PERBANDINGAN UJI CRAMER-VON MISES, KOLMOGOROV-SMIRNOV, DAN WILCOXON UNTUK DUA SAMPEL BEBAS DENGAN METODE SIMULASI

oleh

TATIK DWI LESTARI

M0109066

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar

Sarjana Sains Matematika

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

SURAKARTA

2013

SKRIPSI

PERBANDINGAN UJI CRAMER-VON MISES, KOLMOGOROV-SMIRNOV, DAN WILCOXON UNTUK DUA SAMPEL BEBAS DENGAN METODE SIMULASI

yang disiapkan dan disusun oleh

TATIK DWI LESTARI

NIM. M0109066

dibimbing oleh

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. Sugiyanto, M.Si.	Supriyadi Wibowo, M.Si.
NIP. 19611224 199203 1 003	NIP. 19681110 199512 1 001

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji

pada hari Selasa, tanggal 29 Januari 2013

dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Anggota Tim Penguji	Tanda Tangan
1. Dra. Etik Zukhronah, M.Si.	1. ....
NIP. 19661213 199203 2 001	
2. Drs. Muslich, M.Si.	2. ....
NIP. 19521118 197903 1 001	

Disahkan oleh

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dekan,	Ketua Jurusan Matematika,
Prof. Ir. Ari Handono Ramelan, M.Sc., (Hons)., Ph.D.	Irwan Susanto, DEA.
NIP. 19610223 198601 1 001	NIP. 19710511 199512 1 001

ABSTRAK

Tatik Dwi Lestari, 2013. PERBANDINGAN UJI CRAMER-VON MISES, KOLMOGOROV-SMIRNOV, DAN WILCOXON UNTUK DUA SAMPEL BEBAS DENGAN METODE SIMULASI. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret.

Uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, dan Wilcoxon merupakan uji-uji nonparametrik untuk dua sampel bebas. Dalam menguji hipotesis apakah dua sampel bebas berasal dari populasi yang sama, ketiganya memiliki perbedaan statistik uji. Statistik uji Cramer-von Mises dibentuk oleh kuadrat dari selisih fungsi distribusi empiris kedua sampel yang diboboti oleh variansinya. Statistik uji Kolmogorov-Smirnov dibentuk oleh nilai mutlak terbesar dari selisih kedua distribusi empiris. Statistik uji Wilcoxon dibentuk melalui peringkat gabungan dari kedua sampel. Hal ini menyebabkan ketiga uji tidak dapat dibandingkan secara analisis.

Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan ketiga uji dengan metode simulasi yang berdasarkan pada probabilitas penolakan H_0 ketika H_0 salah. Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh kesimpulan bahwa uji Cramer-von Mises merupakan uji yang terkuat dalam menolak H_0 ketika H_0 salah.

Kata kunci : *dua sampel bebas, simulasi, uji Cramer-von Mises, uji Kolmogorov-Smirnov, uji Wilcoxon.*

ABSTRACT

Tatik Dwi Lestari, 2013. COMPARISON OF CRAMER-VON MISES, KOLMOGOROV-SMIRNOV, AND WILCOXON TESTS FOR TWO INDEPENDENT SAMPLES USING SIMULATION METHODS. Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Sebelas Maret University.

Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, and Wilcoxon tests are nonparametric tests for two independent samples. In testing the hypothesis whether two independent samples come from the same population, they have difference in test statistics. The test statistic of Cramer-von Mises is established by the squared difference of the empirical distribution functions of two samples that weighted by the variance. The test statistic of Kolmogorov-Smirnov is formed by the largest absolute value of the difference of the empirical distribution. The test statistic of Wilcoxon is formed through the combine ranking of two samples. Because of this condition, so they cannot be compared analytically.

The aim of this research is to compare the three tests using simulation methods based on the probability of rejecting H_0 when H_0 is false. Based on these results, it is concluded that the Cramer-von Mises test is the strongest test in rejecting H_0 when H_0 is false.

Key words : *Cramer-von Mises test, Kolmogorov-Smirnov test, simulation, two independent samples, Wilcoxon test.*

PERSEMBAHAN

Karya ini kupersembahkan untuk

$\star$ Ibu dan Bapakku tercinta.$\star$

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan beberapa pihak, oleh karena itu penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini, khususnya kepada

1. Bapak Drs. Sugiyanto, M.Si. selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, saran, serta ide-ide dalam penulisan skripsi ini,
2. Bapak Supriyadi Wibowo, M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan dan saran dalam penulisan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Surakarta, Januari 2013

Penulis

Daftar Isi

Daftar Tabel

Daftar Gambar

DAFTAR NOTASI

$[p, q]$	:	selang tertutup dari p sampai q
α	:	tingkat signifikansi, probabilitas kesalahan tipe I
β	:	probabilitas kesalahan tipe II
μ	:	parameter mean
σ^2	:	parameter variansi
$\Phi(.)$	:	fungsi distribusi normal standar
$\Gamma(.)$	:	fungsi gamma
$B(.)$	:	fungsi beta
S	:	ruang sampel
X	:	variabel random
X_i	:	sampel random ke-i
x	:	harga yang mungkin diperoleh sehubungan dengan variabel random
$f_X(.)$	:	fungsi kepadatan probabilitas dari variabel random X
$F_X(.)$	:	fungsi distribusi kumulatif dari variabel random X
$F_n(.)$	:	fungsi distribusi empiris
$E(X)$	:	harga harapan (mean) dari variabel random X
$E(X^k)$	:	moment ke-k dari variabel random X
H_0	:	hipotesis nol
H_1	:	hipotesis alternatif
$var(X)$	:	variansi dari variabel random X
$cov(X)$	:	covariansi dari variabel random X
$\|J\|$	:	matriks Jacobi
κ	:	fungsi bessel
$N(0, 1)$	:	distribusi normal standar
$N(\mu, \sigma^2)$	:	distribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2
$BETA(\alpha, \beta)$	:	distribusi beta dengan parameter α dan β
$EXP(\lambda)$	:	distribusi eksponensial dengan parameter λ

