# NILAI MAKSIMUM DAN MINIMUM PELABELAN $\gamma$ PADA GRAF *DOUBLE CONES*, GRAF LINTANG DAN GRAF TANGGA

oleh

SUVYA NUR CHAMIDAH

M0109064

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan

memperoleh gelar Sarjana Sains Matematika

**JURUSAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS SEBELAS MARET**

**SURAKARTA**

**2013**

SKRIPSI

**NILAI MAKSIMUM DAN MINIMUM PELABELAN $\gamma$ PADA GRAF *DOUBLE CONES*, GRAF LINTANG DAN GRAF TANGGA**

yang disiapkan dan disusun oleh

SUVYA NUR CHAMIDAH

M0109064

dibimbing oleh

| Pembimbing I, | Pembimbing II, |
|---|---|
| Dra. Mania Roswitha, M.Si. | Bowo Winarno, M.Kom. |
| NIP. 19520628 198303 2 001 | NIP. 19810430 200812 1 001 |

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji

pada hari Rabu, 30 Januari 2013

dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

| Anggota Tim Penguji | Tanda Tangan |
|---|---|
| 1. Drs. Tri Atmojo K, M.Sc., Ph.D<br>NIP. 19630826 198803 1 002 | 1. ..... |
| 2. Dra. Respatiwulan, M.Si.<br>NIP. 19680611 199302 2 001 | 2. ..... |

Surakarta, 4 Februari 2013

Disahkan oleh

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

| Dekan, | Ketua Jurusan Matematika, |
|---|---|
| Prof. Ir. Ari Handono Ramelan, M.Sc.(Hons) Ph.D | Irwan Susanto, S.Si., DEA |
| NIP. 19610223 198601 1 001 | NIP. 19710511 199512 1 001 |

# ABSTRAK

Suvya Nur Chamidah, 2013. NILAI MAKSIMUM DAN MINIMUM PELABELAN $\gamma$ PADA GRAF *DOUBLE CONES*, GRAF LINTANG DAN GRAF TANGGA. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Sebelas Maret.

Pelabelan $\gamma$ suatu graf $G$ dengan *order* $|V(G)|$ dan *size* $|E(G)|$ didefinisikan sebagai fungsi satu-satu $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, ..., |E(G)|\}$ yang menurunkan pelabelan $f' : E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., |E(G)|\}$, sebagai label *edge* yang diperoleh dari selisih label *vertex* pada kedua ujung *edge*, dinotasikan sebagai $f'(e) = |f(u) - f(v)|$ untuk setiap *edge* $e = (u, v)$ pada $G$. Nilai pelabelan $\gamma$ dinotasikan dengan $val(f)$, didefinisikan sebagai $val(f) = \sum_{e \in E(G)} f'(e)$. Nilai maksimum dan minimum dari pelabelan $\gamma$ pada graf $G$ didefinisikan sebagai $val_{max}(G) = max\{val(f)\}$ dan $val_{min}(G) = min\{val(f)\}$, dengan $f$ adalah pelabelan $\gamma$ pada graf $G$. Suatu pelabelan $\gamma$ pada graf $G$ disebut pelabelan maksimum $\gamma$ jika $val(f) = val_{max}(G)$ dan disebut pelabelan minimum $\gamma$ jika $val(f) = val_{min}(G)$.

Tujuan penelitian ini adalah dapat menentukan nilai maksimum dan minimum pelabelan $\gamma$ pada graf *double cones* $DC_n$, graf lintang $L_n$ dan graf tangga $T_n$. Metode yang digunakan adalah studi literatur. Berdasarkan hasil pembahasan, terdapat 6 teorema yang menunjukkan nilai maksimum dan minimum pelabelan $\gamma$ pada graf *double cones* $DC_n$, graf lintang $L_n$ dan graf tangga $T_n$ dengan label *vertex* secara berurutan dari 0 sampai $3n$, 0 sampai $2n$ dan 0 sampai $3n - 2$.

***Kata kunci:*** *pelabelan $\gamma$, graf double cones, graf lintang, graf tangga*

# ABSTRACT

Suvya Nur Chamidah, 2013. MAXIMUM AND MINIMUM VALUES OF $\gamma$-LABELINGS OF *DOUBLE CONES* GRAPH, LINTANG GRAPH AND LADDER GRAPH. Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Sebelas Maret University.

A $\gamma$-labeling of G is a one-to-one function $f : V(G) \to \{0, 1, 2, ..., m\}$ that induces a labeling $f' : E(G) \to \{1, 2, ..., m\}$ of the edges of G defined by $f'(e) = |f(u) - f(v)|$ for each edge $e = (u, v)$ of $G$. The value of $\gamma$-labeling is denoted by $val(f)$ and defined by $val(f) = \sum_{e \in E(G)} f'(e)$. The maximum and minimum values of $\gamma$-labeling of a graph $G$ is defined by $val_{max}(G) = max\{val(f)\}$ and $val_{min}(G) = min\{val(f)\}$, where $f$ is $\gamma$-labeling of graph $G$. A $\gamma$-labeling of graph $G$ is $\gamma$ maximum labeling if $val(f) = val_{max}(G)$ and $\gamma$ minimum labeling if $val(f) = val_{min}(G)$.

This research aims to determine maximum and minimum values of $\gamma$-labelings of a double cones graph $DC_n$, a lintang graph $L_n$ and a ladder graph $T_n$. The method on this research is a literary study. According to the discussion, there are six theorems that show the maximum and minimum values of $\gamma$-labelings of a double cones graph $DC_n$, a lintang graph $L_n$ and a ladder graph $T_n$ with labels of vertices from 0 until $3n$, 0 until $2n$ and 0 until $3n - 2$, respectively.

***Keywords:*** *$\gamma$-labeling, double cones graph, lintang graph, ladder graph*

# MOTO

Apapun yang saya lakukan harus dilandasi rasa cinta kepada Allah SWT

# PERSEMBAHAN

Karya ini kupersembahkan untuk :

1. kedua orang tuaku Bapak dan Ibu

terima kasih atas cinta dan pengorbanan kepadaku,

2. kakak-kakak dan adikku

terima kasih atas kasih sayangnya kepadaku,

3. teman-teman jurusan Matematika angkatan 2009

terima kasih atas semangat dan motivasinya kepadaku.

# KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT, raja semesta alam atas segala kemudahan dan karunia-Nya yang diberikan, akhirnya penulis dapat menyelesaikan laporan skripsi dengan baik dan lancar.

Penulis menyadari bahwa penulisan laporan skripsi ini banyak mengalami kesulitan, namun berkat bantuan, petunjuk, dan bimbingan dari berbagai pihak baik moril maupun materiil, kesulitan-kesulitan dapat terselesaikan dengan baik. Oleh karena itu, dengan segala ketulusan dan kerendahan hati, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada Dra. Mania Roswitha, M. Si., pembimbing I dan Bowo Winarno, M. Kom., pembimbing II.

Akhir kata, penulis berharap semoga laporan ini dapat memberikan manfaat bagi seluruh pihak yang membutuhkan.

Surakarta, Januari 2013

Penulis

# DAFTAR ISI

# DAFTAR GAMBAR

# DAFTAR NOTASI

| | | |
|---|---|---|
| $G$ | : | graf $G$ |
| $V(G)$ | : | himpunan *vertex* dari graf $G$ |
| $E(G)$ | : | himpunan *edge* dari graf $G$ |
| $\|V(G)\| = p$ | : | banyaknya *vertex* dari graf $G$ (*order*) |
| $\|E(G)\| = m$ | : | banyaknya *edge* dari graf $G$ (*size*) |
| $e$ | : | *edge* |
| $u, v$ | : | *vertex* |
| $(u, v)$ | : | *edge* yang ujung-ujungnya adalah *vertex* $u$ dan $v$ |
| $deg_G v$ | : | derajat (*degree*) *vertex* $v$ dari graf $G$ |
| $C_n$ | : | graf *cycle* dengan *order* $n$ |
| $P_n$ | : | graf *path* dengan *order* $n$ |
| $K_n$ | : | graf lengkap (*complete*) dengan *order* $n$ |
| $\overline{G}$ | : | komplemen dari graf $G$ |
| $\cup$ | : | operasi *union* |
| $+$ | : | operasi *join* |
| $\times$ | : | operasi *product* |
| $K_{1,n-1}$ | : | graf *star* dengan 1 pusat dan *order* $n$ |
| $F_{2,n}$ | : | graf *firecracker* dengan 2 pusat dan *leaf* ber-*order* $n$ |
| $S_{m,n}$ | : | graf *double-star* dengan masing-masing *star* ber-*order* $m$ dan $n$ |
| $W_n$ | : | graf roda dengan *order* $n$ pada $C_n$ |
| $F_n$ | : | graf kipas dengan *order* $n$ pada $C_n$ |
| $H_n$ | : | graf helm dengan *order* $n$ pada $C_n$ |
| $U_{m,n}$ | : | graf *umbrella* dengan payung ber-*order* $m$ dan *tail* ber-*order* $n$ |
| $B_{n,k}$ | : | graf pohon pisang dengan $n$ *star* dan *star* ber-*orderk* |
| $D_3^m$ | : | graf persahabatan dengan $m$ *cycle* |
| $DC_n$ | : | graf *double cones* dengan *order* $n$ pada $C_n$ |
| $L_n$ | : | graf lintang dengan $n$ *vertex* lintang |

| | | |
|---|---|---|
| $T_n$ | : | graf tangga dengan *order* $n$ pada $P_n$ |
| $val(f)$ | : | nilai pelabelan $\gamma$ |
| $val_{max}G$ | : | nilai maksimum pelabelan $\gamma$ pada $G$ |
| $val_{min}G$ | : | nilai minimum pelabelan $\gamma$ pada $G$ |
| $S$ | : | himpunan dengan elemennya $\{1, 2, ..., p-1\}$ |
| $\alpha(p, m)$ | : | elemen maksimum dari $S$ yang memenuhi $\sum_{i=1}^{k}(p-i) \leq m$ |

# Bab I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang berkembang dari sisi teori dan sisi terapannya. Penerapan teori graf sangat membantu dalam menyelesaikan masalah kehidupan nyata, misalnya dalam topologi jaringan bidang ilmu komputer, riset operasi, komunikasi dan ilmu pengetahuan alam. Suatu graf terdiri dari himpunan *vertex* dan *edge*. *Vertex* menunjukkan titik, sedangkan *edge* menunjukkan garis yang menghubungkan dua *vertex*.

Bidang teori graf yang berkembang saat ini adalah pelabelan suatu graf. Menurut Wallis [16], pelabelan graf adalah suatu pemetaan yang memetakan setiap elemen graf (*vertex*, *edge*, *vertex* dan *edge*) ke bilangan tertentu yang selalu positif atau bilangan bulat non negatif. Pelabelan dengan elemennya hanya terdiri dari himpunan *vertex* disebut pelabelan *vertex*. Sedangkan pelabelan yang elemennya merupakan himpunan *edge* disebut pelabelan *edge*. Pelabelan yang elemennya semua himpunan *vertex* dan *edge* disebut sebagai pelabelan total.

Suatu graf dapat diberi label sesuai jenis pelabelan yang digunakan. Jenis-jenis pelabelan graf yang berkembang saat ini adalah pelabelan ajaib (*magic*), pelabelan total ajaib, pelabelan anti ajaib, pelabelan selimut ajaib, pelabelan selimut anti ajaib, pelabelan super ajaib, pelabelan $\gamma$ dan lain sebagainya.

Pelabelan $\gamma$ diperkenalkan pertama kali oleh Chartrand *et al.* [4] pada tahun 2005. Menurut Chartrand *et al.* [4], pelabelan $\gamma$ suatu graf $G$ dengan *order* atau banyak *vertex* $|V(G)|$ dan *size* atau banyak *edge* $|E(G)|$ didefinisikan sebagai fungsi satu-satu $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, ..., |E(G)|\}$ yang menurunkan pelabelan $f' : E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., |E(G)|\}$, sebagai label *edge* yang diperoleh dari selisih label *vertex* pada kedua ujung *edge*, dinotasikan sebagai $f'(e) = |f(u) - f(v)|$

untuk setiap *edge* $e = (u, v)$ pada $G$. Nilai pada pelabelan $\gamma$ adalah $val(f) = \sum_{e \in E(G)} f'(e)$. Nilai maksimum dari pelabelan $\gamma$ pada $G$ dinotasikan sebagai $val_{max}(G) = max\{val(f)\}$. Sedangkan nilai minimum dari pelabelan $\gamma$ pada $G$ dinotasikan sebagai $val_{min}(G) = min\{val(f)\}$.

