PELABELAN SELIMUT BINTANG - AJAIB SUPER PADA GRAF *GENERALIZED* PETERSEN DAN GRAF MATAHARI

oleh

ISMIYATI MARFUAH

M0108047

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar

Sarjana Sains Matematika

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

SURAKARTA

2013

SKRIPSI

PELABELAN SELIMUT BINTANG - AJAIB SUPER PADA GRAF *GENERALIZED* PETERSEN DAN GRAF MATAHARI

yang disiapkan dan disusun oleh

ISMIYATI MARFUAH

NIM. M0108047

dibimbing oleh

Pembimbing I	Pembimbing II
Dra. Mania Roswitha, M.Si	Sri Kuntari, M.Si.
NIP. 19520628 198303 2 001	NIP. 19730225 19903 2 001

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji
pada hari Rabu, tanggal 30 Januari 2013
dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Anggota Tim Penguji	Tanda Tangan
1. Drs. Tri Atmojo K., M.Sc., Ph.D.	1. .....
NIP. 19630826 198803 1 002	
2. Winita Sulandari, M.Si.	2. .....
NIP. 19780814 200501 2 002	

Surakarta, 4 Februari 2013

Disahkan oleh
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dekan,	Ketua Jurusan Matematika,
Prof. Ir. Ari Handono Ramelan, M.Sc.(Hons)., Ph.D.	Irwan Susanto, S.Si., DEA.
NIP. 19610223 198601 1 001	NIP. 19710511 199512 1 001

Gambar 0.1.

ABSTRAK

Ismiyati Marfuah. 2013. PELABELAN SELIMUT BINTANG - AJAIB SUPER PADA GRAF *GENERALIZED* PETERSEN DAN GRAF MATAHARI. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Sebelas Maret.

Suatu graf $G = (V(G), E(G))$ dikatakan memiliki sebuah selimut H-ajaib, dengan H adalah graf bintang, jika setiap garis dalam $E(G)$ berada dalam sebuah subgraf dari G yang isomorfik terhadap graf bintang. Suatu graf G disebut bintang-ajaib jika terdapat suatu pelabelan total $\lambda : V(G) \bigcup E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, -|V(G)| + |E(G)|\}$, sedemikian sehingga setiap subgraf $H' = (V'(H'), E'(H'))$ dari G yang isomorfik terhadap graf bintang berlaku

$$\lambda(H') \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{v \in V'} \lambda(v) + \sum_{e \in E'} \lambda(e) = m(\lambda),$$

dengan $m(\lambda)$ adalah suatu jumlah ajaib yang konstan. Jika label titik-titik menggunakan $\{1, 2, ..., |V(G)|\}$, maka jumlah ajaib super dituliskan sebagai $s(\lambda)$.

Tujuan penelitian ini adalah menentukan adanya pelabelan selimut bintang-ajaib super pada graf *generalized* Petersen $GP_{n,k}$ untuk $n = 5, 7$, $k = 1, 2$ dan graf matahari S_n untuk $n = 3, 5, 7, 9$ dengan menggunakan selimut bintang $K_{1,3}$. Metode yang digunakan adalah studi literatur.

Hasil dari penelitian adalah graf *generalized* Petersen $GP_{n,k}$ dengan $n = 5, 7$ dan $k = 1, 2$ adalah $K_{1,3}$-ajaib super dan graf matahari S_n untuk $n = 3, 5, 7, 9$ adalah $K_{1,3}$-ajaib super.

Kata Kunci *: pelabelan selimut bintang-ajaib super, graf generalized Petersen, graf matahari*

ABSTRACT

Ismiyati Marfuah. 2013. STAR - SUPERMAGIC COVERING ON GENERALIZED PETERSEN GRAPH AND SUN GRAPH. Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Sebelas Maret University.

A simple graph $G = (V(G), E(G))$ admits a H-covering, where H in this research is a star, if every edge in $E(G)$ belongs to a subgraph of G isomorphic to a star graph. A graph G is star-magic if there is a total labeling $\lambda : V(G) \bigcup E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, |V(G)| + |E(G)|\}$, such that for each subgraph $H' = (V'(H'), E'(H'))$ of G isomorphic to a star graph and satisfying

$$\lambda(H') \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{v \in V'} \lambda(v) + \sum_{e \in E'} \lambda(e) = m(\lambda),$$

where $m(\lambda)$ is a constant magic sum. If the label of vertices are $\{1, 2, ..., |V(G)|\}$, then a constant supermagic sum is $s(\lambda)$.

This research aims to find star $K_{1,3}$-supermagic covering on generalized Petersen graphs $GP_{n,k}$ for $n = 5, 7$, $k = 1, 2$ and sun graphs S_n for $n = 3, 5, 7, 9$. The method used in this research is a literary study.

The results of this research are the generalized Petersen graphs $GP_{n,k}$ for $n = 5, 7$, $k = 1, 2$ are $K_{1,3}$-supermagic and the sun graphs S_n for $n = 3, 5, 7, 9$ are $K_{1,3}$-supermagic.

Keywords *: star-supermagic covering, generalized Petersen graph, sun graph*

PERSEMBAHAN

Karya ini kupersembahkan untuk

kedua orang tuaku dan saudara-saudaraku.

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis berhasil menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Skripsi ini ditulis dalam lima bab. Bab I berisi tentang pendahuluan meliputi latar belakang masalah, perumusan masalah, tujuan, dan manfaat. Pada Bab II diulas tinjauan pustaka mengenai penelitian-penelitian sebelumnya yang menjadi dasar penelitian dan teori-teori penunjang. Bab III membahas tentang metode penelitian, yaitu langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian. Penulis menguraikan hasil dari penelitian yang sudah dilakukan pada Bab IV. Selanjutnya, kesimpulan diberikan pada Bab V.

Selesainya penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada Ibu Dra. Mania Roswitha, M.Si. dan Ibu Sri Kuntari, M.Si. sebagai Pembimbing I dan Pembimbing II yang telah memberi bimbingan serta arahan dalam penulisan skripsi ini. Ucapan terima kasih juga disampaikan kepada semua pihak yang telah memberikan bantuan, masukan dan dukungan kepada penulis.

Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat.