Bab I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Statistika adalah disiplin ilmu yang mempelajari metode pengumpulan, penyajian, analisis dan penyimpulan suatu data agar menghasilkan informasi yang jelas. Salah satu bagian penting dalam statistika yaitu persoalan inferensi atau penarikan kesimpulan. Dua hal pokok dalam statistika inferensi yaitu penaksiran parameter populasi dan uji hipotesis (Supriana dan Barus [24]). Teknik dalam statistika inferensi yang pertama dikembangkan yaitu teknik pembuatan asumsi sifat populasi dimana sampel telah diambil. Teknik tersebut dikenal sebagai statistika parametrik karena nilai-nilai populasi merupakan parameter. Distribusi populasi atau distribusi variabel acak yang digunakan statistika parametrik mempunyai bentuk matematik yang diketahui, akan tetapi memuat beberapa parameter yang tidak diketahui. Permasalahan yang harus diselesaikan adalah menaksir parameter-parameter yang tidak diketahui tersebut dengan sampel atau melakukan uji hipotesis tertentu yang berhubungan dengan parameter populasi.

Pada kenyataannya sangat sulit mendapatkan sampel yang memenuhi asumsi distribusi tertentu. Kebanyakan sampel yang diperoleh tidak diketahui sama sekali distribusinya. Oleh karena itu, dikembangkan suatu teknik statistika inferensi yang tidak memerlukan uji asumsi tertentu mengenai distribusi sampel dan tidak memerlukan uji hipotesis yang berhubungan dengan parameter populasi. Teknik tersebut dikenal dengan statistika nonparametrik (Bhattacharya [12]).

Pengujian untuk membandingkan dua populasi berdasarkan sampel bebas sering ditemukan dalam statistika inferensi. Jika asumsi-asumsi yang mendasari uji statistika parametrik dipenuhi maka digunakan uji t. Namun, jika tidak dipenuhi maka dapat digunakan uji-uji nonparametrik untuk dua sampel bebas

(Bhattacharya [12]).

Beberapa uji pada statistika nonparametrik untuk dua sampel bebas yang telah diperkenalkan oleh statistikawan diantaranya yaitu uji Cramer-von Mises yang telah diperkenalkan oleh Cramer dan von Mises, uji Kolmogorov-Smirnov oleh Kolmogorov dan Smirnov, dan uji Wilcoxon oleh Frank Wilcoxon. Ketiga uji tersebut dapat digunakan untuk menguji apakah dua sampel bebas berasal dari populasi yang sama dengan asumsi populasinya memiliki fungsi distribusi kontinu.

Menurut Shabri dan Jemain [22], belum ada kesepakatan ahli statistik untuk menentukan uji statistik yang paling kuat dari uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov dan Wilcoxon. Penggunaan uji statistik yang paling kuat sangat penting karena jika uji statistik yang mempunyai kekuatan rendah digunakan maka dapat menyebabkan kemungkinan penerimaan hipotesis nol (H_0) yang salah meningkat. Untuk memperoleh uji terkuat maka ketiga uji harus dibandingkan. Menurut Conover [5], beberapa uji statistik dapat dibandingkan berdasarkan *power*. *Power* merupakan besarnya probabilitas menolak H_0 ketika H_0 salah.

Pada penelitian sebelumnya, Lee [14] membandingkan uji Mann-Whitney dan Kolmogorov-Smirnov untuk dua sampel bebas. Prinsip dari uji Mann-Whitney sama dengan uji Wilcoxon untuk dua sampel bebas. Perbandingan tersebut dilakukan dengan simulasi Monte Carlo yang didasarkan pada *power* dari kedua uji. Dalam simulasi tersebut dua sampel yang dibangkitkan dibagi menjadi tiga macam yaitu dengan perbedaan variansi, skewnes, dan kurtosis. Hasil dari penelitian Lee [14] menunjukkan bahwa uji Kolmogorov-Smirnov lebih kuat daripada uji Mann-Whitney. Ross dan Adams [21] melakukan simulasi uji Cramer-von Mises dan Kolmogorov-Smirnov dengan simulasi Monte Carlo. Dalam simulasi tersebut dihasilkan nilai *p-value* dari kedua uji yang digunakan untuk membandingkan uji Cramer-von Mises dan Kolmogorov-Smirnov. Hasil dari penelitian tersebut menunjukkan bahwa uji Cramer-von Mises lebih kuat daripada uji Kolmogorov-Smirnov. Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan dilakukan simulasi ketiga uji berdasarkan persentase penolakan H_0 apabila H_0 salah sehingga diharapkan dapat menjelaskan uji terkuat diantara uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, dan Wilcoxon.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dapat dirumuskan masalah yaitu bagaimana melakukan simulasi untuk membandingkan uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, dan Wilcoxon berdasarkan persentase penolakan H_0 apabila H_0 salah.

1.3 Batasan Masalah

Penulis membatasi masalah dalam penelitian ini agar tidak meluas yaitu

1. tidak ada nilai pengamatan yang sama (*ties*) dalam masing-masing sampel,
2. uji hipotesis dilakukan untuk dua sisi.

1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, dan Wilcoxon berdasarkan persentase penolakan H_0 apabila H_0 salah dengan metode simulasi.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah untuk memberikan referensi kajian ilmiah kepada statistikawan untuk menentukan uji yang terkuat di antara uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, dan Wilcoxon dengan metode simulasi berdasarkan persentase penolakan H_0 ketika H_0 salah.

Bab II

LANDASAN TEORI

Landasan teori ini terdiri dari tiga subbab, yaitu tinjauan pustaka, landasan teori, dan kerangka pemikiran.