Pelabelan $\gamma$ sudah banyak diteliti oleh para peneliti di bidang teori graf. Pada tahun 2005, Chartrand *et al.* [4] menemukan pelabelan $\gamma$ untuk graf *path*, graf *cycle*, graf lengkap dan graf *star*. Pada tahun yang sama, Chartrand *et al.* [5] juga menemukan pelabelan $\gamma$ untuk graf *tree*. Okamoto *et al.* [11] pada tahun 2007, menemukan pelabelan $\gamma$ untuk graf *oriented*. Roswitha *et al.* [13] meneliti pelabelan $\gamma$ pada graf *petersen* juga pada tahun 2007. Selanjutnya pada tahun 2009, Indriati dan Roswitha [9] meneliti pelabelan $\gamma$ pada graf *double-star*, graf *firecracker* dan graf *n-Sun*. Indriati [8] melanjutkan penelitian dengan menerapkan pelabelan $\gamma$ terhadap graf roda, graf kipas dan graf helm untuk pola distribusi minyak goreng. Demikian juga Nanang [15] mencari nilai maksimum dan minimum pelabelan $\gamma$ pada graf *umbrella*. Hal serupa juga dilakukan oleh Rosyida [14] yang melanjutkan dengan mencari nilai maksimum dan minimum pelabelan $\gamma$ pada graf pohon pisang dan graf persahabatan.

Penelitian-penelitian tersebut telah mendorong penulis untuk mencari pelabelan $\gamma$ pada kelas graf lainnya. Kelas graf yang akan diteliti penulis adalah graf *double cones*, graf lintang dan graf tangga. Ketiga kelas graf ini belum pernah diteliti oleh para peneliti sebelumnya. Graf *double cones* adalah graf yang diperoleh dari *join cycle* $C_n$ dan komplemen $K_2$. Graf lintang adalah graf yang dibangun dari *join* komplemen $K_2$ dan komplemen $K_m$. Sedangkan graf tangga merupakan graf yang dibangun dari *product* graf *path* $P_2$ dan $P_n$.

## 1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, dapat disusun perumusan masalah

1. bagaimana menentukan pelabelan $\gamma$ pada graf *double cones*,
2. bagaimana menentukan pelabelan $\gamma$ pada graf lintang,
3. bagaimana menentukan pelabelan $\gamma$ pada graf tangga.

## 1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah

1. dapat menentukan pelabelan $\gamma$ pada graf *double cones*,
2. dapat menentukan pelabelan $\gamma$ pada graf lintang,
3. dapat menentukan pelabelan $\gamma$ pada graf tangga.

## 1.4 Manfaat

Manfaat dari penulisan skripsi ini yaitu dapat memperoleh rumus umum nilai maksimum dan minimum pelabelan $\gamma$ pada graf *double cones*, graf lintang dan graf tangga. Hasil penelitian ini dapat menambah wawasan pengetahuan, khususnya bagi teori graf di bidang pelabelan $\gamma$.

# Bab II

# LANDASAN TEORI

Pada penelitian diperlukan dasar-dasar teori agar tujuannya dapat tercapai. Dasar-dasar teori harus tepat dan sesuai dengan penelitian yang dilakukan. Oleh karena itu, perlu diuraikan teori-teori yang mendasari penelitian ini. Pada bab ini terdiri dari tiga sub bab. Sub bab pertama adalah tinjauan pustaka. Sub bab ini memuat hasil penelitian-penelitian yang dilakukan oleh peneliti sebelumnya dalam bidang pelabelan $\gamma$. Sub bab kedua berisi landasan teori yang memuat pengertian dasar graf, definisi operasi-operasi pada graf, kelas-kelas graf dan pelabelan $\gamma$. Sedangkan sub bab terakhir adalah kerangka pemikiran yang menjelaskan alur pemikiran penulis dalam melakukan penelitian .

## 2.1 Tinjauan Pustaka

Pelabelan $\gamma$ telah digunakan oleh beberapa peneliti dalam bidang teori graf terhadap beberapa kelas graf tertentu. Pola umum pelabelan $\gamma$ pada kelas-kelas graf tersebut telah diperoleh dari penelitian. Chartrand *et al.* [4] telah meneliti dan memperoleh pola umum pelabelan $\gamma$ pada graf *path* $P_n$, graf *cycle* $C_n$, graf lengkap $K_n$ dan graf *star* $K_{1,n-1}$. Nilai maksimum dan minimum pelabelan $\gamma$ pada kelas-kelas graf tersebut sebagai berikut.

1. Graf *path* $P_n$, $n \geq 2$
   (a) $val_{max}(P_n) = \lfloor \frac{n^2-2}{2} \rfloor$
   (b) $val_{min}(P_n) = n - 1$
2. Graf *cycle* $C_n$, $n \geq 3$
   (a) $val_{max}(C_n) = \frac{(n-1)(n-3)}{2}$ 

(b) $val_{min}(C_n) = 2(n-1)$

3. Graf lengkap $K_n$

   (a) $val_{max}(K_n) = \begin{cases} \frac{n(3n^3-5n^2+6n-4)}{24}, & n \text{ genap;} \\ \frac{(n^2-1)(3n^2-5n+6)}{24}, & n \text{ ganjil.} \end{cases}$

   (b) $val_{min}(K_n) = \binom{n+1}{3}$, $n \geq 3$

4. Graf *star* $K_{1,n-1}$, $n \geq 3$

   (a) $val_{max}(K_{1,n-1}) = \binom{n}{2}$

   (b) $val_{min}(K_{1,n-1}) = \binom{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}{2} + \binom{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}{2}$

Selanjutnya pada tahun 2007, Roswitha *et al.* [13] telah meneliti pelabelan $\gamma$ pada graf *petersen* $G$, yaitu graf 3-reguler dengan banyak *vertex* 10. Nilai minimum dan maksimum pelabelan $\gamma$ pada graf *petersen* $G$ diperoleh sebagai berikut.

1. $val_{min}(G) = \frac{n(n-1)}{2}$

2. $val_{max}(G) = \frac{n(n+2)}{2}$

Pada tahun 2009, Indriati dan Roswitha [9] melakukan penelitian pada graf *firecracker* $F_{2,n}$, graf *double-star* $S_{m,n}$ dan graf *n-Sun*. Graf *firecracker* $F_{2,n}$, graf *double-star* $S_{m,n}$ dan graf *n-Sun* tersebut diberi label dengan menggunakan pelabelan $\gamma$. Selanjutnya diperoleh nilai maksimum dan minimum pelabelan $\gamma$ pada graf *firecracker* $F_{2,n}$, graf *double-star* $S_{m,n}$ dan graf *n-Sun* sebagai berikut.

1. Graf *firecracker* $F_{2,n}$

   (a) $val_{max}(F_{2,n}) = \binom{2n}{n} + (n-1)^2$

   (b) $val_{min}(F_{2,n}) = \binom{n}{2} + \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$

2. Graf *double-star* $S_{m,n}$

   (a) $val_{max}(S_{m,n}) = \binom{m+n+2}{2} + (m)(n)$, $m \leq n$

(b) $val_{min}(S_{m,n}) = \begin{cases} \binom{\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor}{2} + \binom{\lceil \frac{n+3}{2} \rceil}{2} + \lceil \frac{m}{2} \rceil^2 + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, & n \text{ ganjil;} \\ \binom{\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor}{2} + \binom{\lceil \frac{n+3}{2} \rceil}{2} + \lceil \frac{m}{2} \rceil^2 + m, & n \text{ genap.} \end{cases}$

3. Graf *n-sun*

   (a) $val_{max}(G) = \frac{1}{2}(5n^2 + 2n)$, $n$ genap

   (b) $val_{min}(G) = 2(n-1) + n^2$

Selanjutnya Indriati [8] melanjutkan hasil-hasil penelitian sebelumnya pada kelas-kelas graf yang berbeda. Kelas-kelas graf tersebut adalah graf roda $W_n$, graf kipas $F_n$ dan graf helm $H_n$, serta menerapkannya pada pola distribusi minyak goreng. Penelitian tersebut memberikan hasil berupa pelabelan $\gamma$ pada graf roda $W_n$, graf kipas $F_n$ dan graf helm $H_n$. Nilai minimum dan maksimum pelabelan $\gamma$ pada graf graf roda $W_n$, graf kipas $F_n$ dan graf helm $H_n$ diperoleh dengan hasil sebagai berikut.

1. Graf roda $W_n$

   (a) $val_{min}(W_n) = \binom{\lceil \frac{n+2}{2} \rceil}{2} + \binom{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}{2} + 2n$

   (b) $val_{max}(W_n) \geq \begin{cases} \frac{5n^2-1}{2}, & n \text{ ganjil;} \\ \frac{5n^2+n}{2}, & n \text{ genap.} \end{cases}$

2. Graf kipas $F_n$

   (a) $val_{min}(F_n) = \binom{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}{2} + \binom{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}{2} + n$

   (b) $val_{max}(F_n) \geq \begin{cases} \frac{5n^2-n}{2}, & n \text{ ganjil;} \\ \frac{5n^2-n-2}{2}, & n \text{ genap.} \end{cases}$

3. Graf helm $H_n$

   (a) $val_{min}(H_n) = \binom{\lceil \frac{n+2}{2} \rceil}{2} + \binom{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}{2} + 2n + n^2 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

   (b) $val_{max}(H_n) \geq \begin{cases} \frac{12n^2-n-1}{2}, & n \text{ ganjil;} \\ \frac{12n^2+n}{2}, & n \text{ genap.} \end{cases}$

Demikian juga Nanang [15] meneliti pelabelan $\gamma$ pada kelas graf yang lain. Kelas graf tersebut adalah graf *umbrella* $U_{m,n}$. Selanjutnya dari penelitian tersebut dicari nilai maksimum dan minimum pelabelan $\gamma$ pada graf *umbrella* $U_{m,n}$, dengan hasil sebagai berikut.

1. Nilai maksimum
   (a) $val_{max}(U_{m,n}) \geq \frac{5m^2+n^2+6mn-8m-5n+1}{2} + \lceil \frac{n}{2} \rceil (\frac{1-m}{2})$, $m > 2$, $n > 1$, $m$ ganjil
   (b) $val_{max}(U_{m,n}) \geq \frac{5m^2+n^2+6mn-9m-5n+2}{2} + \lceil \frac{n}{2} \rceil (\frac{2-m}{2})$, $m > 2$, $n > 1$, $m$ genap
2. Nilai minimum
   (a) $val_{min}(U_{m,n}) \leq \frac{m^2+8m+4n-5}{4}$, $m$ ganjil
   (b) $val_{min}(U_{m,n}) \leq \frac{m^2+8m+4n-4}{4}$, $m$ genap

Hal serupa juga dilakukan oleh Rosyida [14] pada graf pohon pisang $B_{n,k}$ dan graf persahabatan $D_3^m$. Pelabelan $\gamma$ digunakan untuk memberi label pada graf pohon pisang $B_{n,k}$ dan graf persahabatan $D_3^m$. Nilai maksimum dan minimum pelabelan $\gamma$ pada graf pohon pisang $B_{n,k}$ dan graf persahabatan $D_3^m$ diperoleh sebagai berikut.