Surakarta, Januari 2013

Penulis

Daftar Isi

Daftar Gambar

Daftar Notasi

G	:	graf G
$G = (V(G), E(G))$	:	graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$
$V(G)$	:	himpunan titik dari graf G
$\|V(G)\|$	:	*order* atau banyaknya titik dari graf G
$E(G)$	:	himpunan garis dari graf G
$\|E(G)\|$	:	*size* atau banyaknya garis pada graf G
$K_{1,n}$	:	graf bintang dengan banyak titik selain titik pusat sebanyak n
H	:	suatu selimut pada pelabelan
H'	:	suatu subgraf pada G yang isomorfik dengan H
$m(\lambda)$	:	jumlah selimut ajaib
$s(\lambda)$	:	jumlah selimut ajaib super
$s(\lambda(H))$	:	jumlah selimut ajaib super pada subgraf H
$GP_{n,k}$	:	graf *generalized* Petersen dengan titik pada *cycle* sebanyak n dan k adalah selisih hubungan titik pada *cycle* dalam
$V(GP_{n,k})$	:	himpunan titik pada graf *generalized* Petersen
$E(GP_{n,k})$	:	himpunan garis pada graf *generalized* Petersen
S_n	:	graf matahari dengan panjang n
C_n	:	graf lingkaran dengan panjang n
P_n/P_h	:	graf lintasan dengan panjang n/h
w	:	bobot pada suatu graf
λ	:	pelabelan ajaib pada graf G
$\square$	:	akhir bukti

Bab I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan salah satu bidang kajian dalam kombinatorik yang diperkenalkan pertama kali oleh seorang matematikawan Swiss, L. Euler, pada tahun 1736 untuk mencoba mengurai permasalahan jembatan Konigsberg. Permasalahannya adalah bagaimana cara melewati setiap jembatan tepat satu kali dari satu tempat lalu kembali ke tempat semula. Kemudian Euler mampu memecahkan dengan merepresentasikan terlebih dahulu ke dalam graf. Setiap garis (*edge*) pada graf melambangkan jembatan yang menghubungkan daratan, sedangkan daratan dilambangkan dengan titik (*vertex*). Graf ini kemudian disebut dengan graf Eulerian. Graf Euler memiliki tiga titik berderajat tiga dan satu titik berderajat lima. Hal ini menyebabkan tidak akan dapat melewati tiap garis tepat sekali lalu kembali ke tempat semula. Sejak saat itulah teori graf kemudian berkembang pesat dalam pemecahan masalah sehari-hari, seperti dalam jaringan komputer, permainan *puzzle*, pencarian rute terdekat, dan lain-lain seperti yang ditulis oleh Chartrand [2].

Penelitian mengenai graf berkembang seiring banyaknya bidang kajian teori graf dan salah satunya adalah pelabelan yang diperkenalkan oleh Rosa [12] di tahun 1967. Suatu pelabelan adalah pemetaan satu-satu yang membawa himpunan titik pada bilangan bulat non-negatif yang disebut label. Terdapat beberapa jenis pelabelan, yaitu radio, γ (gamma), ajaib (*magic*), anti ajaib (*antimagic*), dan lain-lain. Salah satu jenis pelabelan yang banyak diteliti adalah pelabelan ajaib dan anti ajaib. Pelabelan ajaib diperkenalkan oleh Kotzig dan Rosa [13] sebagai *M-valuation*. Suatu pelabelan ajaib adalah pemetaan satu-satu λ dari himpunan garis ke himpunan bilangan bulat positif, sehingga diperoleh

suatu jumlah ajaib. Kemudian berkembang menjadi pelabelan ajaib super, yaitu pelabelan ajaib dengan semua titik memuat nilai $\{1, 2, 3, ..., |V(G)|\}$.

Pelabelan ajaib terbagi menjadi pelabelan titik-ajaib, garis-ajaib, dan total ajaib. Pelabelan titik-ajaib adalah suatu pemetaan (λ) dari himpunan garis $E(G)$ dan himpunan titik $V(G)$ ke $\{1, 2, ..., |V(G)|+|E(G)|\}$, sehingga untuk setiap titik u diperoleh jumlah ajaib h dengan $h = \lambda(u)+\Sigma\lambda(uv)$ dan titik v merupakan titik yang *adjacent* ke u. Swaminathan dan Jeyanthi [15] mengembangkan pelabelan titik-ajaib menjadi pelabelan titik-ajaib super pada lintasan (*path*) P_n untuk $n \geq 3$ dan n ganjil, *cycle* C_n untuk n ganjil, dan bintang (*star*) $K_{1,n}$ untuk $n = 2$. Miller *et al.* [7] sebelumnya meneliti mengenai pelabelan titik-ajaib pada graf *generalized* Petersen $GP_{n,k}$ dengan hasil bahwa untuk $n \geq 4$, n genap dan $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, graf *generalized* Petersen $GP_{n,k}$ memiliki pelabelan titik-ajaib dengan $h = \frac{17n}{2} + 2$. Pelabelan garis-ajaib adalah suatu pemetaan (λ) dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, ..., |V(G)|+|E(G)|\}$, sehingga untuk suatu garis uv berlaku $\lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v) = k$ dan k adalah jumlah ajaib. Dituliskan oleh Ngurah dan Baskoro [10] bahwa graf *generalized* Petersen $GP_{n,2}$ memiliki pelabelan garis-ajaib super untuk $n \geq 3$ dan n ganjil. Pelabelan total ajaib terjadi jika pada suatu graf G memiliki pelabelan garis-ajaib sekaligus pelabelan titik-ajaib.

Pelabelan total ajaib kemudian dikembangkan menjadi pelabelan selimut ajaib yang pertama kali diperkenalkan oleh Gutiérrez dan Lladó [4] pada tahun 2005. Suatu graf $G = (V(G), E(G))$ dikatakan memiliki pelabelan selimut H-ajaib jika setiap garis pada $E(G)$ termuat dalam suatu subgraf $H' = (V'(H')$,-$E'(H'))$ dari G yang isomorfik dengan H, sehingga diperoleh $f(H') \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{v \in V'} f(v)+ \sum_{e \in E'} f(e) = m(f)$. Sedangkan, $m(f)$ merupakan jumlah ajaib untuk setiap subgraf H'. Dalam hal ini H bisa berupa *path*, *cycle*, bintang ataupun kelas graf yang lain. Gutiérrez dan Lladó [4] telah membuktikan adanya selimut bintang $K_{1,h}$-ajaib super pada graf bintang $K_{1,n}$ dengan $1 \leq h \leq n$. Maryati *et al.* [6] membuktikan adanya selimut-P_n ajaib super pada *banana tree* dan graf semak (*shrubs*). Roswitha dan Baskoro [14] mengembangkan masalah pelabelan selimut bintang-ajaib pada beberapa kelas *tree*. Dalam [14] dibuktikan bahwa suatu