2.1 Tinjauan Pustaka

Penelitian sebelumnya yang mendasari penelitian penulis yaitu Lee [14] dan Ross & Adams [21]. Lee [14] membandingkan uji Mann-Whitney dan Kolmogorov-Smirnov untuk dua sampel bebas. Prinsip dari uji Mann-Whitney ini sama dengan uji Wilcoxon untuk dua sampel bebas. Perbandingan tersebut dilakukan dengan simulasi Monte Carlo yang didasarkan pada *power* dari kedua uji. Dua sampel yang dibangkitkan dalam simulasi dibagi menjadi tiga macam yaitu dengan perbedaan variansi, skewnes, dan kurtosis. Hasil simulasi Monte Carlo menunjukkan bahwa rata-rata kesalahan tipe I uji Kolmogorov-Smirnov lebih kecil daripada Mann-Whitney jika ukuran sampel berbeda dan uji Mann-Whitney lebih kuasa daripada uji Kolmogorov-Smirnov jika ukuran sampel sama dan kecil. Jika variansi dari dua sampel berbeda maka uji Kolmogorov-Smirnov lebih kuasa dibandingkan Mann-Whitney. Dan kuasa uji Kolmogorov-Smirnov juga lebih besar daripada uji Mann-Whitney ketika ukuran sampel besar dan jika terdapat dua kasus yaitu perbedaan rasio skewness dari dua populasi lebih besar dari 0,5 dengan kurtosis dan variansi sama, atau jika perbedaan rasio kurtosis dari dua populasi lebih besar dari 2,0 dengan skewnes dan variansi sama. Sehingga dari penelitian Lee [14] dapat diperoleh kesimpulan bahwa uji Kolmogorov-Smirnov lebih kuasa daripada uji Mann-Whitney.

Ross dan Adams [21] melakukan simulasi uji Cramer-von Mises dan Kolmogorov-Smirnov dengan simulasi Monte Carlo. Dalam simulasi tersebut dihasilkan nilai *p-value* dari kedua uji yang digunakan untuk membandingkan uji Cramer-von Mises dan Kolmogorov-Smirnov. Hasil dari penelitian tersebut menunjukkan bahwa uji Cramer-von Mises lebih kuat daripada uji Kolmogorov-Smirnov.

2.2 Landasan Teori

2.2.1 Integral Tertentu dari Fungsi Tangga

Menurut Leithhold [16], misalkan f suatu fungsi terbatas yang didefinisikan pada interval $[u, v]$. Interval $[u, v]$ dibagi menjadi n subinterval dengan memilih $n-1$ titik di antara titik u dan v. Misalkan $x_0^\star = u, x_n^\star = v$ dan $x_1^\star, x_2^\star, ..., x_{n-1}^\star$ sebagai titik antara, sedemikian sehingga

$$u = x_0^\star < x_1^\star < x_2^\star < ... < x_{n-1}^\star < x_n^\star = v.$$

Jarak antara titik-titik $x_0^\star, x_1^\star, x_2^\star, ..., x_{n-1}^\star, x_n^\star$ tidak perlu sama. Subinterval pertama adalah $[x_0^\star, x_1^\star]$, subinterval kedua adalah $[x_1^\star, x_2^\star]$, dan seterusnya, sehingga secara umum subinterval ke-h adalah $[x_{h-1}^\star, x_h^\star]$ untuk $h = 1, 2, ..., n$. Misalkan $\Delta_1 x^\star$ merupakan panjang dari subinterval pertama sehingga $\Delta_1 x^\star = x_1^\star - x_0^\star$, $\Delta_2 x^\star$ merupakan panjang dari subinterval kedua sehingga $\Delta_2 x^\star = x_2^\star - x_1^\star$, dan seterusnya sehingga panjang subinterval ke-h adalah $\Delta_h x^\star$ dan $\Delta_h x^\star = x_h^\star - x_{h-1}^\star$. Salah satu subinterval itu adalah subinterval terpanjang, meskipun lebih dari satu subinterval yang serupa. Panjang subinterval terpanjang dinyatakan dengan $||\Delta||$ yang disebut dengan norm partisi.

Dalam setiap subinterval diambil sebuah titik sebarang. Misalkan x_1 adalah titik yang terdapat di dalam $[x_0^\star, x_1^\star]$ sehingga $x_0^\star \leq x_1 \leq x_1^\star, x_{(2)}$ adalah titik yang terdapat di dalam $[x_1^\star, x_2^\star]$ sehingga $x_1^\star \leq x_2 \leq x_2^\star$ dan seterusnya. Jadi x_h adalah titik yang terdapat di dalam $[x_{h-1}^\star, x_h^\star]$ sehingga $x_{h-1}^\star \leq x_h \leq x_h^\star$. Dari uraian tersebut dapat dibentuk suatu penjumlahan, yaitu

$$R_n = \sum_{h=1}^{n} f(x_h) \Delta_h x^\star$$

R_n disebut jumlah Riemann pada interval $[u, v]$.

Definisi 2.2.1. (Leithold [16]) *Jika f suatu fungsi terbatas yang didefinisikan pada interval $[u, v]$, maka integral tertentu f dari u sampai v yang dinyatakan dengan $\int_u^v f(x)dx$, diberikan oleh*

$$\int_u^v f(x)dx = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{h=1}^{n} f(x_h)\Delta_h x^\star$$

jika limit itu ada.

Selanjutnya akan diberikan definisi untuk integral tertentu dari fungsi tangga, tetapi terlebih dahulu diberikan definisi mengenai fungsi tangga.

Definisi 2.2.2. (Apostol [3]) *Fungsi f dengan domain interval $[u, v]$ disebut fungsi tangga bila terdapat sebuah partisi $P = \{x_0^\star, x_1^\star, x_2^\star, ..., x_{n-1}^\star, x_n^\star\}$ pada $[u, v]$ sedemikian sehingga f bernilai konstanta pada setiap subinterval $[x_{h-1}^\star, x_h^\star]$ dari P. Untuk setiap $h = 1, 2, ..., n$ terdapat bilangan f_h sedemikian sehingga*

$$f(x_h) = f_h$$

dengan $x_{h-1}^\star \leq x_h \leq x_h^\star$.