1. Graf pohon pisang $B_{n,k}$
   (a) $val_{max}(B_{2,k}) = 3k^2 - k - 2$, $n = 2$, $k \geq 4$
   (b) $val_{min}(B_{n,k}) = \begin{cases} n\binom{\frac{k}{2}+1}{2} + n\binom{\frac{k}{2}}{2} + k\lceil \frac{n^2-2n}{4} \rceil + n, & k \text{ genap;} \\ 2n\binom{\frac{k}{2}+1}{2} + k\lceil \frac{n^2-2n}{4} \rceil + n, & k \text{ ganjil.} \end{cases}$
2. Graf persahabatan $D_3^m$
   (a) $val_{max}(D_3^m) = \binom{2m+1}{2} + m^2$
   (b) $val_{min}(D_3^m) = 2\binom{m+1}{2} + 2\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$

## 2.2 Landasan Teori

Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh rumus umum nilai maksimum dan minimum pelabelan $\gamma$ pada graf *double cones*, graf lintang dan graf tangga. Oleh karena itu, beberapa definisi yang mendasari penelitian ini perlu diuraikan. Beberapa definisi tersebut yaitu pengertian dasar, operasi-operasi, kelas-kelas dan pelabelan $\gamma$ pada graf.

### 2.2.1 Pengertian Dasar Graf

Pengertian dasar graf meliputi definisi dari graf itu sendiri, sifat *adjacent* dan *incident*, derajat dari suatu *vertex*, $u-v$ *walk*, $u-v$ *trail*, $u-v$ *path*, *cycle*, dan graf lengkap.

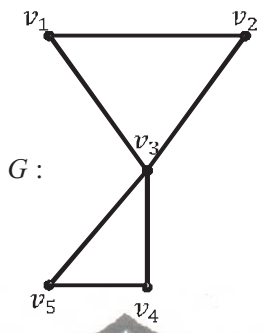
**Definisi 2.2.1.** (Chartrand dan Lesniak [2]) *Suatu graf $G$ adalah himpunan tak kosong berhingga titik $V(G)$=$\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ yang disebut vertex dan himpunan $E(G)$=$\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ merupakan himpunan pasangan tidak berurutan dari anggota-anggota $V(G)$ yang disebut edge.*

Setiap graf harus memuat minimal satu *vertex*, tetapi dimungkinkan tidak mempunyai *edge*. Graf yang himpunan *edge*-nya adalah himpunan kosong dinamakan graf kosong atau *null graph*. Banyaknya *vertex* pada suatu graf disebut dengan *order*, dinotasikan $|V(G)|$. Sedangkan banyaknya *edge* pada suatu graf disebut dengan *size*, dinotasikan $|E(G)|$.

**Definisi 2.2.2.** (Chartrand [1]) *Jika $u$ dan $v$ adalah sembarang 2 vertex dari graf $G$ yang dihubungkan oleh edge $e$, dinotasikan $e = (u, v)$, maka dikatakan $u$ dan $v$ adalah vertex yang saling adjacent. Selanjutnya vertex $u$ dan $v$ dikatakan incident dengan edge $e$, dan $e$ disebut join vertex $u$ dan $v$.*

Gambar 2.1 memperlihatkan bahwa *vertex* $v_1$ dan $v_3$ saling *adjacent*, sedangkan *vertex* $v_1$ dan $v_4$ tidak saling *adjacent*. Selanjutnya *vertex* $v_1$ dan $v_3$ *incident* terhadap *edge* $(v_1, v_3)$.

**Definisi 2.2.3.** (Harary [6]) *Derajat vertex $v_i$ dari graf $G$, dinotasikan dengan $deg_G v_i$, adalah banyaknya edge yang incident dengan $v_i$.*




Gambar 2.1. Graf $G$

Gambar 2.1 menunjukkan bahwa $deg_G v_1 = 2$, $deg_G v_2 = 2$, $deg_G v_3 = 4$, $deg_G v_4 = 2$ dan $deg_G v_5 = 2$.

**Definisi 2.2.4.** (Chartrand dan Lesniak [2]) *Suatu $u-v$ walk dari graf $G$ adalah barisan bergantian antara vertex dan edge yang dimulai dari vertex $u$ dan berakhir di vertex $v$, sehingga $e_i = (u_{i-1}, u_i)$ untuk $i = 1, 2, ..., n$. Suatu $u-v$ trail adalah $u-v$ walk dengan tidak mengulang sembarang edge. Suatu $u-v$ path adalah $u-v$ walk yang tidak mengulang sembarang vertex.*

Contoh $u-v$ *walk* dari graf $G$ pada Gambar 2.1 yaitu $v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, (v_3, v_4), v_4, (v_4, v_5), v_5, (v_5, v_3), v_3, (v_3, v_2), v_2$. Contoh $u-v$ *trail* adalah $v_1, (v_1, v_3), v_3, (v_3, v_5), v_5, (v_5, v_4), v_4, (v_4, v_3), v_3, (v_3, v_2), v_2$. Contoh $u-v$ *path* adalah $v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, (v_3, v_4), v_4, (v_4, v_5), v_5$.

**Definisi 2.2.5.** (Chartrand [1]) *Suatu $u-v$ trail dengan $u = v$, paling sedikit terdiri dari 3 vertex disebut circuit. Circuit yang tidak mengulang sembarang vertex disebut cycle.*

Contoh *circuit* pada Gambar 2.1 adalah $v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, (v_3, v_4), v_4, (v_4, v_5), v_5, (v_5, v_3), v_3, (v_3, v_1), v_1$. Sedangkan contoh *cycle* dari graf $G$ yaitu $v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, (v_3, v_1), v_1$.

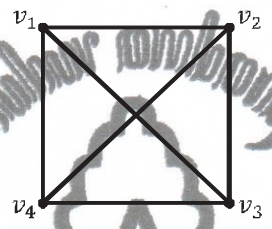
**Definisi 2.2.6.** (Chartrand [1]) *Suatu graf $G$ adalah terhubung (connected) jika setiap dua vertex $u = v$ atau $u \neq v$, maka terdapat $u$-$v$ path pada $G$.*

**Definisi 2.2.7.** (Wallis [16]) *Path merupakan suatu graf yang diperoleh dari suatu cycle $C_n$ dengan menghapus salah satu edge dan dinotasikan dengan $P_n$.*

**Definisi 2.2.8.** (Chartrand [1]) *Suatu graf dikatakan reguler jika setiap vertex dari graf $G$ mempunyai derajat yang sama.*

**Definisi 2.2.9.** (Chartrand [1]) *Suatu graf yang mempunyai order $n$ dan merupakan $(n-1)$-reguler disebut sebagai graf lengkap dan dinotasikan sebagai $K_n$.*

Graf lengkap $K_4$ pada Gambar 2.2 merupakan graf 3-reguler karena setiap *vertex*-nya mempunyai derajat yang sama yaitu 3.




Gambar 2.2. Graf lengkap $K_4$

### 2.2.2 Operasi pada Graf

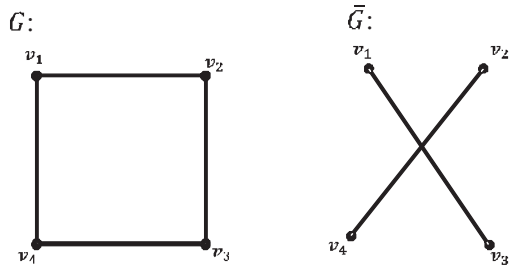
Suatu graf dapat dibentuk dengan cara menggunakan operasi-operasi tertentu dalam graf. Operasi-operasi tersebut adalah komplemen dari suatu graf, *union*, *join* dan *product* dari dua graf. Notasi dan terminologi dari operasi graf tersebut mengikuti Chartrand dan Oellermann [3].

**Definisi 2.2.10.** *Komplemen dari graf $G$, dinotasikan $\overline{G}$, adalah graf dengan himpunan vertex $V(\overline{G}) = V(G)$ sedemikian hingga $(u, v)$ adalah edge dari $\overline{G}$ jika dan hanya jika $(u, v)$ bukan edge dalam $G$.*

Contoh dari operasi komplemen suatu graf dapat dilihat pada Gambar 2.3.

**Definisi 2.2.11.** *Union dari $G_1$ dan $G_2$, dinotasikan $G_1 \cup G_2$, adalah graf dengan $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$.*

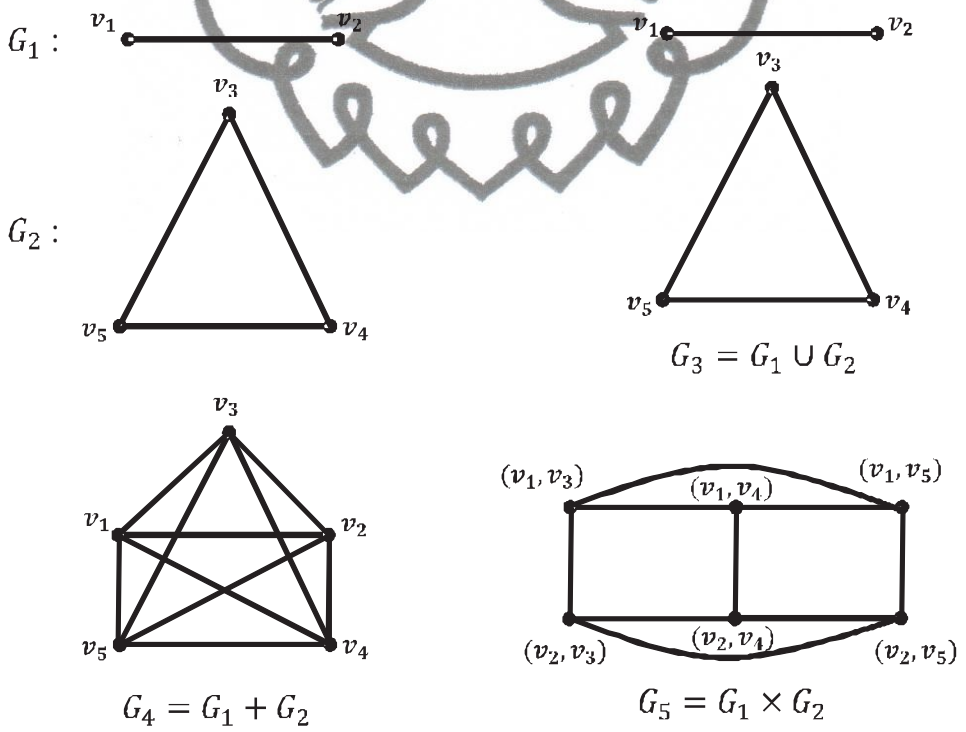
**Definisi 2.2.12.** *Join dari $G_1$ dan $G_2$, dinotasikan $G_1 + G_2$, adalah graf yang terdiri dari union $G_1 \cup G_2$ bersama-sama dengan semua edge $(v_i, v_j)$, dimana $v_i \in V(G_1)$ dan $v_j \in V(G_2)$ dengan $i, j = 1, 2, 3, \ldots$.*




Gambar 2.3. Graf $G$ (kiri) dan komplemen dari graf $G$ (kanan)

**Definisi 2.2.13.** *Product dari $G_1$ dan $G_2$, dinotasikan $G_1 \times G_2$, merupakan graf yang memiliki himpunan vertex $V(G_1) \times V(G_2)$ dan dua vertex $(u_1, u_2)$ dan $(v_1, v_2)$ adjacent dalam $G_1 \times G_2$ jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $(u_2, v_2) \in E(G_2)$, atau $u_2 = v_2$ dan $(u_1, v_1) \in E(G_1)$.*

Contoh dari operasi *union*, *join*, dan *product* dari dua graf dapat dilihat pada Gambar 2.4.



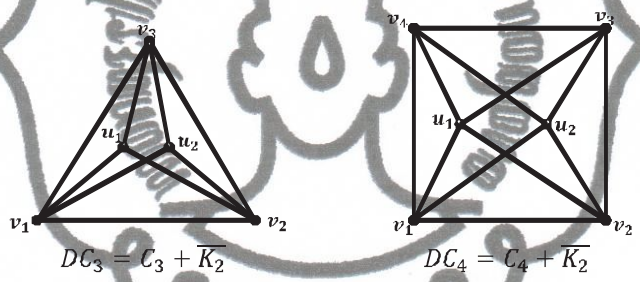

Gambar 2.4. *Union*, *join*, dan *product* dari dua graf

### 2.2.3 Kelas-Kelas Graf

Graf dapat dibagi ke dalam kelas-kelas graf, antara lain graf *path*, graf *cycle*, graf lengkap, graf *tree*, graf pohon pisang, graf *firecracker*, graf *double star*, graf *double cones*, graf lintang, graf tangga dan lain sebagainya. Berikut akan diuraikan definisi dari kelas graf *double cones*, graf lintang dan graf tangga.