caterpillar $S_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ merupakan $S_{n,n}$-ajaib super dengan $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n$ dan *firecracker* $F_{k,n}$ merupakan $F_{2,n}$-ajaib super dengan k bilangan bulat dan n genap. Selanjutnya dalam [14] diteliti juga bahwa graf *double star* $S_{n,n}$ memiliki S_{n+1}-ajaib super dan *banana tree* $B_{k,n}$ memiliki $B_{(k-1),n}$-ajaib super untuk k dan n bilangan bulat. Rahim *et al.* [11] membuktikan (a, d)-*vertex antimagic total labeling* pada graf matahari S_n. Pada skripsi ini dibahas pelabelan selimut ajaib pada graf *generalized* Petersen $GP_{n,k}$ untuk $n = 5, 7$, $k = 1, 2$, dan graf matahari S_n dengan $n = 3, 5, 7, 9$ menggunakan selimut bintang $K_{1,3}$. Selimut yang digunakan adalah bintang $K_{1,3}$ karena pada graf *generalized* Petersen dan graf matahari memuat subgraf bintang $K_{1,3}$.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dapat dibangun perumusan masalah bagaimana menentukan pelabelan selimut ajaib super pada graf *generalized* Petersen $GP_{n,k}$ untuk $n = 5, 7$ dan $k = 1, 2$, dan graf matahari S_n dengan $n = 3, 5, 7, 9$ menggunakan selimut bintang $K_{1,3}$.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah menentukan pelabelan selimut bintang-ajaib super pada graf *generalized* Petersen $GP_{n,k}$ untuk $n = 5, 7$ dan $k = 1, 2$ dan graf matahari S_n dengan $n = 3, 5, 7, 9$ menggunakan selimut bintang $K_{1,3}$.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan memperkaya pengetahuan dalam teori graf khususnya dalam hal pelabelan selimut bintang-ajaib super pada graf *generalized* Petersen dan graf matahari.

Bab II

LANDASAN TEORI

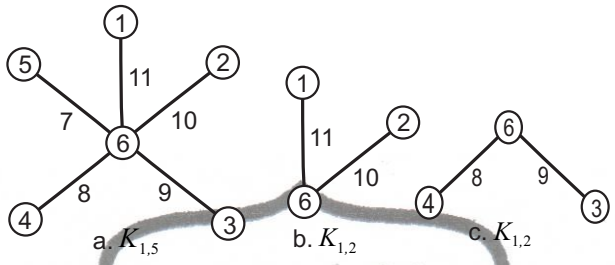
Bab ini mengulas tinjauan pustaka dan teori-teori penunjang penulisan skripsi. Bagian pertama adalah tinjauan pustaka yang berisi penelitian-penelitian sebelumnya sebagai dasar penelitian ini, selanjutnya adalah definisi-definisi yang menjadi dasar pembahasan penelitian. Terakhir diberikan kerangka pemikiran untuk menjelaskan alur pemikiran penulisan skripsi.

2.1 Tinjauan Pustaka

Pada tahun 2005, Gutiérrez dan Lladó [4] memperkenalkan selimut H-ajaib dari suatu graf G sebagai perluasan dari *M-valuation* yang sebelumnya diperkenalkan oleh Kotzig dan Rosa [12]. Graf G dikatakan memiliki pelabelan selimut H-ajaib jika setiap garis pada $E(G)$ merupakan garis dari suatu subgraf dalam G yang isomorfik dengan H. Selimut H-ajaib dapat berupa selimut bintang-ajaib, selimut lintasan-ajaib, selimut *cycle*-ajaib, dan lain-lain.

Pelabelan selimut *cycle*-ajaib ditemukan oleh Lladó dan Moragas [5], yaitu adanya C_3-ajaib super pada graf roda W_n untuk $n \geq 5$ ganjil dan C_4-ajaib super pada graf prisma dan graf buku. Roswitha dan Baskoro [14] selanjutnya membuktikan bahwa suatu graf *caterpillar* $S_{n_1,n_2,...,n_k}$ merupakan $S_{n,n}$-ajaib super untuk $n_1 = n_2 = ... = n_k = n$ dan graf *double star* $S_{n,n}$ memiliki S_{n+1}-ajaib super. Graf lintasan P_n dan graf *cycle* C_n merupakan P_h-ajaib super untuk $2 \leq h \leq n$. Kemudian oleh Maryati *et al.* [6] dilanjutkan dengan meneliti selimut lintasan-ajaib pada graf *shrubs* dan graf *banana tree*. Selimut bintang-ajaib yang dituliskan oleh Gutiérrez dan Lladó [4] adalah $K_{1,n}$-ajaib pada graf bipartit lengkap $K_{n,n}$ untuk $n \geq 1$ dan $K_{1,h}$-ajaib super pada bintang $K_{1,n}$ untuk sebarang $1 \leq h \leq n$. Gambar 2.1 menunjukkan adanya pelabelan selimut bintang $K_{1,2}$-ajaib pada graf

bintang $K_{1,5}$. Graf $K_{1,2}$ pada Gambar 2.1 b. dan c. masing-masing merupakan subgraf yang ada dalam graf $K_{1,5}$ dengan jumlah ajaib 30.



Gambar 2.1. Pelabelan selimut bintang $K_{1,2}$-ajaib pada graf bintang $K_{1,5}$

Peneliti tertarik untuk melanjutkan penelitian Gutiérrez dan Lladó [4], yaitu menentukan pelabelan selimut bintang K_{13}-ajaib super pada graf *generalized* Petersen dan graf matahari.

2.2 Teori-Teori Penunjang

Pada penulisan skripsi ini diperlukan definisi dan teori yang mampu mendukung tercapainya tujuan penelitian. Definisi dan teori meliputi pengertian dasar graf, pemetaan, kelas graf, dan pelabelan graf mengikuti terminologi yang digunakan oleh Wallis [16].

2.2.1 Pengertian Dasar Graf

Berikut adalah pengertian mengenai graf, derajat, dan graf reguler yang diberikan oleh Wallis [16]. Suatu graf G adalah suatu himpunan berhingga dari titik-titik $V(G)$ bersama dengan himpunan pasangan titik-titik, disebut garis $E(G)$ yang mungkin kosong. Banyaknya titik dari G disebut *order* dinotasikan dengan $|V(G)|$ dan banyaknya garis disebut *size* dinotasikan $|E(G)|$. Hubungan titik dengan garis disebut *incident* dan hubungan garis dengan garis atau titik dengan titik disebut *adjacent*. Banyaknya garis yang *incident* dengan titik v, dinotasikan dengan $d_G(v)$, disebut dengan derajat (*degree*). Sedangkan, jika suatu graf dengan setiap titik memiliki derajat yang sama, maka graf tersebut disebut

graf reguler. Pengertian inilah yang menjadi dasar terbentuknya graf n-reguler, yaitu seluruh titik berderajat n.