Definisi 2.2.3. (Apostol [3]) *Misalkan f adalah fungsi tangga yang didefinisikan pada interval $[u, v]$, integral tertentu f dari u sampai v yang dinotasikan dengan $\int_u^v f(x)dx$, didefinisikan dengan*

$$\int_u^v f(x)dx = \sum_{h=1}^{n} f_h(x_h^\star - x_{h-1}^\star).$$

2.2.2 Konsep Dasar Statistika

Beberapa konsep dasar statistika yang harus diketahui untuk menunjang materi dalam pembahasan antara lain populasi, ruang sampel, sampel random, variabel random, probabilitas, fungsi distribusi kumulatif, fungsi kepadatan probabilitas, mean dan variansi.

Definisi 2.2.4. (Walpole dan Myers [26]) *Populasi adalah keseluruhan observasi yang menjadi perhatian. Karakteristik (setiap ciri yang terukur) dalam populasi disebut parameter. Contoh dari parameter yaitu mean dan variansi populasi.*

Definisi 2.2.5. (Bain dan Engelhardt [4]) *Himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan disebut ruang sampel, dinotasikan dengan S. Himpunan dari nilai-nilai observasi atau data $x_1, x_2, ..., x_n$ yang diperoleh dari percobaaan disebut sampel random.*

Definisi 2.2.6. (Bain dan Engelhardt [4]) *Variabel random X adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada ruang sampel S yang berkaitan dengan suatu bilangan real x, sedemikian hingga $X(e) = x$, dengan e merupakan setiap hasil yang mungkin dalam S. Variabel random terbagi menjadi dua macam yaitu variabel random diskrit dan variabel random kontinu.*

Definisi 2.2.7. (Goodman [10]) *Probabilitas adalah kemungkinan terjadinya suatu peristiwa di antara keseluruhan peristiwa yang terjadi.*

Definisi 2.2.8. (Bain dan Engelhardt [4]) *Fungsi distribusi kumulatif dari variabel random X untuk setiap bilangan real x dinyatakan dengan*

$$F_X(x) = P[X \leq x].$$

Definisi 2.2.9. (Bain dan Engelhardt [4]) *Jika himpunan seluruh hasil yang mungkin dari variabel random X merupakan himpunan terhitung $x_1, x_2, ..., x_n$ maka X disebut variabel random diskrit. Fungsi*

$$f_X(x) = P[X = x]$$

menyatakan probabilitas untuk tiap nilai x yang mungkin, selanjutnya disebut fungsi kepadatan probabilitas (fkp) diskrit.

Definisi 2.2.10. (Bain dan Engelhardt [4]) *Suatu variabel random X disebut variabel random kontinu jika terdapat fungsi $f_X(x)$ yang disebut fkp dari X, sedemikian sehingga fungsi distribusi kumulatifnya yaitu*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx.$$

Definisi 2.2.11. (Bain dan Engelhardt [4]) *Mean dari variabel random X, dengan fkp $f_X(x)$ didefinisikan sebagai*

$$E(X) = \sum_i x_i f_X(x_i), \textit{bila } x \textit{ diskrit dan} \tag{2.1}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, \textit{ bila } x \textit{ kontinu}$$

Jika $a_1, a_2, ..., a_n$ adalah konstanta dan $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah variabel random maka

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) \tag{2.2}$$

Definisi 2.2.12. (Bain dan Engelhardt [4]) *Moment ke-k di sekitar pusat variabel random X adalah*

$$\sigma_k^\star = E(X^k)$$

dan moment ke-k di sekitar mean adalah

$$\begin{aligned} \sigma_k &= E[X - E(X)]^k \\ &= E[X - \mu]^k. \end{aligned}$$

Definisi 2.2.13. (Bain dan Engelhardt [4]) *Variansi dari variabel random X, didefinisikan dengan*

$$Var[X] = [E(X - \mu)^2]$$

Definisi 2.2.14. (Bain dan Engelhardt [4]) *Jika X variabel random, maka variansi dari X, adalah*

$$Var[X] = E[X^2] - \mu^2. \tag{2.3}$$

Jika $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah variabel random dan $a_1, a_2, ..., a_n$ adalah konstanta maka

$$Var(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} cov(X_i, X_j) \tag{2.4}$$

dan jika $X_1, X_2, ..., X_n$ independen maka

$$Var(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i). \tag{2.5}$$

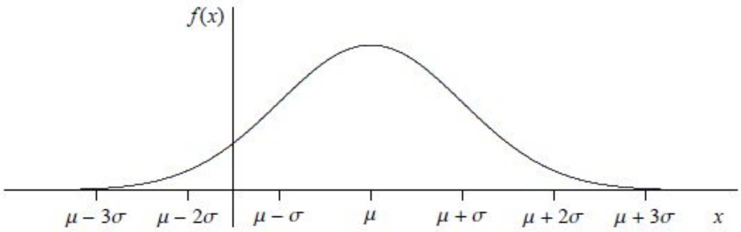
2.2.3 Distribusi Normal

Menurut Tanizaki [25], distribusi normal dinotasikan dengan $N(\mu, \sigma^2)$ memiliki fungsi kepadatan probabilitas yaitu

$$f_X(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2], \text{dengan } -\infty < x < \infty,$$

yang diberikan pada Gambar 2.1. Mean dan variansi distribusi normal masing-masing yaitu

$$E(X) = \mu, \text{ dan } Var(X) = \sigma^2.$$



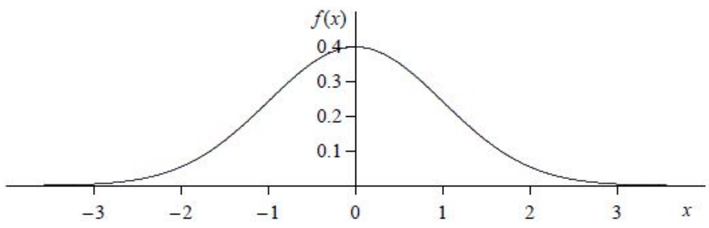
Gambar 2.1. Distribusi normal

2.2.4 Distribusi Normal Standar

Menurut Tanizaki [25], distribusi normal dengan mean 0 dan variansi 1 yang disebut distribusi normal standar, memiliki fungsi kepadatan probabilitas yaitu

$$f_X(x; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{1}{2}(x^2)], \text{dengan } -\infty < x < \infty,$$

yang diberikan pada Gambar 2.2.