**Definisi 2.2.14.** (Redl [12]) *Graf double cones, dinotasikan $DC_n$, adalah join dari cycle $C_n$ dan komplemen $K_2$, sehingga dapat dituliskan $DC_n = C_n + \overline{K_2}$, untuk $n \geq 3$.*

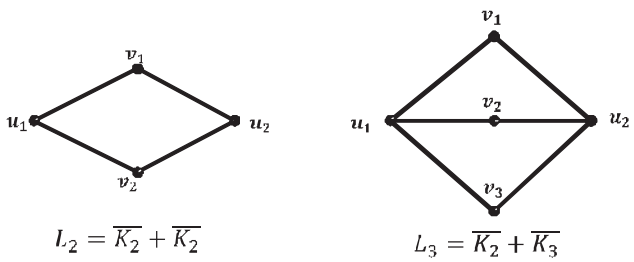
Contoh dari graf *double cones* dapat dilihat pada Gambar 2.5.




Gambar 2.5. Graf *double cones* $DC_3$ dan $DC_4$

**Definisi 2.2.15.** (Nurdin *et al.* [10]) *Graf lintang , dinotasikan $L_n$, adalah graf yang dibangun dari join antara komplemen $K_2$ dan komplemen $K_n$, sehingga dapat dituliskan $L_n = \overline{K_2} + \overline{K_n}$, untuk $n \geq 1$.*

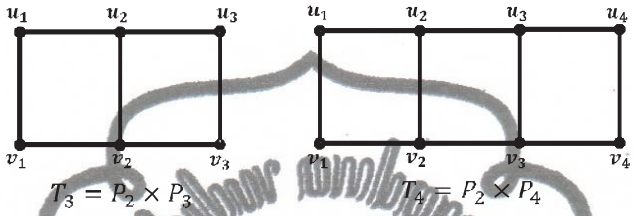
Contoh dari graf lintang dapat dilihat pada Gambar 2.6.




Gambar 2.6. Graf lintang $L_2$ dan $L_3$

**Definisi 2.2.16.** (Hosoya dan Harary [7]) *Graf tangga, dinotasikan $T_n$, adalah graf yang dibangun dari product graf path $P_2$ dan $P_n$, sehingga dapat dituliskan $T_n = P_2 \times P_n$, untuk $n \geq 2$.*

Contoh dari graf tangga dapat dilihat pada Gambar 2.7.




Gambar 2.7. Graf tangga $T_3$ dan $T_4$

### 2.2.4 Pelabelan $\gamma$

Menurut Wallis [16], pelabelan suatu graf merupakan suatu pemetaan yang memetakan setiap elemen graf (*vertex, edge, vertex* dan *edge*) ke suatu bilangan yang selalu positif atau bilangan bulat non negatif. Pelabelan *vertex* adalah pelabelan hanya untuk himpunan *vertex*. Sedangkan pelabelan *edge* adalah pelabelan hanya untuk himpunan *edge*. Pelabelan yang terdiri dari semua himpunan *vertex* dan *edge* disebut sebagai pelabelan total.

**Definisi 2.2.17.** (Chartrand *et al.* [4]) *Pelabelan $\gamma$ suatu graf dengan order $|V(G)|$ dan size $|E(G)|$ didefinisikan sebagai fungsi satu-satu $f : V(G) \to \{0, 1, 2, ..., |E(G)|\}$ yang menurunkan pelabelan $f' : E(G) \to \{1, 2, ..., |E(G)|\}$, sebagai label edge yang diperoleh dari selisih label vertex pada kedua ujung edge, dinotasikan sebagai $f'(e) = |f(u) - f(v)|$ untuk setiap edge $e = (u, v)$ pada $G$.*

**Definisi 2.2.18.** (Chartrand *et al.* [4]) *Suatu graf yang mempunyai order $|V(G)|$ dan size $|E(G)|$, ditentukan sebuah nilai pada pelabelan $\gamma$ yang dinotasikan dengan $val(f)$, didefinisikan sebagai $val(f) = \sum_{e \in E(G)} f'(e)$.*

**Definisi 2.2.19.** (Chartrand *et al.* [4]) *Suatu graf yang mempunyai order $|V(G)|$ dan size $|E(G)|$, ditentukan sebuah nilai maksimum dari pelabelan $\gamma$ pada $G$*

*didefinisikan sebagai* $val_{max}(G) = max\{val(f)\}$. *Sedangkan nilai minimum dari pelabelan* $\gamma$ *pada* $G$ *didefinisikan sebagai* $val_{min}(G) = min\{val(f)\}$, *dengan* $f$ *adalah pelabelan* $\gamma$ *pada* $G$.

**Definisi 2.2.20.** (Chartrand *et al.* [4]) *Sebuah pelabelan* $\gamma$ *pada* $G$ *disebut pelabelan maksimum* $\gamma$ *jika* $val(f) = val_{max}(G)$ *dan sebuah pelabelan* $\gamma$ *pada* $G$ *disebut pelabelan minimum* $\gamma$ *jika* $val(f) = val_{min}(G)$.

**Definisi 2.2.21.** (Chartrand *et al.* [4]) *Untuk bilangan bulat* $p$ *dan* $m$ *dengan* $1 \leq p-1 \leq m \leq \binom{p}{2}$ *diberikan himpunan* $S = \{1, 2, ..., p-1\}$ *dan* $\alpha(p, m) = max\{k \in S : \sum_{i=1}^{k}(p-i) \leq m\}$.

**Proposisi 2.2.1.** (Chartrand *et al.* [4]) *Jika* $G$ *adalah graf terhubung dengan order* $p$, *size* $m$ *dan* $\alpha(p, m) = k$, *maka batas bawah nilai minimum pelabelan* $\gamma$ *yaitu*

$$val_{min}(G) \geq \left\lceil \binom{k+1}{2}(p + \frac{k+2}{3}) + (m - pk)(k+1) \right.$$

## 2.3 Kerangka Pemikiran

Berdasarkan tinjauan pustaka dan landasan teori, selanjutnya dapat disusun suatu kerangka pemikiran dalam penelitian ini. Untuk mendapatkan nilai minimum dan nilai maksimum pelabelan $\gamma$ dari graf *double cones*, graf lintang dan graf tangga yang merupakan penyelesaian dari penelitian ini, terlebih dahulu memberi label pada tiap *vertex*. Pelabelan tiap *vertex* dapat dimulai dari bilangan 0 sampai bilangan yang menunjukkan banyaknya *edge* pada graf tersebut. Selanjutnya menentukan label setiap *edge* $f'(e)$ dengan mencari selisih label *vertex* pada kedua ujung *edge*. Nilai dari pelabelan $\gamma$ diperoleh dengan cara menjumlahkan $f'(e)$. Nilai yang diperoleh berjumlah lebih dari satu. Dari nilai-nilai tersebut dapat ditentukan nilai minimum dan maksimum dari graf *double cones*, graf lintang dan graf tangga. Jika pola dari nilai minimum dan maksimum telah diperoleh, maka nilai minimum dan maksimum dapat dirumuskan. Selanjutnya ditentukan batas bawah nilai minimum pelabelan $\gamma$.

# Bab III

# METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah kajian pustaka yaitu dengan mengumpulkan referensi berupa buku-buku tentang pelabelan pada graf, skripsi, jurnal maupun tulisan-tulisan yang dimuat di situs web. Dari metode ini, penulis dapat menentukan rumus nilai minimum dan maksimum pelabelan $\gamma$ pada graf *double cones*, graf lintang dan graf tangga.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini diuraikan sebagai berikut.

1. Mengkaji ulang pengertian dasar graf *double cones*, graf lintang dan graf tangga.
2. Melakukan pelabelan pada graf *double cones*, graf lintang dan graf tangga.
3. Menentukan selisih label *vertex* pada kedua ujung *edge* yaitu $f'(e)$.
4. Menjumlahkan semua $f'(e)$ sampai ditemukan pola nilai minimum dan nilai maksimum untuk tiap-tiap graf.
5. Menentukan rumus umum nilai minimum dan nilai maksimum dari pelabelan $\gamma$ serta membuktikan kebenaran rumus yang telah diperoleh.
6. Menentukan batas bawah nilai minimum pelabelan $\gamma$.
7. Membuat analisis dan kesimpulan.

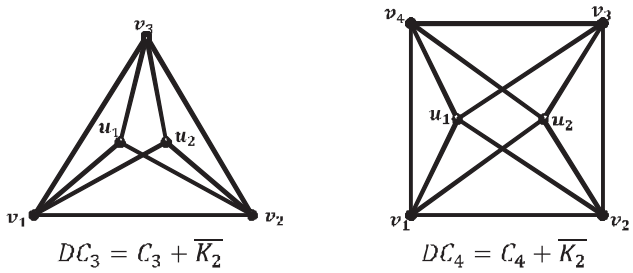
# Bab IV

# PEMBAHASAN

Dalam bab ini dibahas mengenai pelabelan $\gamma$ pada graf *double cones* $DC_n$, graf lintang $L_n$ dan graf tangga $T_n$, sehingga diperoleh rumus umum nilai maksimum dan minimum, disertai dengan pembuktian setiap rumus umum yang telah diperoleh tersebut.

## 4.1 Pelabelan $\gamma$ pada Graf *Double Cones* $DC_n$

Pada bagian ini dibahas mengenai pelabelan $\gamma$ untuk menentukan nilai maksimum dan minimum dari graf *double cones* $DC_n$. Graf *double cones* $DC_n$ adalah graf yang dibangun dari *join* dari *cycle* $C_n$ dan komplemen $K_2$. Andaikan graf *double cones* $DC_n$ mempunyai himpunan *vertex* $V(DC_n) = \{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ dengan $n \geq 3$. *Vertex* $u_1$ dan $u_2$ tidak *adjacent*, sedangkan *vertex-vertex* $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ membentuk *cycle* serta *adjacent* dengan *vertex* $u_1$ dan $u_2$. Bentuk umum graf *double cones* $DC_n$ dapat dilihat pada Gambar 4.1.




Gambar 4.1. Graf *double cones* $DC_3$ dan $DC_4$

**Teorema 4.1.1.** *Untuk semua bilangan bulat $n \geq 3$, berlaku*

$$val_{max}(DC_n) = \lfloor \frac{11n^2}{2} \rfloor.$$

*Bukti.* Jika $f$ adalah pelabelan $\gamma$ dari graf *double cones* $DC_n$, maka graf *double cones* $DC_n$ mempunyai pelabelan maksimum $\gamma$. Pelabelan maksimum $DC_n$ terdiri dari dua kasus, yaitu kasus $n$ ganjil dan kasus $n$ genap, dengan $n \geq 3$. Selanjutnya pelabelan $\gamma$ pada $DC_n$ didefinisikan sebagai berikut.