2.2.2 Kelas Graf

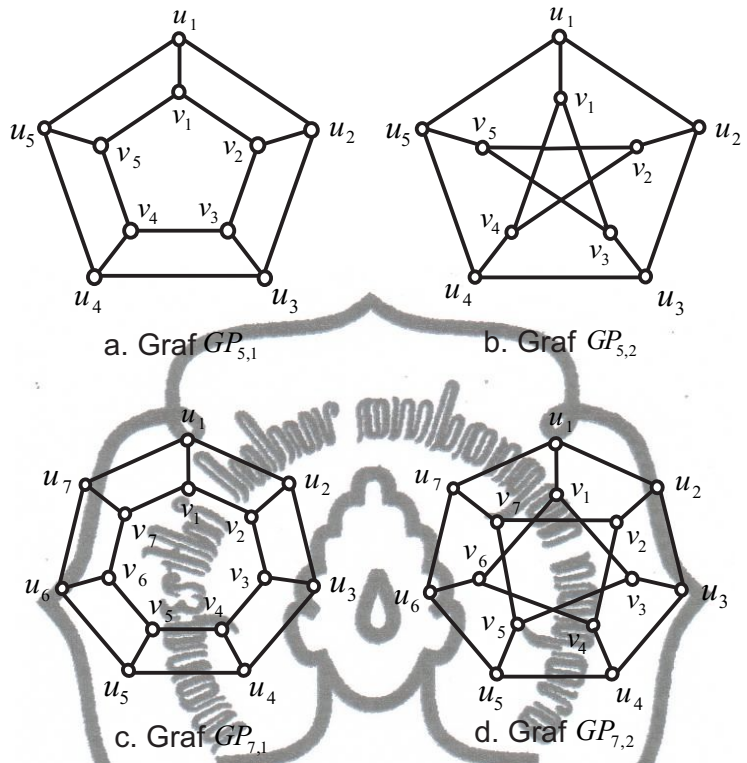
Teori graf memiliki beberapa kelas graf seperti graf *cycle*, graf bintang, graf *generalized* Petersen, dan lain sebagainya. Definisi mengenai graf *cycle* dan graf bintang dikutip dari tulisan Chartrand [2]. Sementara Chao [1] mendefinisikan graf *generalized* Petersen. Graf matahari S_n didefinisikan oleh Mirzakhah [8].

Definisi 2.2.1. *Suatu graf cycle C_n adalah graf berorder $n \geq 3$ yang seluruh titiknya terhubung oleh garis dengan satu titik sebagai titik awal sekaligus titik akhir. Suatu graf bintang $K_{1,n}$ adalah graf berorder $n+1$ yang seluruh titik terhubung oleh garis dengan tidak memuat cycle. Graf bintang memiliki satu titik berorder n yang disebut titik pusat. Titik pada graf bintang selain titik pusat disebut titik akhir.*

Definisi 2.2.2. *Graf generalized Petersen $GP_{n,k}$ adalah graf dengan himpunan titik $V(GP_{n,k}) = \{u_1, u_2, ..., u_n, v_1, v_2, ..., v_n\}$, dan himpunan sisi $E(GP_{n,k}) = \{u_i u_{i+1(mod\ n)}, v_i v_{i+k(mod\ n)}, u_i v_i\}$ dengan $i = 1, 2, ..., n$ dan $n \geq 3, k \geq 1$, n, k adalah bilangan bulat positif.*

$V(GP_{n,k})$ pada graf *generalized* Petersen terdiri dari dua himpunan titik, yaitu titik dalam $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ dan titik luar $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$. Sedangkan, $E(GP_{n,k})$ terdiri dari tiga himpunan garis, yaitu garis dalam $\{v_i v_{i+k(\text{mod n})}\}$, garis luar $\{u_i u_{i+1(\text{mod n})}\}$, dan penghubung titik luar dan titik dalam (*spokes*) $\{u_i v_i\}$. Graf *generalized* Petersen $GP_{5,1}$, $GP_{5,2}$, $GP_{7,1}$, dan $GP_{7,2}$ ditunjukkan pada Gambar 2.2.

Definisi 2.2.3. *Suatu graf matahari S_n adalah suatu graf yang terbentuk dari graf* cycle *C_n dengan menambahkan satu garis dan satu titik pada masing-masing titiknya. Graf matahari memiliki $V(G) = \{u_1, u_2, ..., u_n, v_1, v_2, ..., v_n\}$, dan $E(G) = \{v_i v_{i+1(mod\ n)}, u_i v_i\}$ dengan $i = 1, 2, ..., n$ dan serta $n \geq 3$, n adalah bilangan bulat positif.*



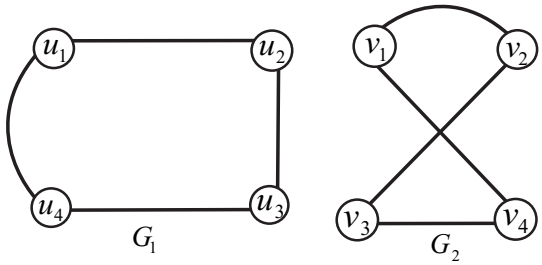
Gambar 2.2. Graf *generalized* Petersen $GP_{5,1}$, $GP_{5,2}$, $GP_{7,1}$, dan $GP_{7,2}$

2.2.3 Isomorfisma Graf

Chartrand [2] mendefinisikan suatu pemetaan f dari A ke B (dinotasikan dengan $f : A \to B$) adalah suatu himpunan pasangan berurutan (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$. Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dan himpunan B disebut daerah kawan (*codomain*). Suatu pemetaan $f : A \to B$ disebut pemetaan bijeksi jika setiap anggota A memiliki tepat satu kawan di B dengan jumlah anggota A dan B sama.

Definisi 2.2.4. *Suatu isomorfisma dari G_1 ke G_2 adalah pemetaan satu-satu dan onto $f : V(G_1) \to V(G_2)$, sedemikian sehingga a dan b yang adjacent berada dalam G_1 serta $f(a)$ dan $f(b)$ yang juga adjacent berada dalam G_2.*

Contoh graf G dan H dikatakan bersifat isomorfis dapat dilihat pada Gambar 2.3 dengan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$. Gambar 2.3 menunjukkan suatu fungsi $f : u_i \to v_i$ dengan $i \in [1, 4]$ adalah korespondensi satu-satu antara V_1 dan



Gambar 2.3. Graf G_1 isomorfik dengan graf G_2

V_2. Titik-titik yang saling *adjacent* dalam G_1 adalah u_1 dengan u_2, u_1 dengan u_4, u_2 dengan u_3, dan u_3 dengan u_4. Pasangan $f(u_1)$ dengan $f(u_2)$, $f(u_1)$ dengan $f(u_4)$, dan $f(u_3)$ dengan $f(u_4)$ saling *adjacent* dalam G_2.

2.2.4 Pelabelan Graf

Pengertian pelabelan graf mengacu pada artikel yang dituliskan Rosa [12]. Suatu pelabelan atau pemberian nilai pada graf adalah pemetaan satu-satu (λ) yang membawa $V(G)$ pada bilangan non-negatif $\{0, 1, 2, ..., |V(G)|\}$ yang disebut label. Macam-macam pelabelan menurut jenisnya dituliskan oleh Gallian [3], yaitu pelabelan γ (gamma), pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib, dan lain sebagainya. Sedangkan, macam-macam pelabelan berdasarkan daerah asal (*domain*) dituliskan oleh Wallis [16], yaitu pelabelan titik (dengan *domain* himpunan titik), pelabelan garis (dengan *domain* himpunan garis), dan pelabelan total (dengan *domain* titik dan garis).