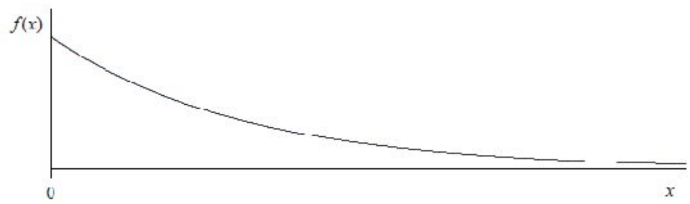
Gambar 2.2. Distribusi normal standar

2.2.5 Distribusi Eksponensial

Menurut Tanizaki [25], distribusi eksponensial dengan parameter λ memiliki fungsi kepadatan probabilitas yaitu

$$f_X(x;\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\exp[-x/\lambda], \text{ untuk } 0 < x < \infty, \\ 0, \text{ untuk yang lain,} \end{cases}$$

dan diberikan pada Gambar 2.3. Mean dan variansi distribusi eksponensial masing-masing yaitu $E(X) = \lambda$ dan $Var(X) = \lambda^2$.



Gambar 2.3. Distribusi eksponensial

2.2.6 Distribusi Uniform

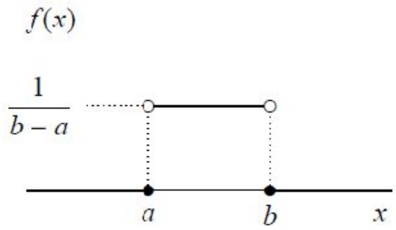
Menurut Tanizaki [25], distribusi uniform pada interval a dan b memiliki fungsi kepadatan probabilitas yaitu

$$f_X(x;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, \text{ untuk } a < x < b, \\ 0, \text{ untuk yang lain,} \end{cases}$$

dan diberikan pada Gambar 2.4. Mean dan variansi distribusi uniform masing-masing yaitu $E(X) = \frac{a+b}{2}$ dan $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

2.2.7 Fungsi Gamma

Dalam menentukan kaidah pengambilan keputusan uji Cramer-von Mises digunakan sifat-sifat fungsi gamma. Namun terlebih dahulu akan dijelakan definisi fungsi gamma yaitu



Gambar 2.4. Distribusi uniform

Definisi 2.2.15. (Bain dan Engelhardt [4]) *Fungsi gamma dinotasikan dengan* $\Gamma(x)$*, untuk* $x > 0$ *didefinisikan dengan*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} ds.$$

Menurut Jeffrey [11], fungsi gamma mempunyai sifat-sifat yaitu

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, dengan $x > 0$
2. $\Gamma(q+1) = q!$, dengan q bilangan bulat positif
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
4. $c(c+d)(c+2d)(c+3d)...(c+qd) = d^{q-1}\frac{\Gamma(\frac{c}{d}+q+1)}{\Gamma(\frac{c}{d})}$ dengan q bilangan bulat positif, $c > 0$ dan $d > 0$.

2.2.8 Distribusi Beta

Menurut Tanizaki [25], distribusi beta dengan parameter α dan β memiliki fungsi kepadatan probabilitas yaitu

$$f_X(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \text{ untuk } 0 < x < 1,\ \alpha > 0 \text{ dan } \beta > 0, \\ 0, \text{ untuk yang lain,} \end{cases}$$

dan B disebut fungsi beta yang dapat ditentukan dengan

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \quad = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Mean dan variansi distribusi beta masing-masing yaitu

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \text{ dan } Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

2.2.9 Statistik Terurut

Pada subbab ini diberikan pengertian tentang statistik terurut dan hal yang berhubungan dengan statistik terurut antara lain fkp bersama statistik terurut, fkp marginal statistik terurut dan momen statistik terurut. Menurut Gibbons [9], misalkan $X_1, X_2, ..., X_n$ merupakan sampel random berukuran n yang diambil dari sebuah populasi dengan fungsi distribusi kumulatif $F_X(x)$ kontinu dan tidak ada observasi dalam sampel yang mempunyai nilai sama, maka terdapat suatu susunan terurut dari sampel yaitu $X_{(1)} < X_{(2)} < ... < X_{(n)}$ yang disusun dalam urutan naik. Susunan ini disebut dengan statistik terurut dari sampel random $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$.

Statistik terurut sangat berguna terutama dalam statistik nonparametrik karena transformasi $Z_{(i)} = F_X(X_{(i)})$ menghasilkan variabel random yang berupa statistik terurut ke-i dari populasi berdistribusi uniform pada interval $[0, 1]$. Sifat ini kemudian disebut transformasi probabilitas integral, yang dibuktikan dengan Teorema 2.2.1.

Teorema 2.2.1. (Rohatgi [20]) *Misalkan variabel random X mempunyai fungsi distribusi kumulatif $F_X(x)$. Jika $F_X(x)$ kontinu, maka variabel random Z yang dihasilkan oleh transformasi $Z = F_X(X)$, mempunyai distribusi uniform pada interval $[0, 1]$.*

Teorema 2.2.2. (Bain dan Engelhardt [4]) *Jika $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah sampel random dari suatu populasi dengan fkp kontinu $f_X(x)$, maka fkp bersama dari statistik terurut $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ adalah*

$$f_{X_{(1)},X_{(2)},...,X_{(n)}}(x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}) = \begin{cases} n! \prod_{i=1}^{n} f_X(x_{(i)}), \textit{untuk } x_{(1)} < x_{(2)} < ... < x_{(n)}, \\ 0, \textit{untuk yang lain.} \end{cases} \tag{2.6}$$

Teorema 2.2.3. (Bain dan Engelhardt [4]) *Misalkan $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah sampel random berukuran n dengan fkp kontinu $f_X(x)$ dan $f_X(x) > 0$ untuk $u < x <$*

v. Fkp dari statistik terurut ke-i, $X_{(i)}$ *adalah*

$$f_{X_{(i)}}(x_{(i)}) = \begin{cases} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}[F_X(x_{(i)})]^{i-1}[1-F_X(x_{(i)})]^{n-i}f_X(x_{(i)}), \text{untuk } u < x_{(i)} < v, \\ 0, \text{untuk yang lain.} \end{cases}$$