1. Kasus $n$ ganjil

Pelabelan maksimum $\gamma$ pada $DC_n$ dengan $n$ ganjil didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(u_i) &= i-1, & i &= 1,2 \\ f(v_i) &= 3n - \tfrac{1}{2}(i-1), & i &= 1,3,5,...,n \\ f(v_i) &= \tfrac{1}{2}i + 1, & i &= 2,4,6,...,n-1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Berdasarkan Definisi 2.2.16 dan 2.2.17, serta dengan (4.1) diperoleh $val_{max}$ pelabelan $\gamma$ graf *double cones* $DC_n$ yaitu

$$\begin{aligned} val_{max}(DC_n) &= val(f(u_1,v_i)) + val(f(u_2,v_i)) + val(f(v_i,v_{i+1})) + val(f(v_1,v_n)) \\ &= (3n - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2})) + (3n - (\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2})) + ... + (3n - (\tfrac{n}{2} - \tfrac{1}{2})) + (\tfrac{2}{2} + 1) \\ &\quad +(\tfrac{4}{2} + 1) + ... + (\tfrac{n-1}{2} + 1) + (3n - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}) - 1) + (3n - (\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}) \\ &\quad -1) + ... + (3n - (\tfrac{n}{2} - \tfrac{1}{2}) - 1) + (\tfrac{2}{2} + 1 - 1) + ... + (\tfrac{n-1}{2} + 1 - \\ &\quad 1) + (3n - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}) - (\tfrac{2}{2} + 1)) + (3n - (\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}) - (\tfrac{2}{2} + 1)) + (3n \\ &\quad -(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}) - (\tfrac{4}{2} + 1)) + ... + (3n - (\tfrac{n}{2} - \tfrac{1}{2}) - (\tfrac{n-1}{2} + 1)) + (3n - \\ &\quad (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}) - (3n - (\tfrac{n}{2} + \tfrac{1}{2}))) \\ &= (3n + (3n-1) + ... + (3n - (\tfrac{n-1}{2}))) + (2 + 3 + ... + \tfrac{n-1}{2} + 1) + \\ &\quad ((3n-1) + (3n-2) + ... + (3n - \tfrac{n-1}{2} - 1)) + (1 + ... + \tfrac{n-1}{2}) + \\ &\quad ((3n-2) + (3n-3) + (3n-4) + ... + (3n - \tfrac{n}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{n}{2} + \tfrac{1}{2} - \\ &\quad 1)) + (\tfrac{n-1}{2}) \\ &= \tfrac{\frac{n+1}{2}}{2}(3n + 3n - \tfrac{n-1}{2}) + \tfrac{\frac{n-1}{2}}{2}(2 + \tfrac{n-1}{2} + 1) + \tfrac{\frac{n+1}{2}}{2}(3n - 1 + 3n - \\ &\quad \tfrac{n-1}{2} - 1) + \tfrac{\frac{n-1}{2}}{2}(1 + \tfrac{n-1}{2}) + ((3n-2) + (3n-3) + (3n-4) \\ &\quad +... + 2n) + (\tfrac{n-1}{2}) \\ &= \tfrac{n+1}{4}(6n - \tfrac{n-1}{2}) + \tfrac{n-1}{4}(3 + \tfrac{n-1}{2}) + \tfrac{n+1}{4}(6n - \tfrac{n-1}{2} - 2) + \tfrac{n-1}{4}(1 + \\ &\quad \tfrac{n-1}{2}) + \tfrac{n-1}{2}(3n - 2 + 2n) + (\tfrac{n-1}{2}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{n+1}{4}(6n - \tfrac{n-1}{2} + 6n - \tfrac{n-1}{2} - 2) + \tfrac{n-1}{4}(3 + \tfrac{n-1}{2} + 1 + \tfrac{n-1}{2}) + \tfrac{n-1}{2}(3n \\
&\quad -2 + 2n + 1) \\
&= \tfrac{n+1}{4}(12n - (n-1) - 2) + \tfrac{n-1}{4}(4 + n - 1) + \tfrac{n-1}{2}(5n - 1) \\
&= \tfrac{n+1}{4}(11n - 1) + \tfrac{n-1}{4}(n + 3) + \tfrac{n-1}{2}(5n - 1) \\
&= \tfrac{11n^2+10n-1}{4} + \tfrac{n^2+2n-3}{4} + \tfrac{n-1}{2}(5n - 1) \\
&= \tfrac{11n^2+10n-1+n^2+2n-3+10n^2-12n+2}{4} \\
&= \tfrac{22n^2-2}{4} \\
&= \tfrac{11n^2-1}{2}.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

2. Kasus $n$ genap

Selanjutnya pelabelan maksimum $\gamma$ pada $DC_n$ dengan $n$ genap adalah sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
f(u_i) &= i - 1, & i &= 1, 2 \\
f(v_i) &= 3n - \tfrac{1}{2}(i - 1), & i &= 1, 3, 5, ..., n - 1 \\
f(v_i) &= \tfrac{1}{2}i + 1, & i &= 2, 4, 6, ..., n
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Berdasarkan Definisi 2.2.16 dan 2.2.17, serta dengan (4.3) diperoleh $val_{max}$ pelabelan $\gamma$ graf *double cones* $DC_n$ yaitu

$$
\begin{aligned}
val_{max}(DC_n) &= val(f(u_1, v_i)) + val(f(u_2, v_i)) + val(f(v_i, v_{i+1})) + val(f(v_1, v_n)) \\
&= (3n - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2})) + (3n - (\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2})) + ... + (3n - (\tfrac{n-1}{2} - \tfrac{1}{2})) + (\tfrac{2}{2} + \\
&\quad 1) + (\tfrac{4}{2} + 1) + ... + (\tfrac{n}{2} + 1) + (3n - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}) - 1) + (3n - (\tfrac{3}{2} - \\
&\quad \tfrac{1}{2}) - 1) + ... + (3n - (\tfrac{n-1}{2} - \tfrac{1}{2}) - 1) + (\tfrac{2}{2} + 1 - 1) + ... + (\tfrac{n}{2} + \\
&\quad 1 - 1) + (3n - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}) - (\tfrac{2}{2} + 1)) + (3n - (\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}) - (\tfrac{2}{2} + 1)) \\
&\quad +(3n - (\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}) - (\tfrac{4}{2} + 1)) + ... + (3n - (\tfrac{n-1}{2} - \tfrac{1}{2}) - (\tfrac{n}{2} + 1)) + \\
&\quad (3n - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}) - (\tfrac{n}{2} + 1)) \\
&= (3n + (3n - 1) + ... + (3n - (\tfrac{n-2}{2}))) + (2 + 3 + ... + \tfrac{n}{2} + 1) + \\
&\quad ((3n - 1) + (3n - 2) + ... + (3n - \tfrac{n-2}{2} - 1)) + (1 + 2 + ... + \tfrac{n}{2}) \\
&\quad ((3n - 2) + (3n - 3) + (3n - 4) + ... + (3n - (\tfrac{n-2}{2}) - (\tfrac{n+2}{2}))) \\
&\quad +(3n - \tfrac{n}{2} - 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{\frac{n}{2}}{2}(3n+3n-\tfrac{n-2}{2})+\tfrac{\frac{n}{2}}{2}(2+\tfrac{n}{2}+1)+\tfrac{\frac{n}{2}}{2}(3n-1+3n-\tfrac{n-2}{2}-1)+\tfrac{\frac{n}{2}}{2}(1+\\
&\quad \tfrac{n}{2})+\tfrac{n-1}{2}(3n-2+3n-(\tfrac{n-2}{2})-(\tfrac{n+2}{2}))+(3n-\tfrac{n}{2}-1)\\
&= \tfrac{n}{4}(\tfrac{12n-n+2}{2})+\tfrac{n}{4}(\tfrac{n+6}{2})+\tfrac{n}{4}(\tfrac{12n-4-n+2}{2})+\tfrac{n}{4}(\tfrac{n+2}{2})+\tfrac{n-1}{2}(6n-2-\tfrac{n}{2}+1\\
&\quad -\tfrac{n}{2}-1)+(\tfrac{6n-n-2}{2})\\
&= \tfrac{n}{4}(\tfrac{11n+2}{2})+\tfrac{n}{4}(\tfrac{n+6}{2})+\tfrac{n}{4}(\tfrac{11n-2}{2})+\tfrac{n}{4}(\tfrac{n+2}{2})+\tfrac{n-1}{2}(5n-2)+\tfrac{5n-2}{2}\\
&= \tfrac{n}{4}(\tfrac{11n+2+n+6+11n-2+n+2}{2})+(\tfrac{n-1}{2}+\tfrac{1}{2})(5n-2))\\
&= \tfrac{n(24n+8)}{8}+\tfrac{n}{2}(5n-2)\\
&= 3n^2+n+\tfrac{5n^2-2n}{2}\\
&= \tfrac{6n^2+2n+5n^2-2n}{2}\\
&= \tfrac{11n^2}{2}.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Dari $val_{max}(DC_n)$ (4.2) dan (4.4) diperoleh bahwa

$$val_{max}(DC_n) = \lfloor \frac{11n^2}{2} \rfloor.$$

Dengan demikian teorema terbukti. □

**Teorema 4.1.2.** *Untuk semua bilangan bulat $n \geq 3$, berlaku*

$$val_{min}(DC_n) = \lfloor \frac{n^2+8n+4}{2} \rfloor.$$

*Bukti.* Jika $f$ adalah pelabelan $\gamma$ dari graf *double cones* $DC_n$, maka graf *double cones* $DC_n$ mempunyai pelabelan minimum $\gamma$, dengan $n \geq 3$. Didefinisikan pelabelan minimum $\gamma$ pada $DC_n$ adalah sebagai berikut.

1. Kasus $n$ ganjil

Pelabelan minimum $\gamma$ pada $DC_n$ dengan $n$ ganjil didefinisikan sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
f(u_i) &= \tfrac{n-1}{2}+2i-2, && i=1,2\\
f(v_i) &= i-1, && i=1,2,3,...,\tfrac{n-1}{2}\\
f(v_i) &= i, && i=\tfrac{n+1}{2}\\
f(v_i) &= i+1, && i=\tfrac{n+1}{2}+1,\tfrac{n+1}{2}+2,\tfrac{n+1}{2}+3,...,n
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Berdasarkan Definisi 2.2.16 dan 2.2.17, serta dengan (4.5) diperoleh $val_{min}$ pelabelan $\gamma$ graf *double cones* $DC_n$ yaitu



$$val_{min}(DC_n) = val(f(u_1,v_i))+val(f(u_2,v_i))+val(f(v_i,v_{i+1}))+val(f(v_1,v_n))$$

$$
\begin{aligned}
= \; & ((\tfrac{n-1}{2}-0)+(\tfrac{n-1}{2}-1)+(\tfrac{n-1}{2}-2)+...+(\tfrac{n-1}{2}-(\tfrac{n-1}{2}-1)))+ \\
& (\tfrac{n+1}{2}-(\tfrac{n-1}{2}))+((\tfrac{n+1}{2}+1+1-\tfrac{n-1}{2})+(\tfrac{n+1}{2}+2+1-\tfrac{n-1}{2})+ \\
& ...+(n+1-\tfrac{n-1}{2}))+((\tfrac{n-1}{2}+2-0)+(\tfrac{n-1}{2}+2-1)+(\tfrac{n-1}{2}+ \\
& 2-2)+...+(\tfrac{n-1}{2}+2-(\tfrac{n-1}{2}-1)))+(\tfrac{n-1}{2}+2-(\tfrac{n+1}{2}))+(( \\
& \tfrac{n+1}{2}+1+1-(\tfrac{n-1}{2}+2))+(\tfrac{n+1}{2}+2+1-(\tfrac{n-1}{2}+2))+...+ \\
& (n+1-(\tfrac{n-1}{2}+2)))+((1-0)+(2-1)+...+(\tfrac{n-1}{2}-(\tfrac{n-1}{2} \\
& -1)))+(\tfrac{n+1}{2}-(\tfrac{n-1}{2}-1))+(\tfrac{n+1}{2}+1+1-\tfrac{n+1}{2})+((\tfrac{n+1}{2}+ \\
& 2+1-(\tfrac{n+1}{2}+1+1))+(\tfrac{n+1}{2}+3+1-(\tfrac{n+1}{2}+2+1))+...+ \\
& (n+1-(n-1+1)))+(n+1-0) \\
= \; & \tfrac{\frac{n-1}{2}}{2}(1+\tfrac{n-1}{2})+1+\tfrac{\frac{n-1}{2}}{2}(3+\tfrac{n+3}{2})+\tfrac{\frac{n-1}{2}}{2}(3+\tfrac{n+3}{2})+1+\tfrac{\frac{n-1}{2}}{2} \\
& (1+\tfrac{n-1}{2})+(\tfrac{n-1}{2}-1)+2+2+(\tfrac{n-1}{2}-1)+(n+1) \\
= \; & \tfrac{n-1}{4}(1+\tfrac{n-1}{2}+3+\tfrac{n+3}{2}+3+\tfrac{n+3}{2}+1+\tfrac{n-1}{2})+2+2(\tfrac{n-1}{2}-1) \\
& +4+n+1 \\
= \; & \tfrac{n-1}{4}(8+\tfrac{n-1+n-1+n+3+n+3}{2})+7+n+n-1-2 \\
= \; & \tfrac{n-1}{4}(8+\tfrac{4n+4}{2})+2n+4 \\
= \; & \tfrac{n-1}{4}(10+2n)+2n+4 \\
= \; & \tfrac{n-1}{2}(n+5)+2n+4 \\
= \; & \tfrac{n^2+4n-5}{2}+\tfrac{4n+8}{2} \\
= \; & \tfrac{n^2+8n+3}{2}.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