Wallis [16] juga menuliskan bahwa jumlah label-label pada elemen graf (titik atau garis), disebut bobot. Bobot titik u pada pelabelan λ mengikuti persamaan

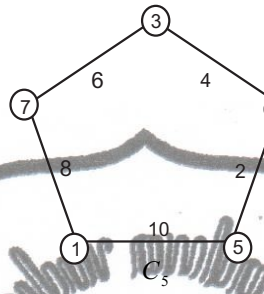
$$w(v_i) = \lambda(v_i) + \sum_{v_i \sim v_j} \lambda(v_i v_j),$$

dan bobot untuk garis $v_i v_j$ adalah

$$w(v_i v_j) = \lambda(v_i) + \lambda(v_i v_j) + \lambda(v_j),$$

dengan i, j bilangan bulat positif. Graf *cycle* C_5 yang ditunjukkan oleh Gambar 2.4 memiliki bobot titik v_i, dinotasikan dengan $w(v_i)$ dan bobot garis $v_i v_j$,

dinotasikan dengan $w(v_iv_j)$, untuk $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ dan $i \neq j$. Graf C_5 pada Gambar 2.4 merupakan pelabelan garis-ajaib karena masing-masing garis memiliki bobot sama. Pada Gambar 2.4 dapat ditentukan bobot titik dan garisnya,



Gambar 2.4. Pelabelan sisi-ajaib pada graf *cycle* C_5

sebagai berikut

$$w(v_1) = 3 + (6 + 4) = 13, \quad w(v_1v_2) = 3 + 4 + 9 = 16,$$
$$w(v_2) = 9 + (4 + 2) = 15, \quad w(v_2v_3) = 9 + 2 + 5 = 16,$$
$$w(v_3) = 5 + (2 + 10) = 17, \quad w(v_4v_5) = 1 + 8 + 7 = 16.$$

2.2.5 Pelabelan Ajaib

Kotzig dan Rosa [13] pada tahun 1970 mendefinisikan suatu pelabelan ajaib adalah fungsi λ yang memetakan himpunan garis graf G ke bilangan bulat positif, sehingga jumlah label garis di sekitar titik manapun dalam G adalah sama. Salah satu jenis pelabelan ajaib, yaitu pelabelan total garis-ajaib. Pelabelan total garis-ajaib adalah suatu pemetaan satu-satu $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., |V(G)| + |E(G)|\}$, sehingga untuk suatu garis uv berlaku:

$$\lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v) = k,$$

dengan k adalah jumlah ajaib konstan. Jika semua titik dilabeli dengan nilai-nilai terkecil $\{1, 2, ..., |V(G)|\}$, maka disebut pelabelan garis-ajaib super.

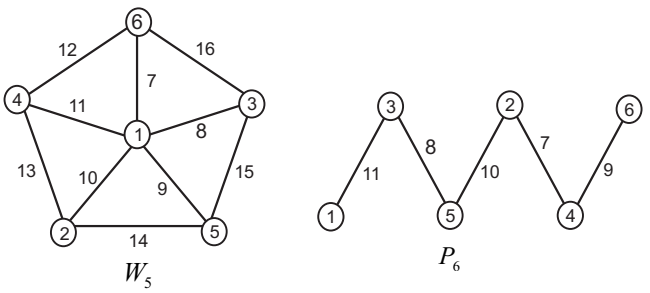
2.2.6 Pelabelan Selimut Ajaib

Gutiérrez dan Lladó [4] pada tahun 2005 mengembangkan pelabelan total ajaib menjadi pelabelan selimut ajaib. Jika diketahui suatu graf $G = (V(G), E(G))$, maka selimut-garis dari G adalah subgraf-subgraf berbeda, $(H_1, ..., H_j)$ dengan j bilangan bulat positif. Minimal satu subgraf H_i dengan $1 \leq i \leq j$ memiliki garis dari $E(G)$, sehingga G memuat suatu selimut-garis $(H_1, ..., H_j)$. Jika setiap H_i isomorfik pada graf H yang diberikan, maka dapat dikatakan G memuat suatu selimut-H.

Andaikan suatu graf $G = (V(G), E(G))$ memiliki selimut-H, maka suatu fungsi bijektif $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., |V| + |E|\}$, adalah pelabelan H-ajaib dari G jika terdapat bilangan bulat positif $m(\lambda)$ yang disebut jumlah-ajaib. Untuk suatu subgraf $H' = (V'(H'), E'(H'))$ dari G isomorfik ke H diperoleh

$$\lambda(H') \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{v \epsilon V'} \lambda(v) + \sum_{e \epsilon E'} \lambda(e) = m(\lambda)$$

maka graf G disebut H-ajaib. Graf G adalah H-ajaib super dan jumlah ajaib super dinotasikan dengan $s(\lambda)$ untuk $\lambda(V) = \{1, ..., |V|\}$. Pelabelan selimut-ajaib ini kemudian dikembangkan menjadi selimut bintang-ajaib, selimut lintasan-ajaib, dan selimut *cycle*-ajaib ([4, 6, 9]). Contoh pelabelan selimut ajaib super seperti pada Gambar 2.5. Graf P_6 memuat selimut-P_3 dan graf W_5 memuat selimut-C_3.



Gambar 2.5. Pelabelan selimut ajaib super pada P_6 (kanan) dan W_5 (kiri)

2.3 Kerangka Pemikiran

Berdasarkan latar belakang dan landasan teori dapat disusun kerangka pemikiran untuk pembahasan selanjutnya. Langkah pertama adalah menentukan pelabelan selimut $K_{1,3}$-ajaib super pada graf *generalized* Petersen $GP_{n,k}$ untuk $n = 5, 7$, $k = 1, 2$ dan graf matahari S_n dengan $n = 3, 5, 7, 9$. Kedua, menentukan pola pelabelan yang terbentuk. Langkah terakhir menentukan rumus pelabelan.

Bab III

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah kajian pustaka dengan menggunakan referensi berupa buku, jurnal maupun tulisan mengenai teori graf khususnya pelabelan ajaib. Langkah-langkah diperlukan untuk menentukan pelabelan selimut bintang-ajaib super pada graf *generalized* Petersen $GP_{n,k}$ dan graf matahari S_n dalam hal ini menggunakan selimut bintang $K_{1,3}$.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah

1. menentukan banyaknya selimut bintang-ajaib super pada graf *generalized* Petersen dan graf matahari,
2. menentukan jumlah ajaib selimut bintang-ajaib super ($s(\lambda)$),
3. menentukan label titik $\{1, 2, ..., |V(G)|\}$ dan label garis $\{|V(G)|+1, |V(G)|+2, ..., |V(G)| + |E(G)|\}$,
4. melabeli titik terlebih dahulu dilanjutkan melabeli garis,
5. mengkombinasikan semua label titik dan garis sesuai banyaknya selimut untuk menentukan jumlah ajaib,
6. mendaftarkan semua pelabelan yang terbentuk pada setiap graf,
7. kemudian ditentukan pola pelabelan dan rumus pelabelan.