Menurut Gibbons [9], misalkan $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah statistik terurut, moment ke-k di sekitar pusat untuk statistik terurut ke-i berdistribusi uniform pada interval $[0,1]$ adalah

$$E(X_{(i)}^k) = \frac{n!(i+k-1)!}{(i-1)!(n+k)!} \tag{2.7}$$

untuk sebarang $1 \leq i \leq n$ dan k bilangan bulat. Dari persamaan (2.7) diperoleh mean untuk statistik terurut ke-i berdistribusi uniform pada interval $[0,1]$ yaitu

$$E(X_{(i)}) = \frac{i}{n+1}$$

sedangkan variansi statistik terurut ke-i yaitu

$$Var(X_{(i)}) = \frac{i(n-i+1)}{(n+1)^2(n+2)}$$

2.2.10 Fungsi Distribusi Empiris

Pada subbab ini diberikan definisi tentang distribusi empiris dan teorema yang berhubungan dengan fungsi distribusi empiris.

Definisi 2.2.16. (Gibbons [9]) *Misalkan* $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ *merupakan statistik terurut dari sampel random* $X_1, X_2, ..., X_n$*, fungsi distribusi empiris* $F_n(x)$ *adalah*

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x < X_{(i)} \\ \frac{i}{n} & \text{jika } X_{(i)} \leq x \leq X_{(i+1)} \\ 1 & \text{untuk } x \geq X_{(n)}. \end{cases} \tag{2.8}$$

dengan $i = 1, 2, ..., n-1$. *Untuk nilai* x *tetap tetapi sebarang,* $F_n(x)$ *merupakan suatu variabel random sehingga mempunyai fkp yang diberikan pada teorema berikut.*

Teorema 2.2.4. (Gibbons [9]) *Untuk variabel random $f_n(x)$ yaitu fungsi distribusi empiris dari sampel random $X_1, X_2, ..., X_n$ dengan fungsi distribusi kumulatif $F_X(x)$ dipunyai*

$$P[F_n(x) = \frac{i}{n}] = C_i^n [F_X(x)]^i [1 - F_X(x)]^{n-i}, \textit{dengan } i = 0, 1, ..., n.$$

Akibat 2.2.5. (Gibbons [9]) *Mean dan variansi dari $F_n(x)$ adalah*

$$E[F_n(x)] = F_X(x) \tag{2.9}$$

$$Var[F_n(x)] = \frac{(F_X(x))(1 - F_X(x))}{n} \tag{2.10}$$

2.2.11 Peringkat(*rank*)

Uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, dan Wilcoxon menggunakan peringkat dalam perhitungan statistik uji. Suatu sampel dapat diperingkat apabila mempunyai skala pengukuran paling tidak ordinal.

Definisi 2.2.17. (Gibbons [9]) *Misalkan $X_1, X_2, ..., X_n$ merupakan sampel random berukuran n, peringkat ke-*i *(G_i) dari sampel tunggal yang tidak terurut adalah jumlah observasi X_p, dimana $p = 1, 2, ..., n$ sedemikian hingga $X_p \leq X_i$. Misalkan $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ merupakan statistik terurut dari sampel random $X_1, X_2, ..., X_n$, peringkat dari statistik terurut ke-*i, *$G_{(i)} = i$.*

Misalkan terdapat dua sampel random $X_1, X_2, ..., X_n$ dan $Y_1, Y_2, ..., Y_m$. Statistik terurut dari kedua sampel masing-masing adalah $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ dan $Y_{(1)}, Y_{(2)}, ..., Y_{(m)}$. Dari Definisi (2.2.16) dapat ditentukan peringkat statistik terurut ke-i dari sampel X yaitu $G_{(i)}$, dimana $i = 1, 2, ..., n$ dan peringkat statistik terurut ke-j dari sampel Y yaitu $H_{(j)}$, dimana $i = 1, 2, ..., m$ dalam sampel gabungan dengan tidak ada *ties* dapat disajikan

$$G_{(i)} = \begin{cases} i & \text{untuk } X_{(i)} < Y_{(1)} \\ i + j & \text{untuk } Y_{(j)} < X_{(i)} < Y_{(j+1)} \\ i + m & \text{untuk } X_{(i)} > Y_{(m)} \end{cases} \tag{2.11}$$

$$H_{(j)} = \begin{cases} j & \text{untuk } Y_{(j)} < X_{(1)} \\ i+j & \text{untuk } X_{(i)} < Y_{(j)} < X_{(i+1)} \\ j+n & \text{untuk } Y_{(j)} > X_{(n)}. \end{cases} \tag{2.12}$$

2.2.12 Uji Hipotesis

Dalam menentukan kebenaran atau kesalahan dari suatu hipotesis yang berdasarkan pada bukti percobaan dilakukan dengan uji hipotesis (Bain dan Engelhardt [4]). Berikut ini beberapa definisi yang berhubungan dengan uji hipotesis.

Definisi 2.2.18. (Walpole dan Myers [26]) *Hipotesis statistik adalah suatu anggapan/pernyataan yang mungkin benar atau tidak mengenai satu populasi atau lebih.*

Ada dua macam hipotesis yaitu hipotesis nol (H_0) dan hipotesis alternatif (H_1). Sebagaimana dituliskan oleh Bhattacharya [12] pengertian dari hipotesis nol dan hipotesis alternatif, yaitu

> In statistics the null hypothesis is the basic hypothesis that is being tested for possible rejection. The claim or hypothesis that we want to build is called the alternative hypothesis.