2. Kasus $n$ genap

Selanjutnya pelabelan minimum $\gamma$ pada $DC_n$ dengan $n$ genap adalah sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
f(u_i) &= \tfrac{n}{2}+i-1, && i=1,2 \\
f(v_i) &= i-1, && i=1,2,3,...,\tfrac{n}{2} \\
f(v_i) &= i+1, && i=\tfrac{n}{2}+1,\tfrac{n}{2}+2,\tfrac{n}{2}+3,...,n
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Berdasarkan Definisi 2.2.16 dan 2.2.17, serta dengan (4.7) diperoleh $val_{min}$ pelabelan $\gamma$ graf *double cones* $DC_n$ yaitu

$$
\begin{aligned}
val_{min}(DC_n) &= val(f(u_1,v_i))+val(f(u_2,v_i))+val(f(v_i,v_{i+1}))+val(f(v_1,v_n)) \\
&= ((\tfrac{n}{2}-0)+(\tfrac{n}{2}-1)+(\tfrac{n}{2}-2)+...+(\tfrac{n}{2}-(\tfrac{n}{2}-1)))+((\tfrac{n}{2}+1+ \\
& 1-\tfrac{n}{2})+(\tfrac{n}{2}+2+1-\tfrac{n}{2})+...+(n+1-\tfrac{n}{2}))+((\tfrac{n}{2}+1-0)+ \\
& (\tfrac{n}{2}+1-1)+(\tfrac{n}{2}+1-2)+...+(\tfrac{n}{2}+1-(\tfrac{n}{2}-1)))+((\tfrac{n}{2}+1+
\end{aligned}
$$

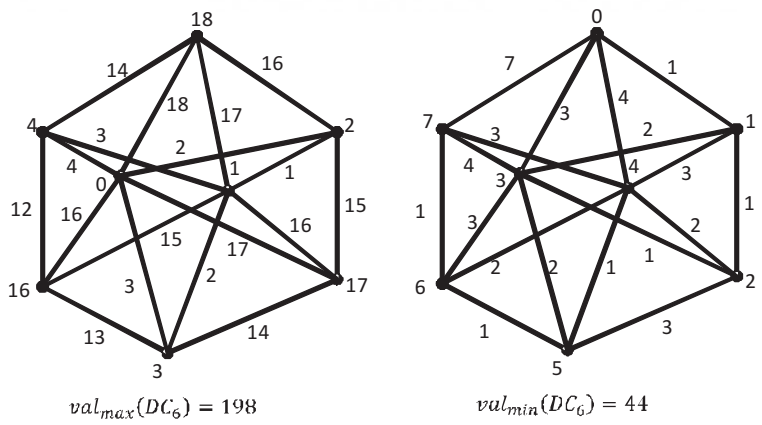
$$
\begin{aligned}
& 1-(\tfrac{n}{2}+1))+(\tfrac{n}{2}+2+1-(\tfrac{n}{2}+1))+...+(n+1-(\tfrac{n}{2}+1))) \\
& +((1-0)+(2-1)+...+((\tfrac{n}{2}-1)-(\tfrac{n}{2}-1-1)))+(\tfrac{n}{2}+1+ \\
& 1-(\tfrac{n}{2}-1))+((\tfrac{n}{2}+2+1-(\tfrac{n}{2}+1+1))+(\tfrac{n}{2}+3+1-(\tfrac{n}{2}+ \\
& 2+1))+...+(n+1-(n-1+1)))+(n+1-0) \\
= \; & \tfrac{\frac{n}{2}}{2}(1+\tfrac{n}{2})+\tfrac{\frac{n}{2}}{2}(3+\tfrac{n}{2})+\tfrac{\frac{n}{2}}{2}(3+\tfrac{n}{2})+1+\tfrac{\frac{n}{2}}{2}(1+\tfrac{n}{2})+(\tfrac{n}{2}-1)+ \\
& 3+(\tfrac{n}{2}-1)+(n+1) \qquad (4.8) \\
= \; & \tfrac{n}{4}(1+\tfrac{n}{2}+3+\tfrac{n}{2}+3+\tfrac{n}{2}+1+\tfrac{n}{2})+2(\tfrac{n}{2}-1)+3+n+1 \\
= \; & \tfrac{n}{4}(8+2n)+n-2+n+4 \\
= \; & \tfrac{n}{2}(n+4)+2n+2 \\
= \; & \tfrac{n^2+4n}{2}+\tfrac{4n+4}{2} \\
= \; & \tfrac{n^2+8n+4}{2}.
\end{aligned}
$$

Dari $val_{min}(DC_n)$ (4.6) dan (4.8) diperoleh bahwa

$$val_{min}(DC_n) = \lfloor \frac{n^2+8n+4}{2} \rfloor.$$

Dengan demikian teorema terbukti. □

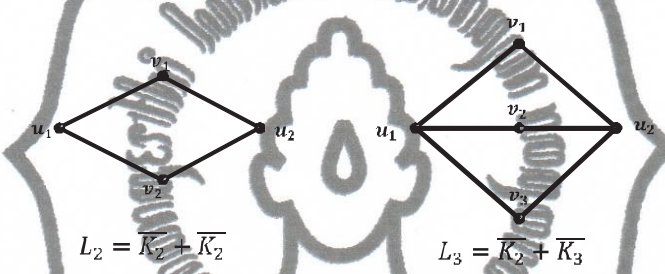
Pada Gambar 4.2 ditunjukkan pelabelan maksimum dan minimum $\gamma$ pada graf *double cones* $DC_6$.




Gambar 4.2. Nilai maksimum dan minimum pelabelan $\gamma$ pada graf *double cones* $DC_6$

## 4.2 Pelabelan $\gamma$ pada Graf Lintang $L_n$

Pada bagian ini dibahas mengenai pelabelan $\gamma$ untuk menentukan nilai maksimum dan minimum dari graf lintang $L_n$. Graf lintang $L_n$ adalah graf yang dibangun dari *join* antara komplemen $K_2$ dan komplemen dari graf $K_n$. Andaikan graf lintang $L_n$ mempunyai himpunan *vertex* $V_1 = \{u_1, u_2\}$ sebagai *vertex* kutub dan $V_2 = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ sebagai *vertex* lintang, dengan $n \geq 1$. *Vertex* $u_1$ dan $u_2$ tidak *adjacent*, sedangkan *vertex-vertex* $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ *adjacent* dengan *vertex* $u_1$ dan $u_2$. Bentuk umum graf lintang $L_n$ dapat dilihat pada Gambar 4.3.




Gambar 4.3. Graf lintang $L_2$ dan $L_3$

**Teorema 4.2.1.** *Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, berlaku*

$$val_{max}(L_n) = 3n^2.$$

*Bukti.* Jika $f$ adalah pelabelan $\gamma$ dari graf lintang $L_n$, maka graf lintang $L_n$ mempunyai pelabelan maksimum $\gamma$ jika *vertex* $u_1$ dan $u_2$ dilabeli dengan label $2n-1$ dan $2n$. Didefinisikan pelabelan $\gamma$ pada $L_n$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(u_1) &= 2n-1 \\ f(u_2) &= 2n \\ f(v_i) &= i-1, \qquad i = 1, 2, 3, ..., n \end{aligned} \tag{4.9}$$

Berdasarkan Definisi 2.2.16 dan 2.2.17, serta dengan (4.9) diperoleh $val_{max}$ pelabelan $\gamma$ graf lintang $L_n$ yaitu

$$\begin{aligned} val_{max}(L_n) &= val(f(u_1, v_i)) + val(f(u_2, v_i)) \\ &= ((2n-1-0) + (2n-1-1) + (2n-1-2) + ... + (2n-1-(n \\ &\quad -1))) + ((2n-0) + (2n-1) + (2n-2) + ... + (2n-(n-1))) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ((2n-1)+(2n-2)+(2n-3)+...+(2n-n))+(2n+(2n-\\
&\quad 1)+(2n-2)+...+(2n-(n-1)))\\
&= n.2n-(1+2+3+...+n)+n.2n-(1+2+3+...+n-1)\\
&= 2n^2-\tfrac{n}{2}(1+n)+2n^2-\tfrac{n-1}{2}(1+n-1)\\
&= 2n^2-\tfrac{n^2+n}{2}+2n^2-\tfrac{n^2-n}{2}\\
&= 4n^2-\tfrac{n^2+n+n^2+n}{2}\\
&= 4n^2-n^2\\
&= 3n^2.
\end{aligned}
$$

Dengan demikian teorema terbukti. □

**Teorema 4.2.2.** *Untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$, berlaku*

$$val_{min}(L_n) = \lfloor \frac{n^2+4n}{2} \rfloor.$$

*Bukti.* Jika $f$ adalah pelabelan $\gamma$ dari graf lintang $L_n$, maka graf lintang $L_n$ mempunyai pelabelan minimum $\gamma$, dengan $n \geq 1$. Didefinisikan pelabelan minimum $\gamma$ pada $L_n$ sebagai berikut.

1. Kasus $n$ ganjil

Pelabelan minimum $\gamma$ pada $L_n$ dengan $n$ ganjil didefinisikan sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
&f(u_i) = \tfrac{n-1}{2}+2i-2 && i = 1,2\\
&f(v_i) = i-1 && i = 1,2,3,...,\tfrac{n-1}{2}\\
&f(v_i) = i, && i = \tfrac{n-1}{2}+1\\
&f(v_i) = i+1 && i = \tfrac{n-1}{2}+2, \tfrac{n-1}{2}+3, ..., n
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Berdasarkan Definisi 2.2.16 dan 2.2.17, serta dengan (4.10) diperoleh $val_{min}$ pelabelan $\gamma$ graf lintang $L_n$ yaitu

$$
\begin{aligned}
val_{min}(L_n) &= val(f(u_1,v_i))+val(f(u_2,v_i))\\
&= ((\tfrac{n-1}{2}-0)+(\tfrac{n-1}{2}-1)+...+(\tfrac{n-1}{2}-(\tfrac{n-1}{2}-1)))+(\tfrac{n-1}{2}+1-\\
&\quad \tfrac{n-1}{2})+((\tfrac{n-1}{2}+2+1-\tfrac{n-1}{2})+(\tfrac{n-1}{2}+3+1-\tfrac{n-1}{2})+...+(n+\\
&\quad 1-\tfrac{n-1}{2}))+((\tfrac{n-1}{2}+2-0+(\tfrac{n-1}{2}+2-1)+...+(\tfrac{n-1}{2}+2-\\
&\quad (\tfrac{n-1}{2}-1)))+(\tfrac{n-1}{2}+2-(\tfrac{n-1}{2}+1))+((\tfrac{n-1}{2}+2+1-(\tfrac{n-1}{2}+\\
&\quad 2))+(\tfrac{n-1}{2}+3+1-(\tfrac{n-1}{2}+2))+...+(n+1-(\tfrac{n-1}{2}+2)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{\frac{n-1}{2}}{2}(1+\tfrac{n-1}{2})+1+\tfrac{\frac{n-1}{2}}{2}(3+\tfrac{n+3}{2})+\tfrac{\frac{n-1}{2}}{2}(3+\tfrac{n+3}{2})+1+\tfrac{\frac{n-1}{2}}{2}(1+\tfrac{n-1}{2})\\
&= \tfrac{n-1}{4}(1+\tfrac{n-1}{2}+3+\tfrac{n+3}{2}+3+\tfrac{n+3}{2}+1+\tfrac{n-1}{2})+2\\
&= \tfrac{n-1}{4}(8+2n+2)+2\\
&= \tfrac{n-1}{2}(n+5)+2\\
&= \tfrac{n^2+4n-5}{2}+2\\
&= \tfrac{n^2+4n-1}{2}.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

