgn(\sigma) \otimes \overset{\otimes}{}_{i\in N} c_{i,\sigma(i)}\right)\right| \\ &= \overset{\oplus}{}_{\sigma\in P_n} \left|\left(\overset{\otimes}{}_{i\in N} c_{i,\sigma(i)}\right)\right| = \overset{\oplus}{}_{\sigma\in P_n} \overset{\otimes}{}_{i\in N} \left|c_{i,\sigma(i)}\right| \\ &= maper|C| = maper(C). \end{aligned}$$

Jadi terbukti $|det(C)| = maper(C)$ □

6. PENERAPAN KASUS

Pada bagian ini diberikan penerapan kasus menggunakan metode Alternatif pada sistem persamaan linear dengan variabel terpisah.

Penerapan 6.1 *Diberikan*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -\infty & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\infty & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

library.uns.ac.id digilib.uns.ac.id

Akan dicari penyelesaian dari sistem persamaan linear dengan variabel terpisah menggunakan Metode Alternatif.

Berdasarkan matriks A dan B diperoleh

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & -1 & +\infty \\ +\infty & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B^* = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ambil $r = 0$, kemudian ambil sembarang $x(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dengan menggunakan Algoritme 3.1 diperoleh.

$$A \otimes x(0) = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad y(0) = B^* \otimes' \left(A \otimes x(0)\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad B \otimes y(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x(1) = A^* \otimes' \left(B \otimes y(0)\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A \otimes x(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Karena $A \otimes x(1) \neq B \otimes y(0)$ maka kembali ke langkah 2.

$$r = 1 \qquad y(1) = B^* \otimes' \left(A \otimes x(1)\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad B \otimes y(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x(2) = A^* \otimes' \left(B \otimes y(1)\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A \otimes x(2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Karena $A \otimes x(2) = B \otimes y(1)$, maka berhenti. Sehingga sistem persamaan linear tersebut mempunyai penyelesaian yaitu $\left(x(2), y(1)\right)$.

Pada bagian ini diberikan penerapan kasus keseimbangan determinan dan penyelesaian nontrivial dari sistem homogen menggunakan metode Alternatif.

Penerapan 6.2 *Diberikan*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = A \ominus B.$$

Apakah C mempunyai keseimbangan determinan? Jika ya, carilah penyelesaian nontrivial dari sistem $A \otimes x = B \otimes x$.

Diperoleh

$$C = A \ominus B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \ominus \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ominus 5 & 8 & \ominus 5 \\ 7 & \ominus 4 & \ominus 5 \\ \ominus 5 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$d^+ = \text{maks}(12, 18, 14) = 18,$$

$$d^- = \text{maks}(17, 15, 18) = 18,$$

$$maper|C| = d^+ \oplus d^- = \text{maks}(18,18) = 18 = d^+ = d^-.$$

library.uns.ac.id digilib.uns.ac.id

Karena $d^+ = d^-$, $C = A \ominus B$ mempunyai keseimbangan determinan. Untuk mencari penyelesaian sistem $A \otimes x = B \otimes x$ digunakan metode Alternatif diperoleh penyelesaian nontrivialnya yaitu $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

7. KESIMPULAN

(1) Sistem persamaan linear dengan variabel terpisah yaitu $A \otimes x = B \otimes y$ dengan $A \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times n}$, $B \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times k}$, $x \in \overline{\mathbb{R}}^n$ dan $y \in \overline{\mathbb{R}}^k$. Untuk mencari penyelesaian sistem persamaan linear dengan variabel terpisah menggunakan Metode Alternatif pada Algoritme 3.1.

(2) Sistem umum maks-linear dua sisi yaitu $A \otimes x \oplus c = B \otimes x \oplus d$ dengan $A, B \in \overline{\mathbb{R}}^{m \times n}$ dan $c, d \in \overline{\mathbb{R}}^m$. Sistem homogen $A \otimes x = B \otimes x$ dapat diubah menjadi $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \otimes x = \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} \otimes y$ (sistem persamaan linear dengan variabel terpisah) sehingga untuk menyelesaikan sistem ini dapat menggunakan metode Alternatif.

(3) Suatu *semiring* $\mathbb{S} = \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ dilengkapi dengan $\oplus$ dan $\otimes$ sehingga

$$(a, a') \oplus (b, b') = (a \oplus b, a' \oplus b'),$$
$$(a, a') \otimes (b, b') = (a \otimes b \oplus a' \otimes b', a \otimes b' \oplus a' \otimes b),$$

dengan $\varepsilon = (-\infty, -\infty)$ elemen netral dari $\mathbb{S}$ terhadap operasi $\oplus$ dan $(0, -\infty)$ elemen netral terhadap operasi $\otimes$. Jika $x = (a, a')$ maka $\ominus x = (a', a)$. Diberikan $x, y \in \mathbb{S}$ berlaku $x \ominus y = x \oplus (\ominus y)$, $|x| = a \oplus a' \in \overline{\mathbb{R}}$, dan operator keseimbangan $x^\bullet = x \ominus x = (|x|, |x|)$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J. and Quadrat, J. P. *Synchronization and Linearity An Algebra for Discrete Event Systems*. John Wiley & Sons, New York. 2001.

[2] Butkovič, P. *Max Linear Systems: Theory and Algorithm*. Springer, London. 2010.

[3] Cunninghame-Green, R. A. and Butkovič, P. The Equation $A \otimes x = B \otimes y$ over (max,+), *Journal of Theoretical Computer Science*. 293 (2003), 3-12.

[4] Gaubert, S. and Butkovič, P. Sign-nonsingular matrices and matrices with unbalanced determinant in symmetrised semirings, *Linear Algebra and Its Applications*. 301 (1999). 195-201.

[5] Tam, K. P. *Optimizing and Approximating Eigen Vectors in Max-Algebra*. University of Birmingham, Birmingham. 2010.