Bab IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dituliskan hasil dan pembahasan penelitian. Terdapat dua bagian dengan bagian pertama berisi tentang pelabelan selimut bintang $K_{1,3}$-ajaib super pada graf *generalized* Petersen $GP_{n,k}$ untuk $n = 5, 7$ dan $k = 1, 2$. Sedangkan, bagian kedua berisi tentang pelabelan selimut bintang $K_{1,3}$-ajaib super pada graf matahari S_n dengan $n = 3, 5, 7, 9$.

4.1 Pelabelan Ajaib Super pada Graf *generalized* Petersen $GP_{n,k}$ dengan Selimut $K_{1,3}$

Graf *generalized* Petersen adalah perluasan dari graf Petersen dengan mempertahankan banyaknya derajat pada setiap titik. Chao [1] menuliskan graf *generalized* Petersen sebagai $GP_{n,k}$ yang berarti terdapat himpunan titik $V(GP_{n,k})$ terdiri dari titik-titik luar (*outer vertices*), $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ dan titik-titik dalam (*inner vertices*), $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Selain itu, juga terdapat himpunan garis $E(GP_{n,k})$ yang memiliki tiga bagian, yaitu garis luar (*outer edge*), u_iu_{i+1}, garis dalam (*inner edge*), $v_iv_{i+k(\text{mod n})}$, dan penghubung titik luar dengan titik dalam (*spokes*), u_iv_i dengan $i = 1, 2, ..., n$, $n \geq 3, k \geq 1$, dan n serta k adalah bilangan bulat positif.

Selimut bintang $K_{1,3}$-ajaib super pada graf *generalized* Petersen diperoleh dengan dua cara.

1. Jika titik pusat dari bintang $K_{1,3}$ berada pada titik luar u_i, maka diperoleh jumlah ajaib super

$$\begin{aligned} s(\lambda(H)) = \quad & \lambda(v_i) + \lambda(u_{i-1(\text{mod n})}) + \lambda(u_{i+1(\text{mod n})}) + \lambda(u_i) \\ & + \lambda(u_iu_{i-1(\text{mod n})}) + \lambda(u_iu_{i+1(\text{mod n})}) + \lambda(u_iv_i). \end{aligned} \tag{4.1}$$

2. Jika titik pusat berada pada titik dalam v_i, maka diperoleh jumlah ajaib super

$$\begin{aligned} s(\lambda(H)) = \quad & \lambda(u_i) + \lambda(v_{i-1(\text{mod n})}) + \lambda(v_{i+1(\text{mod n})}) + \lambda(v_i) \\ & + \lambda(v_i v_{i-1(\text{mod n})}) + \lambda(v_i v_{i+1(\text{mod n})}) + \lambda(u_i v_i). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Teorema 4.1.1. *Graf generalized Petersen $GP_{n,k}$ dengan $n = 5, 7$ dan $k = 1, 2$ adalah $K_{1,3}$-ajaib super.*

Bukti. Andaikan graf G adalah graf *generalized* Petersen $GP_{n,k}$ dengan $V(GP_{n,k}) = \{u_1, u_2, ..., u_n, v_1, v_2, ..., v_n\}$ dan $E(GP_{n,k}) = \{u_i u_{i+1(\text{mod n})}, v_i v_{i+k(\text{mod n})}, u_i v_i\}$. Diperoleh titik sejumlah $|V(G)| = 2n$ dan garis sejumlah $|E(G)| = 3n$, sehingga dapat ditentukan selimut $K_{1,3}$-ajaib super sebanyak $2n$. Pembuktian dibagi ke dalam tiga kasus.

Kasus 1. $GP_{n,k}$ **dengan** $n = 5$ **dan** $k = 1, 2$

1. Label tiap titik adalah

$$\lambda(u_i) = i, \quad \text{untuk } i \in [1, n]$$
$$\lambda(v_i) = i + n, \text{ untuk } i \in [1, n].$$

2. Label tiap garis adalah

$$\lambda(u_i v_i) = 5n - i + 1, \quad \text{untuk } i \in [1, n]$$

$$\lambda(u_i u_{i+1\ (\text{mod n})}) = \begin{cases} 4n + i - 2, \text{ untuk } i \in [1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor] \\ 2n + i + 3, \text{ untuk } i \in [\lceil \frac{n}{2} \rceil, n] \end{cases}$$

$$\lambda(v_i v_{i+k\ (\text{mod n})}) = \begin{cases} 2n + i + 3, \text{ untuk } k = 1 \text{ dan } i \in [1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor] \\ 2n + i - 2, \text{ untuk } k = 1 \text{ dan } i \in [\lceil \frac{n}{2} \rceil, n] \\ 2n + i + 1, \text{ untuk } k = 2 \text{ dan } i \in [1, n-1] \\ n + i + 1, \text{ untuk } k = 2 \text{ dan } i = n. \end{cases}$$

Kasus 2. $GP_{n,k}$ **dengan** $n = 7$ **dan** $k = 1$

1. Label tiap titik adalah

$$\lambda(u_i) = i, \quad \text{untuk } i \in [1, n]$$
$$\lambda(v_i) = i + n, \text{ untuk } i \in [1, n].$$

2. Label tiap garis adalah

$$\lambda(u_iv_i) = \begin{cases} 5n+i-2, & \text{untuk } i \in [1, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor] \\ 5n-i+1, & \text{untuk } i \in [\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-2] \\ 3n+i+2, & \text{untuk } i \in [n-1, n] \end{cases}$$

$$\lambda(u_iu_{i+1 \text{ (mod n)}}) = \begin{cases} 4n-i+1, & \text{untuk } i \in [1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor] \\ 4n-i, & \text{untuk } i \in [\lceil \frac{n}{2} \rceil, n-1] \\ 3n+4, & \text{untuk } i = n \end{cases}$$

$$\lambda(v_iv_{i+k \text{ (mod n)}}) = \begin{cases} 3n-i+1, & \text{untuk } i \in [1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor] \\ 3n-i, & \text{untuk } i \in [\lceil \frac{n}{2} \rceil, n-1] \\ 2n+4, & \text{untuk } i = n. \end{cases}$$

Kasus 3. $GP_{n,k}$ **dengan** $n = 7$ **dan** $k = 2$

1. Label tiap titik adalah

$$\lambda(u_i) = i, \text{ untuk } i \in [1, n]$$

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} n+i+3, & \text{untuk } i \in [1, \lceil \frac{n}{2} \rceil] \\ 2n-i, & \text{untuk } i \in [\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, n-1] \\ n+k+1, & \text{untuk } i = n. \end{cases}$$