Definisi 2.2.19. (Bain dan Engelhardt [4]) *Daerah kritis dari uji hipotesis adalah himpunan bagian dari ruang sampel yang membawa ke penolakan H_0.*

Definisi 2.2.20. (Conover [5]) *Statistik uji adalah statistik yang digunakan untuk membantu membuat kesimpulan dalam suatu uji hipotesis.*

Ada dua tipe kesalahan yang mungkin terjadi dalam uji hipotesis yaitu

1. Kesalahan tipe I yaitu menolak H_0 padahal H_0 benar. Probabilitas kesalahan tipe I ini dinotasikan (α), sehingga dapat dituliskan

$$P(\text{Kesalahan tipe I}) = P(TI) = \alpha.$$

2. Kesalahan tipe II yaitu gagal menolak H_0 padahal H_0 salah. Probabilitas kesalahan tipe II ini dinotasikan (β), sehingga dapat dituliskan

$$P(\text{Kesalahan tipe II}) = P(TII) = \beta.$$

Dalam memilih statistik uji dan daerah kritis harus diperhatikan probabilitas kedua tipe kesalahan diatas.

Definisi 2.2.21. (Conover [5]) *Kuasa (power) dinotasikan dengan* $1-\beta$ *adalah probabilitas menolak* H_0 *yang salah, sehingga dapat dituliskan*

$$\text{Kuasa} = 1 - P(\text{Kesalahan tipe II}) = 1 - \beta.$$

2.2.13 Distribusi Asimtotik

Kaidah pengambilan keputusan dari uji Cramer-von Mises dan Kolmogorov Smirnov didasarkan pada distribusi asimtotik. Oleh karena itu, pada subbab ini diberikan definisi dari distribusi asimtotik.

Definisi 2.2.22. (Mood [17]) *Distribusi asimtotik dari variabel random (misalnya* Y_n*) dalam sebuah barisan variabel random* $Y_1, Y_2, ..., Y_n, Y_{n+1}$ *merupakan sembarang distribusi yang hampir sama dengan* Y_n *sebenarnya untuk* n *besar.*

2.2.14 Teorema Limit Pusat

Definisi 2.2.23. (Dudewics dan Mishra [8]) *Misalkan* $X_1, X_2, ..., X_n$ *adalah variabel random yang berdistribusi identik dengan mean dan variansi berhingga, dikatakan memenuhi teorema limit pusat jika* S_n^* *yang didefinisikan sebagai*

$$S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{var(S_n)}}$$

dengan $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, S_n^* *konvergen secara distribusi ke suatu variabel random yang berdistribusi normal dengan mean* 0 *dan variansi* 1 *dan dinotasikan dengan*

$$S_n^* \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1) \text{ ,untuk } n \to \infty.$$

2.2.15 Uji Cramer-von Mises

Pada tahun 1928 Cramer memperkenalkan suatu uji nonparametrik yang menggunakan fungsi distribusi empiris. Kemudian pada tahun 1931 von Mises memodifikasi uji tersebut ke dalam bentuk yang lebih umum yaitu uji Cramer-von Mises untuk satu sampel (del Barrio *et all* [6]). Dari uji untuk satu sampel ini kemudian dikembangkan uji Cramer-von Mises untuk dua sampel bebas. Asumsi yang diperlukan dalam uji Cramer-von Mises yaitu fungsi distribusi populasi tidak diketahui tetapi harus kontinu dan skala pengukuran paling tidak ordinal.

Misalkan dua sampel random diambil dari dua populasi masing-masing dengan fungsi distribusi kumulatif $F_X(x)$ dan $F_Y(x)$. Dari populasi pertama diambil sampel random berukuran n, misalkan $X_1, X_2, ..., X_n$ dan dari populasi yang lain diambil sampel random berukuran m, misalkan $Y_1, Y_2, ..., Y_n$. Menurut Laio [13], statistik terurut dari kedua sampel random misalkan $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ dan $Y_{(1)}, Y_{(2)}, ..., Y_{(m)}$. Fungsi distribusi empiris dari masing-masing sampel yang dinotasikan dengan $F_n(x)$ dan $F_m(x)$, sesuai dengan persamaan (2.8) dapat ditentukan dengan

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } x < X_{(1)} \\ \frac{i}{n} & \text{untuk } X_{(i)} < x < X_{(i+1)} \text{ dengan } i = 1, 2, ..., n-1 \\ 1 & \text{untuk } x \geq X_{(n)} \end{cases} \tag{2.13}$$

dan

$$F_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } x < Y_{(1)} \\ \frac{j}{m} & \text{untuk } Y_{(j)} < x < Y_{(j+1)} \text{ dengan } j = 1, 2, ..., m-1 \\ 1 & \text{untuk } x \geq Y_{(m)} \end{cases} \tag{2.14}$$

Menurut Conover [5], uji Cramer-von Mises digunakan untuk mengetahui apakah dua sampel berasal dari populasi yang sama. Oleh karena itu, dapat dituliskan hipotesis dua sisi dari uji Cramer-von Mises yaitu

$$H_0 : F_X(x) = F_Y(x), \text{untuk semua nilai } x, \tag{2.15}$$

$$H_1 : F_X(x) \neq F_Y(x), \text{untuk paling tidak satu } x, \tag{2.16}$$

dimana $F_X(x)$ dan $F_Y(x)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif dari kedua populasi.

Hipotesis tersebut berarti bila H_0 benar memberikan interpretasi bahwa kedua sampel berasal dari populasi yang sama. Jika berasal dari populasi yang sama maka akan mempunyai karakteristik yang sama.

Untuk menguji H_0 diperkenalkan suatu transformasi untuk variabel random X yaitu $Z = F(X)$. Menurut Teorema (2.2.1), variabel Z berdistribusi uniform pada interval $[0, 1]$. Oleh karena itu, untuk statistik terurut $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$, transformasi $Z_{(i)} = F(X_{(i)})$, dengan $i = 1, 2, ..., n$ menghasilkan variabel random yang berupa statistik terurut ke-i dari populasi berdistribusi uniform pada interval $[0, 1]$ yaitu $Z_{(1)}, Z_{(2)}, ..., Z_{(n)}$. Demikian juga untuk statistik terurut $Y_{(1)}, Y_{(2)}, ..., Y_{(n)}$, transformasi $Z_{(j)} = F(Y_{(j)})$, dengan $j = 1, 2, ..., m$ menghasilkan variabel random yang berupa statistik terurut ke-j dari populasi uniform pada interval $[0, 1]$ yaitu $Z_{(1)}, Z_{(2)}, ..., Z_{(m)}$. Penggunaan transformasi tersebut membuat fungsi distribusi empiris $F_n(x) = F_n(z)$ dan $F_m(x) = F_m(z)$.