2. Kasus $n$ genap

Selanjutnya pelabelan minimum $\gamma$ pada $L_n$ dengan $n$ genap adalah sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
f(u_i) &= \tfrac{n}{2}+i-1 \quad & i &= 1,2\\
f(v_i) &= i-1 & i &= 1,2,3,...,\tfrac{n}{2}\\
f(v_i) &= i+1 & i &= \tfrac{n}{2}+1,\tfrac{n}{2}+2,...,n
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Berdasarkan Definisi 2.2.16 dan 2.2.17, serta dengan (4.12) diperoleh $val_{min}$ pelabelan $\gamma$ graf lintang $L_n$ yaitu

$$
\begin{aligned}
val_{min}(L_n) &= val(f(u_1,v_i))+val(f(u_2,v_i))\\
&= ((\tfrac{n}{2}-0)+(\tfrac{n}{2}-1)+...+(\tfrac{n}{2}-(\tfrac{n}{2}-1)))+((\tfrac{n}{2}+1+1-\tfrac{n}{2})+\\
&\quad (\tfrac{n}{2}+2+1-\tfrac{n}{2})+...+(n+1-\tfrac{n}{2}))+((\tfrac{n}{2}+1-0)(\tfrac{n}{2}+1-1)\\
&\quad +...+(\tfrac{n}{2}+1-(\tfrac{n}{2}-1)))+((\tfrac{n}{2}+1+1-(\tfrac{n}{2}+1))+(\tfrac{n}{2}+2+\\
&\quad 1-(\tfrac{n}{2}+1))+...+(n+1-(\tfrac{n}{2}+1)))\\
&= \tfrac{\frac{n}{2}}{2}(1+\tfrac{n}{2})+\tfrac{\frac{n}{2}}{2}(3+\tfrac{n}{2})+\tfrac{\frac{n}{2}}{2}(3+\tfrac{n}{2})+\tfrac{\frac{n}{2}}{2}(1+\tfrac{n}{2})\\
&= \tfrac{n}{4}(1+\tfrac{n}{2}+3+\tfrac{n}{2}+3+\tfrac{n}{2}+1+\tfrac{n}{2})\\
&= \tfrac{n}{4}(8+2n)\\
&= \tfrac{n}{2}(4+n)\\
&= \tfrac{n^2+4n}{2}.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

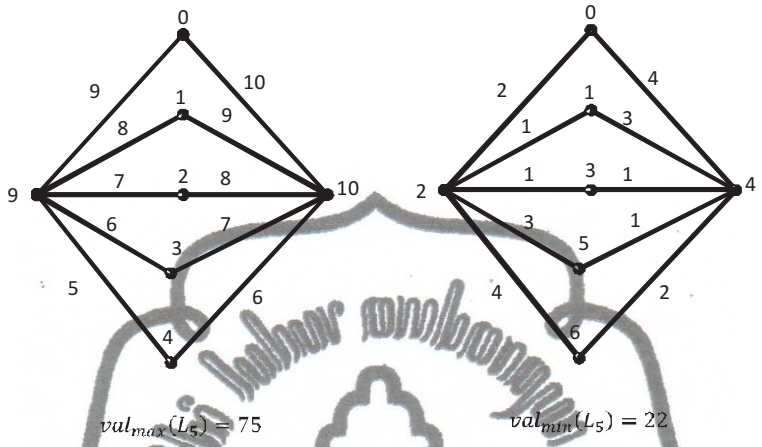
Dari $val_{min}(L_n)$ (4.11) dan (4.13) diperoleh bahwa

$$val_{min}(L_n) = \lfloor \frac{n^2+4n}{2} \rfloor.$$



Dengan demikian teorema terbukti. □

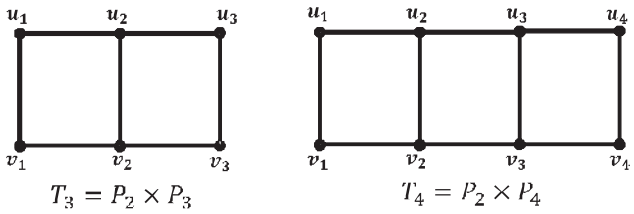
Pada Gambar 4.4 ditunjukkan pelabelan maksimum dan minimum $\gamma$ pada graf lintang $L_5$.




Gambar 4.4. Nilai maksimum dan minimum pelabelan $\gamma$ pada graf lintang $L_5$

## 4.3 Pelabelan $\gamma$ pada Graf Tangga $T_n$

Pada bagian ini dibahas mengenai pelabelan $\gamma$ untuk menentukan nilai maksimum dan minimum dari graf tangga $T_n$. Graf tangga $T_n$ adalah graf yang dibangun dari *product* graf *path* $P_2$ dan $P_n$, sehingga dapat dituliskan $T_n = P_2 \times P_n$, untuk $n \geq 2$. Andaikan graf tangga $T_n$ mempunyai himpunan *vertex* $V(T_n) = \{u_1, u_2, u_3, ..., u_n, v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$, dengan $n \geq 2$. *Vertex-vertex* yang *adjacent* yaitu $u_i$ dengan $u_{i+1}$, $v_i$ dengan $v_{i+1}$ dan $u_i$ dengan $v_i$. Bentuk umum graf tangga $T_n$ dapat dilihat pada Gambar 4.5.




Gambar 4.5. Graf tangga $T_3$ dan $T_4$

**Teorema 4.3.1.** *Untuk semua bilangan bulat $n \geq 2$, berlaku*



$$val_{max}(T_n) = 6n^2 - 5n - 2.$$

*Bukti.* Jika $f$ adalah pelabelan $\gamma$ dari graf tangga $T_n$, maka graf tangga $T_n$ mempunyai pelabelan maksimum $\gamma$. Didefinisikan pelabelan $\gamma$ pada $T_n$ dengan $n \geq 2$ adalah sebagai berikut.

1. Kasus $n$ genap

Pelabelan maksimum $\gamma$ pada $T_n$ dengan $n = 2k$ terdiri dari dua kasus yaitu $k$ ganjil dan $k$ genap.

a. Kasus $k$ ganjil

Pelabelan maksimum $\gamma$ pada $T_n$ dengan $n = 2k$ dan $k$ ganjil adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
f(u_i) &= n - 2i, & i &= 1, 3, 5, ..., k \\
f(u_i) &= 2n + 2i - 2, & i &= 2, 4, 6, ..., k - 1 \\
f(u_i) &= 4n - 2i - 1, & i &= k + 1, k + 3, k + 5, ..., 2k \\
f(u_i) &= 2i - n - 1, & i &= k + 2, k + 4, k + 6, ..., 2k - 1 \\
f(v_i) &= 2n + 2i - 2, & i &= 1, 3, 5, ..., k \\
f(v_i) &= n - 2i, & i &= 2, 4, 6, ..., k - 1 \\
f(v_i) &= 2i - n - 1, & i &= k + 1, k + 3, k + 5, ..., 2k \\
f(v_i) &= 4n - 2i - 1, & i &= k + 2, k + 4, k + 6, ..., 2k - 1
\end{aligned}$$

b. Kasus $k$ genap

Selanjutnya didefinisikan pelabelan maksimum $\gamma$ pada $T_n$ dengan $n = 2k$ dan $k$ genap adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
f(u_i) &= 2n + 2i - 2, & i &= 1, 3, 5, ..., k - 1 \\
f(u_i) &= n - 2i, & i &= 2, 4, 6, ..., k \\
f(u_i) &= 4n - 2i - 1, & i &= k + 1, k + 3, k + 5, ..., 2k - 1 \\
f(u_i) &= 2i - n - 1, & i &= k + 2, k + 4, k + 6, ..., 2k \\
f(v_i) &= n - 2i, & i &= 1, 3, 5, ..., k - 1 \\
f(v_i) &= 2n + 2i - 2, & i &= 2, 4, 6, ..., k \\
f(v_i) &= 2i - n - 1, & i &= k + 1, k + 3, k + 5, ..., 2k - 1 \\
f(v_i) &= 4n - 2i - 1, & i &= k + 2, k + 4, k + 6, ..., 2k
\end{aligned}$$

2. Kasus $n$ ganjil



Pelabelan maksimum $\gamma$ pada $T_n$ dengan $n = 2k + 1$ terdiri dari dua kasus yaitu

$k$ ganjil dan $k$ genap.

a. Kasus $k$ ganjil

Pelabelan maksimum $\gamma$ pada $T_n$ dengan $n = 2k + 1$ dan $k$ ganjil adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
f(u_i) &= 2n + 2i - 3, && i = 1, 3, 5, ..., k \\
f(u_i) &= n - 2i + 1, && i = 2, 4, 6, ..., k + 1 \\
f(u_i) &= 3n - 2i + 2k + 1, && i = k + 2, k + 4, k + 6, ..., 2k + 1 \\
f(u_i) &= 2i - n - 2, && i = k + 3, k + 5, k + 7, ..., 2k \\
f(v_i) &= n - 2i + 1, && i = 1, 3, 5, ..., k \\
f(v_i) &= 2n + 2i - 3, && i = 2, 4, 6, ..., k + 1 \\
f(v_i) &= 2i - n - 2, && i = k + 2, k + 4, k + 6, ..., 2k + 1 \\
f(v_i) &= 3n - 2i + 2k + 1, && i = k + 3, k + 5, k + 7, ..., 2k
\end{aligned}$$

b. Kasus $k$ genap

Pelabelan maksimum $\gamma$ pada $T_n$ dengan $n = 2k + 1$ dan $k$ genap adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
f(u_i) &= n - 2i + 1, && i = 1, 3, 5, ..., k + 1 \\
f(u_i) &= 2n + 2i - 3, && i = 2, 4, 6, ..., k \\
f(u_i) &= 3n - 2i + 2k + 1, && i = k + 2, k + 4, k + 6, ..., 2k \\
f(u_i) &= 2i - n - 2, && i = k + 3, k + 5, k + 7, ..., 2k + 1 \\
f(v_i) &= 2n + 2i - 3, && i = 1, 3, 5, ..., k + 1 \\
f(v_i) &= n - 2i + 1, && i = 2, 4, 6, ..., k \\
f(v_i) &= 2i - n - 2, && i = k + 2, k + 4, k + 6, ..., 2k \\
f(v_i) &= 3n - 2i + 2k + 1, && i = k + 3, k + 5, k + 7, ..., 2k + 1
\end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.2.16 dan 2.2.17, diperoleh $val_{max}$ pelabelan $\gamma$ graf tangga $T_n$ yaitu

$$\begin{aligned}
val_{max}(T_n) &= val(f(u_i, u_{i+1})) + val(f(v_i, v_{i+1})) + val(f(u_i, v_i)) \\
&= 2((2n + 4 - 2 - (n - 2)) + (2n + 4 - 2 - (n - 6)) + (2n + 8 - \\
&\quad 2 - (n - 6)) + ... + (2n + 2(\tfrac{n}{2} - 1) - 2 - (n - 2\tfrac{n}{2}))) + 2(4n - \\
&\quad 2(\tfrac{n}{2} + 1) - 1) + ((2n + 2 - 2 - (n - 2)) + (2n + 4 - 2 - (n - \\
&\quad 4)) + ... + (2n + 2\tfrac{n}{2} - 2 - (n - 2\tfrac{n}{2}))) + 2((4n - n - 3 - (n -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& n+3)) + (4n-n-7-(n-n+3)) + ... + (4n-2n-1- \\
& (2n-3-n))) + ((4n-n-3-(n-n+1)) + (4n-n-5- \\
& (n-n+3)) + ... + (4n-2n-1-(2n-1-n))) \\
= \; & 2((n+4)+(n+8)+(n+12)+...+(3n-4)) + 2(4n-n-2 \\
& -1) + ((n+2)+(n+6)+...+(3n-2)) + 2((3n-6)+(3n- \\
& 10)+...+(n+2)) + ((3n-4)+(3n-8)+...+n) \\
= \; & 2(\tfrac{\frac{n-2}{2}}{2}(n+4+3n-4)) + 2(4n-n-3) + \tfrac{\frac{n}{2}}{2}(n+2+3n-2)+ \\
& 2(\tfrac{\frac{n-2}{2}}{2}(3n-6+n+2)) + \tfrac{\frac{n}{2}}{2}(3n-4+n) \\
= \; & 2(\tfrac{n-2}{4}(4n)) + 2(3n-3) + \tfrac{n}{4}(4n) + 2(\tfrac{n-2}{4}(4n-4)) + \tfrac{n}{4}(4n-4) \\
= \; & 2(n^2-2n) + 2(3n-3) + n^2 + 2(n^2-3n+2) + n^2 - n \\
= \; & 2n^2 - 4n + 6n - 6 + n^2 + 2n^2 - 6n + 4 + n^2 - n \\
= \; & 6n^2 - 5n - 2.
\end{aligned}
$$