2. Label tiap garis adalah

$$\lambda(u_iv_i) = \begin{cases} 4n+k+i, & \text{untuk } i \in [1, n-2] \\ 3n+k+i, & \text{untuk } i \in [n-1, n] \end{cases}$$

$$\lambda(u_iu_{i+1 \text{ (mod n)}}) = \begin{cases} 4n-i+1, & \text{untuk } i \in [1, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor] \\ 3n+i-1, & \text{untuk } i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ 2n+2i, & \text{untuk } i \in [\lceil \frac{n}{2} \rceil, n-1] \\ 3n+4, & \text{untuk } i = n \end{cases}$$

$$\lambda(v_iv_{i+k \text{ (mod n)}}) = \begin{cases} 3n, & \text{untuk } i = 1 \\ 2n-i+4, & \text{untuk } i \in [\lfloor \frac{n}{3} \rfloor, \lceil \frac{n}{3} \rceil] \\ 2n+i-1, & \text{untuk } i \in [\lceil \frac{n}{2} \rceil, n-2] \\ 4n-i-k, & \text{untuk } i \in [n-1, n]. \end{cases}$$

Selanjutnya dapat ditentukan jumlah ajaib super $GP_{n,k}$ dengan $n = 5$ dan $k = 1, 2$ adalah konstan di setiap subgraf H yang isomorfik dengan $K_{1,3}$. Jumlah ajaib super mengikuti persamaan (4.1) atau (4.2) adalah

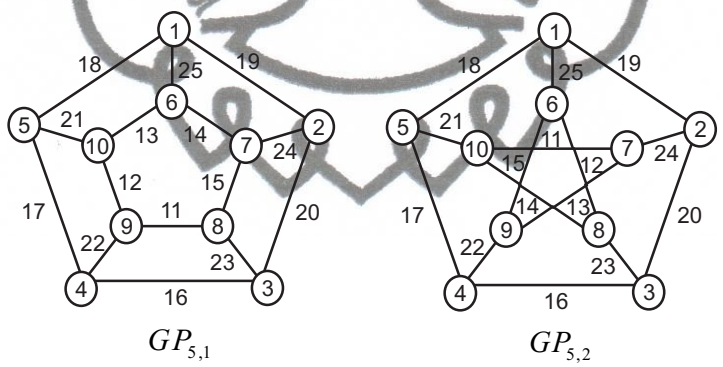
$$s(\lambda(H)) = 15n + 1. \tag{4.3}$$

Sedangkan, jumlah ajaib super $GP_{n,k}$ dengan $n = 7$ dan $k = 1, 2$ adalah konstan di setiap subgraf H yang isomorfik dengan $K_{1,3}$. Jumlah ajaib super mengikuti persamaan (4.1) atau (4.2) diperoleh

$$s(\lambda(H)) = 15n. \tag{4.4}$$

□

Contoh pelabelan selimut $K_{1,3}$-ajaib super pada graf *generalized* Petersen $GP_{n,k}$ dengan $n = 5$ dan $k = 1, 2$ dapat dilihat pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1. Pelabelan selimut $K_{1,3}$ pada $GP_{5,1}$ dan $GP_{5,2}$

Dari Gambar 4.1 dapat dilihat bahwa misal untuk suatu subgraf H pada $GP_{5,1}$ yang isomorfik dengan $K_{1,3}$ dengan pusat u_1 diperoleh

$$\lambda(u_1) = 1,$$

$$\lambda(v_1) = 6, \quad \lambda(v_1u_1) = 25,$$

$$\lambda(u_5) = 5, \quad \lambda(u_1u_5) = 18,$$

$$\lambda(u_2) = 2, \quad \lambda(u_1u_2) = 19.$$

Jumlah ajaib super dengan mengikuti persamaan (4.1) adalah $s(\lambda(H)) = 76$.

4.2 Pelabelan Ajaib Super pada Graf Matahari S_n untuk $n = 3, 5, 7, 9$ dengan Selimut $K_{1,3}$

Mirzakhah [8] pada tahun 2010 menuliskan graf matahari S_n adalah suatu graf yang terbentuk dari graf roda C_n dengan menambahkan satu titik dan satu garis pada masing-masing titiknya. Himpunan titiknya $V(G)$ adalah titik dalam $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan titik luar $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, serta himpunan garisnya $E(G)$ adalah garis dalam $\{v_i v_{i+1(\text{mod n})}\}$ dan *spoke* $\{u_i v_i\}$, dengan $i = 1, 2, \ldots, n$ dan n adalah bilangan bulat positif.

Selimut $K_{1,3}$-ajaib super pada graf matahari diperoleh dengan cara titik pusat berada pada titik dalam v_i, maka diperoleh jumlah ajaib super

$$\begin{aligned} s(\lambda(H)) = \; & \lambda(u_i) + \lambda(v_{i-1(\text{mod n})}) + \lambda(v_{i+1(\text{mod n})}) + \lambda(v_i) \\ & + \lambda(v_i v_{i-1(\text{mod n})}) + \lambda(v_i v_{i+1(\text{mod n})}) + \lambda(u_i v_i). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Teorema 4.2.1. *Graf matahari S_n untuk $n = 3, 5, 7, 9$ adalah $K_{1,3}$-ajaib super.*

Bukti. Andaikan graf G adalah graf matahari S_n dengan $E(G) = \{v_i v_{i+k(\text{mod n})}$,-$u_i v_i\}$ dan $V(G) = \{u_1, u_2, ..., u_n, v_1, v_2, ..., v_n\}$. Diperoleh titik sejumlah $|V(G)| = 2n$ dan garis sejumlah $|E(G)| = 2n$, sehingga dapat ditentukan selimut $K_{1,3}$-ajaib super sebanyak n. Misalkan v_i adalah titik dalam, u_i adalah titik luar, $v_i v_{i+1(\text{mod n})}$ adalah garis dalam, dan $u_i v_i$ adalah *spoke*. Pelabelan dibagi menjadi empat kasus, sebagai berikut

Kasus 1. Graf matahari S_n untuk $n = 3$

1. Label tiap titik mengikuti rumus

$$\lambda(u_i) = 2n - i + 1, \text{ untuk } \; i \in [1, n]$$
$$\lambda(v_i) = i, \quad \text{untuk } \; i \in [1, n].$$

2. Label tiap garis menggunakan rumus

$$\lambda(u_i v_i) = \begin{cases} 3n + i, & \text{untuk } \; i = 1 \\ 3n - i + 5, & \text{untuk } \; i \in [\lceil \frac{n}{2} \rceil, n], \end{cases}$$
$$\lambda(v_i v_{i+1(\text{mod n})}) = 2n + i, \quad \text{untuk } \; i \in [1, n].$$

Kasus 2. Graf matahari S_n untuk $n = 5$

1. Label tiap titik mengikuti rumus

$$\lambda(u_i) = 2n - i + 1, \text{ untuk } \ i \in [1, n]$$
$$\lambda(v_i) = i, \quad \text{untuk } \ i \in [1, n].$$