Dengan demikian teorema terbukti. □

**Teorema 4.3.2.** *Untuk semua bilangan bulat $n \geq 2$, berlaku*

$$val_{min}(T_n) = 5n - 4.$$

*Bukti.* Jika $f$ adalah pelabelan $\gamma$ dari graf tangga $T_n$, maka graf tangga $T_n$ mempunyai pelabelan minimum $\gamma$. Didefinisikan pelabelan $\gamma$ pada $T_n$ adalah sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
f(u_i) &= 2i-2, \quad i = 1,2,3,...,n \\
f(v_i) &= 2i-1, \quad i = 1,2,3,...,n
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

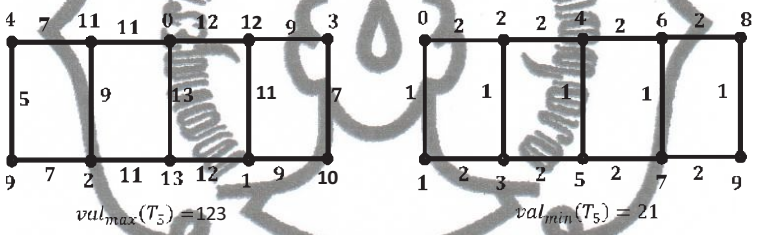
Berdasarkan Definisi 2.2.16 dan 2.2.17, serta dengan (4.14) diperoleh $val_{min}$ pelabelan $\gamma$ graf tangga $T_n$ yaitu

$$
\begin{aligned}
val_{min}(T_n) &= val(f(u_i,u_{i+1})) + val(f(v_i,v_{i+1})) + val(f(u_i,v_i)) \\
&= ((4-2-(2-2)) + (6-2-(4-2)) + (8-2-(6-2)) + ...+ \\
& (2n-2-(2(n-1)-2))) + ((4-1-(2-1)) + (6-1-(4-1 \\
& )) + (8-1-(6-1)) + ... + (2n-1-(2(n-1)-1))) + ((2 \\
& -1-(2-2)) + (4-1-(4-2)) + (6-1-(6-2)) + ... + (2n \\
& -1-(2n-2)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= ((2-0)+(4-2)+(6-4)+...+(2n-2-2n+2+2))+((3\\
&\quad -1)+(5-3)+(7-5)+...+(2n-1-2n+2+1))+((1-0)\\
&\quad +(3-2)+(5-4)+...+(2n-1-2n+2))\\
&= (2+2+2+...+2)+(2+2+2+...+2)+(1+1+1+...+1)\\
&= 2(n-1)+2(n-1)+n\\
&= 2n-2+2n-2+n\\
&= 5n-4.
\end{aligned}
$$

Dengan demikian teorema terbukti. □

Pada Gambar 4.6 ditunjukkan pelabelan maksimum dan minimum $\gamma$ pada graf tangga $T_5$.




Gambar 4.6. Nilai maksimum dan minimum pelabelan $\gamma$ pada graf tangga $T_5$

## 4.4 Batas Bawah Nilai Minimum Pelabelan $\gamma$

Nilai minimum pelabelan $\gamma$ pada graf *double cones*, graf lintang dan graf tangga yang telah diperoleh sebelumnya, akan ditentukan batas bawahnya. Batas bawah tersebut mengacu pada Definisi 2.2.21 dan Proposisi 2.2.1. Selanjutnya dibuktikan batas bawah pada Proposisi 2.2.1 tersebut berlaku untuk graf *double cones*, graf lintang dan graf tangga.

### 4.4.1 Batas bawah pada graf *double cones*

Graf *double cones* $DC_n$ dengan $n \geq 3$ mempunyai *order* $p = n+2$ dan *size* $m = 3n$. Berdasarkan Definisi 2.2.21, untuk bilangan bulat $p = n+2$ dan $m = 3n$ dengan $1 \leq n+1 \leq 3n \leq \binom{n+2}{2}$ diberikan himpunan $S = \{1, 2, ..., n+1\}$

dan $\alpha(p,m) = max\{k \in S : \sum_{i=1}^{k}(p-i) \leq m\} = 3$. Nilai $\alpha(p,m) = 3$ diperoleh dari

$$\begin{aligned}
\alpha(p,m) &= max\{k \in S : (n+2-1), ((n+2-1)+(n+2-2)), ((n+2-1)+ \\
&\quad (n+2-2)+(n+2-3)), ..., ((n+2-1)+(n+2-2)+(n+2- \\
&\quad 3)+...+(n+2-(n+1))) \leq 3n\} \\
&= max\{k \in S : (n+1), 2n+1, 3n, ..., \tfrac{1}{2}(n^2+3n+2) \leq 3n\} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Selanjutnya dibuktikan batas bawah nilai minimum pelabelan $\gamma$ pada Proposisi 2.2.1 berlaku untuk graf *double cones*.

$$\begin{aligned}
val_{min}(G) &\geq \tbinom{k+1}{2}(p+\tfrac{k+2}{3}) + (m-pk)(k+1) \\
&\geq \tbinom{4}{2}(n+2+\tfrac{5}{3}) + (3n-3(n+2))(4) \\
&\geq 6(n+\tfrac{11}{3}) + (3n-3n-6))(4) \\
&\geq 6n+22-24 \\
&\geq 6n-2.
\end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 4.1.2, nilai minimum pelabelan $\gamma$ pada graf *double cones* adalah $\lfloor \frac{n^2+8n+4}{2} \rfloor$ dengan $n \geq 3$. Nilai minimum pada Teorema 4.1.2 selalu lebih besar daripada $6n-2$, dengan $n \geq 3$. Dengan demikian, terbukti bahwa batas bawah tersebut berlaku untuk graf *double cones*.

### 4.4.2 Batas bawah pada graf lintang

Graf lintang $L_n$ dengan $n \geq 1$ mempunyai *order* $p = n+2$ dan *size* $m = 2n$. Berdasarkan Definisi 2.2.21, untuk bilangan bulat $p = n+2$ dan $m = 2n$ dengan $1 \leq n+1 \leq 2n \leq \binom{n+2}{2}$ diberikan himpunan $S = \{1, 2, ..., n+1\}$ dan $\alpha(p,m) = max\{k \in S : \sum_{i=1}^{k}(p-i) \leq m\} = 1$. Nilai $\alpha(p,m) = 1$ diperoleh dari

$$\begin{aligned}
\alpha(p,m) &= max\{k \in S : (n+2-1), ((n+2-1)+(n+2-2)), ((n+2-1)+ \\
&\quad (n+2-2)+(n+2-3)), ..., ((n+2-1)+(n+2-2)+(n+2- \\
&\quad 3)+...+n+2-(n+1))) \leq 2n\} \\
&= max\{k \in S : (n+1), 2n+1, 3n, ..., \tfrac{1}{2}(n^2+3n+2) \leq 2n\} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Selanjutnya dibuktikan batas bawah nilai minimum pelabelan $\gamma$ pada Proposisi 2.2.1 berlaku untuk graf lintang

$$\begin{aligned} val_{min}(G) &\geq \binom{k+1}{2}(p+\tfrac{k+2}{3}) + (m-pk)(k+1) \\ &\geq \binom{2}{2}(n+2+\tfrac{3}{3}) + (2n-(n+2))(2) \\ &\geq (n+3)+(n-2)(2) \\ &\geq n+3+2n-4 \\ &\geq 3n-1. \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 4.2.2, nilai minimum pelabelan $\gamma$ pada graf lintang adalah $\lfloor \frac{n^2+4n}{2} \rfloor$ dengan $n \geq 1$. Nilai minimum pada Teorema 4.2.2 selalu lebih besar daripada $3n-1$, dengan $n \geq 1$. Dengan demikian, terbukti bahwa batas bawah tersebut berlaku untuk graf lintang.

### 4.4.3 Batas bawah pada graf tangga

Graf tangga $T_n$ dengan $n \geq 2$ mempunyai *order* $p = 2n$ dan *size* $m = 3n-2$. Berdasarkan Definisi 2.2.21, untuk bilangan bulat $p = 2n$ dan $m = 3n-2$ dengan $1 \leq 2n-1 \leq 3n-2 \leq \binom{2n}{2}$ diberikan himpunan $S = \{1, 2, ..., 2n-1\}$ dan $\alpha(p,m) = max\{k \in S : \sum_{i=1}^{k}(p-i) \leq m\} = 1$. Nilai $\alpha(p,m) = 1$ diperoleh dari

$$\begin{aligned} \alpha(p,m) &= max\{k \in S : (2n-1), ((2n-1)+(2n-2)), ((2n-1)+(2n-2) \\ &\quad +(2n-3)), ..., ((2n-1)+(2n-2)+(2n-3)+...+(2n-(2n- \\ &\quad 1))) \leq 3n-2\} \\ &= max\{k \in S : (2n-1), (4n-3), 6n-6, ..., 2n^2-n \leq 3n-2\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Selanjutnya dibuktikan batas bawah nilai minimum pelabelan $\gamma$ pada Proposisi 2.2.1 berlaku untuk graf tangga.

$$\begin{aligned} val_{min}(G) &\geq \binom{k+1}{2}(p+\tfrac{k+2}{3}) + (m-pk)(k+1) \\ &\geq \binom{2}{2}(2n+\tfrac{3}{3}) + (3n-2-2n)(2) \\ &\geq (2n+1)+(n-2)(2) \\ &\geq 2n+1+2n-4 \\ &\geq 4n-3. \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 4.3.2, nilai minimum pelabelan $\gamma$ pada graf tangga adalah $5n - 4$ dengan $n \geq 2$. Nilai minimum pada Teorema 4.3.2 selalu lebih besar daripada $4n - 3$, dengan $n \geq 2$. Dengan demikian, terbukti bahwa batas bawah tersebut berlaku untuk graf tangga.

# Bab V

# PENUTUP

## 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada pembahasan, maka kesimpulan yang dapat diambil adalah sebagai berikut.

1. Nilai maksimum dan minimum pelabelan $\gamma$ pada graf *double cones* $DC_n$ yang mempunyai *order* $p = n + 2$ dan *size* $m = 3n$, dengan $n \geq 3$ yaitu
   (a) $val_{max}(DC_n) = \lfloor \frac{11n^2}{2} \rfloor$,
   (b) $val_{min}(DC_n) = \lfloor \frac{n^2+8n+4}{2} \rfloor$.
2. Nilai maksimum dan minimum pelabelan $\gamma$ pada graf lintang $L_n$ yang mempunyai *order* $p = n + 2$ dan *size* $m = 2n$, dengan $n \geq 1$ yaitu
   (a) $val_{max}(L_n) = 3n^2$,
   (b) $val_{min}(L_n) = \lfloor \frac{n^2+4n}{2} \rfloor$.
3. Nilai maksimum dan minimum pelabelan $\gamma$ pada graf tangga $T_n$ yang mempunyai *order* $p = 2n$ dan *size* $m = 3n - 2$, dengan $n \geq 2$ yaitu
   (a) $val_{max}(T_n) = 6n^2 - 5n - 2$,
   (b) $val_{min}(T_n) = 5n - 4$.

## 5.2 Saran

Penelitian mengenai pelabelan $\gamma$ masih dapat dikembangkan lagi. Oleh karena itu, bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini, penulis memberikan saran agar pembaca dapat mengembangkan pelabelan $\gamma$ untuk kelas-kelas graf lainnya.