2. Label tiap garis menggunakan rumus

$$\lambda(u_i v_i) = \begin{cases} 2(n+i)+4, & \text{untuk } \ i \in [1, \lceil \frac{n}{2} \rceil] \\ 2(n+i)-1, & \text{untuk } \ i \in [\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, n], \end{cases}$$
$$\lambda(v_i v_{i+1(\text{mod n})}) = \begin{cases} 3n - 2i + 2, & \text{untuk } \ i \in [1, \lceil \frac{n}{2} \rceil] \\ 4n - 2i + 2, & \text{untuk } \ i \in [\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, n]. \end{cases}$$

Kasus 3. Graf matahari S_n untuk $n = 7$

1. Label tiap titik mengikuti rumus

$$\lambda(u_i) = 2n - i + 1, \text{ untuk } \ i \in [1, n]$$
$$\lambda(v_i) = i, \quad \text{untuk } \ i \in [1, n].$$

2. Label tiap garis menggunakan rumus

$$\lambda(u_i v_i) = \begin{cases} 3n + 2i - 1, & \text{untuk } \ i \in [1, \lceil \frac{n}{2} \rceil] \\ 3n + i + 1, & \text{untuk } \ i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ n + 2(2+i), & \text{untuk } \ i \in [\lceil \frac{n}{2} \rceil + 2, n], \end{cases}$$
$$\lambda(v_i v_{i+1(\text{mod n})}) = \begin{cases} 3n + i - 2, & \text{untuk } \ i \in [1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1] \\ 2n + i - 1, & \text{untuk } \ i \in [\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil] \\ n + i + 3, & \text{untuk } \ i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ 3n - i + 4, & \text{untuk } \ i \in [\lceil \frac{n}{2} \rceil + 2, n]. \end{cases}$$

Kasus 4. Graf matahari S_n untuk $n = 9$

1. Label tiap titik mengikuti rumus

$$\lambda(u_i) = 2n - i + 1, \text{ untuk } \ i \in [1, n]$$
$$\lambda(v_i) = i, \quad \text{untuk } \ i \in [1, n].$$

2. Label tiap garis menggunakan rumus

$$\lambda(u_iv_i) = \begin{cases} (n+i)(\frac{n}{3}), & \text{untuk} \quad i \in [1, \frac{n}{3}] \\ 5n - 3i + 2, & \text{untuk} \quad i \in [\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil] \\ 5n + 4 - 3i, & \text{untuk} \quad i \in [\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2] \\ 5i - n - 2, & \text{untuk} \quad i \in [n-1, n], \end{cases}$$

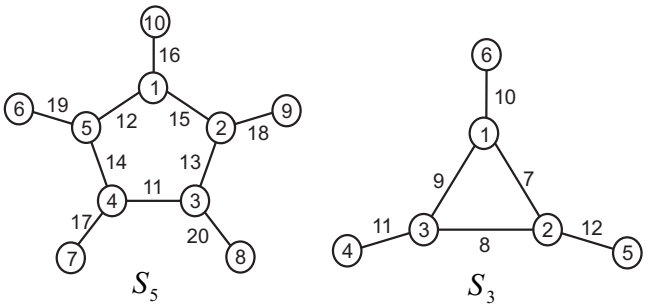
$$\lambda(v_iv_{i+1(\text{mod n})}) = \begin{cases} 2n + 3(i+1), & \text{untuk} \quad i \in [1, \frac{n}{3} - 1] \\ 7i - 2, & \text{untuk} \quad i \in [\frac{n}{3}, \frac{n}{3} + 1] \\ 5i - 5, & \text{untuk} \quad i \in [\frac{2n}{3} - 1, \frac{2n}{3}] \\ n + i + 5, & \text{untuk} \quad i \in [\frac{2n}{3} + 1, n]. \end{cases}$$

Selanjutnya dapat ditentukan jumlah ajaib super S_n untuk $n = 3, 5, 7, 9$ adalah konstan di setiap subgraf H yang isomorfik dengan $K_{1,3}$. Jumlah ajaib super mengikuti persamaan (4.5) diperoleh

$$s(\lambda(H)) = 15 + 23\lfloor \frac{n}{2} \rfloor. \tag{4.6}$$

□

Sebagai contoh pelabelan selimut $K_{1,3}$-ajaib super pada graf matahari S_n dengan $n = 3, 5$ dapat dilihat pada Gambar 4.2. Dari Gambar 4.2 dapat dilihat



Gambar 4.2. Pelabelan selimut $K_{1,3}$ pada graf matahari S_5 dan S_3

bahwa misal untuk suatu subgraf H pada S_3 yang isomorfik dengan $K_{1,3}$, titik pusatnya v_1 diperoleh

$$\lambda(v_1) = 1, \qquad \lambda(u_1) = 6, \qquad \lambda(v_2) = 2, \quad \lambda(v_3) = 3,$$
$$\lambda(v_1u_1) = 10, \quad \lambda(v_1v_2) = 7, \quad \lambda(v_1v_3) = 9.$$

Jumlah ajaib super yang didapatkan dengan mengikuti persamaan (4.5) adalah $s(\lambda(H)) = 38$. Sedangkan, misal untuk suatu subgraf H pada S_5 yang isomorfik dengan $K_{1,3}$, titik pusat pada v_2 diperoleh

$$\lambda(v_2) = 2, \qquad \lambda(u_2) = 9, \qquad \lambda(v_1) = 1, \quad \lambda(v_3) = 3,$$
$$\lambda(v_2u_2) = 18, \quad \lambda(v_1v_2) = 15, \quad \lambda(v_2v_3) = 13.$$

Jumlah ajaib supernya adalah $s(\lambda(H)) = 61$.

Bab V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Sesuai dengan masalah yang dirumuskan dan penelitian yang telah dilakukan diperoleh suatu kesimpulan bahwa pelabelan selimut bintang $K_{1,3}$-ajaib super pada graf *generalized* Petersen dan graf matahari dapat ditentukan polanya. Pola pelabelan ini menghasilkan

1. graf *generalized* Petersen $GP_{n,k}$ dengan $n = 5, 7$ dan $k = 1, 2$ adalah $K_{1,3}$-ajaib super (Teorema 4.1.1), dan
2. graf matahari S_n untuk $n = 3, 5, 7, 9$ adalah $K_{1,3}$-ajaib super (Teorema 4.2.1).

5.2 Saran

Saran bagi pembaca adalah pelabelan selimut ajaib super pada graf *generalized* Petersen dapat diperluas dengan menggunakan selimut selain graf bintang, misalkan graf lintasan atau graf *cycle*. Pelabelan selimut bintang $K_{1,3}$-ajaib super pada graf *generalized* Petersen untuk $n \geq 7$ dan graf matahari untuk $n \geq 9$.