Dalam mengkonstruksi statistik uji Cramer-von Mises perlu dicari variansi dari selisih fungsi distribusi empiris kedua sampel yang merupakan pembobot dari statistik uji Cramer-von Mises. Misalkan fungsi distribusi empiris masing-masing sampel dinotasikan dengan $F_n(x)$ dan $F_m(x)$. Selanjutnya selisih fungsi distribusi empiris kedua sampel dinyatakan dengan $[F_n(x) - F_m(x)]$. Variansi $[F_n(x)-F_m(x)]$ yang berdasarkan pada H_0 yaitu dua sampel berasal dari populasi yang sama dengan fungsi distribusi yang tidak diketahui $F(x)$ dapat ditentukan dengan

$$Var[F_n(x) - F_m(x)] = \frac{m+n}{mn}(F(x)[1 - F(x)]). \tag{2.17}$$

Penggunaan transformasi $Z_{(i)} = F(X_{(i)})$, dengan $i = 1, 2, ..., n$ juga menyebabkan persamaan (2.17) menjadi

$$Var[F_n(x) - F_m(x)] = \frac{m+n}{mn}(z[1 - z]). \tag{2.18}$$

Misalkan $\rho(z) = [z(1 - z)]$, maka persamaan (2.18) menjadi

$$Var[F_n(x) - F_m(x)] = \frac{m+n}{mn}\rho(z).$$

Menurut Anderson dan Darling [2], dalam uji Cramer-von Mises digunakan $\rho(z) = 1$ sehingga diperoleh pembobot dari uji Cramer-von Mises yaitu $\frac{m+n}{mn}$. Menurut Anderson [1], statistik uji Cramer-von Mises dibentuk oleh kuadrat dari $[F_n(z) - F_m(z)]$ yang diboboti oleh $\frac{m+n}{mn}$ dan dapat dinyatakan

$$T^\star = \frac{mn}{m+n}[F_n(z) - F_m(z)]^2$$

$T^\star$ merupakan fungsi yang didefinisikan pada interval $[0,1]$. Dari transformasi $Z_{(i)} = F(X_{(i)})$ diperoleh $z_{(1)}, z_{(2)}, ..., z_{(n)}$ dan $z_{(1)}, z_{(2)}, ..., z_{(m)}$ yang merupakan observasi dari $Z_{(1)}, Z_{(2)}, ..., Z_{(n)}$ dan $Z_{(1)}, Z_{(2)}, ..., Z_{(m)}$. Selanjutnya $z_{(1)}, z_{(2)}, ..., z_{(n)}$ dan $z_{(1)}, z_{(2)}, ..., z_{(m)}$ dapat dipandang sebagai titik-titik dalam interval $[0,1]$. Misalkan $z_{(1)}, z_{(2)}, ..., z_{(n)}$ dan $z_{(1)}, z_{(2)}, ..., z_{(m)}$ digabung menjadi satu, maka terdapat $N = m + n$ titik dalam interval $[0,1]$. Jika $z_{(1)}, z_{(2)}, ..., z_{(n)}$ dan $z_{(1)}, z_{(2)}, ..., z_{(m)}$ disusun dalam urutan naik maka terdapat statistik terurut $z_{(h)}$, dimana $h = 1, 2, ..., N$ sedemikian hingga $z_{(1)} < z_{(2)} < ... < z_{(N-1)} < z_{(N)}$.

Jika setiap titik $z_{(h)}$ terdapat dalam suatu interval bagian dalam interval $[0,1]$ maka akan terdapat N interval bagian dalam interval $[0,1]$. Pembagian interval $[0,1]$ menjadi N interval bagian yaitu dengan memilih sebarang $N-1$ titik diantara titik 0 dan 1. Misalkan $z_0^\star = 0, z_N^\star = 1$ dan $z_1^\star, z_2^\star, ..., z_{N-1}^\star$ sebagai titik antara, sedemikian hingga

$$0 = z_0^\star < z_1^\star < z_2^\star < ... < z_{N-1}^\star < z_N^\star = 1.$$

Jarak antara titik-titik $z_0^\star, z_1^\star, ..., z_{N-1}^\star, z_N^\star$ tidak perlu sama. Namun dalam penelitian ini, jarak antara titik-titik $z_0^\star, z_1^\star, ..., z_{N-1}^\star, z_N^\star$ dibuat sama. Himpunan $P = \{z_0^\star, z_1^\star, ..., z_{N-1}^\star, z_N^\star\}$ disebut partisi dari interval $[0,1]$. Misalkan subinterval pertama adalah $[z_0^\star, z_1^\star]$, subinterval kedua adalah $[z_1^\star, z_2^\star]$, dan seterusnya, sehingga secara umum subinterval ke-h adalah $[z_{h-1}^\star, z_h^\star]$ untuk $h = 1, 2, ..., N$. Misalkan $\Delta_1 z^\star$ merupakan panjang dari subinterval pertama dengan $\Delta_1 z^\star = z_1^\star - z_0^\star$, $\Delta_2 z^\star$ merupakan panjang dari subinterval kedua sehingga $\Delta_2 z^\star = z_2^\star - z_1^\star$, dan seterusnya sehingga panjang interval ke-h adalah $\Delta_h z^\star$ dengan $\Delta_h z^\star = z_h^\star - z_{h-1}^\star$. Oleh karena jarak antara titik-titik $z_0^\star, z_1^\star, ..., z_{N-1}^\star, z_N^\star$ dibuat sama sehingga $\Delta_h z^\star = \Delta z$ dengan $\Delta z = \frac{1}{N}$.

Dalam setiap interval bagian diambil sebuah titik sebarang. Misalkan $z_{(1)}$ adalah titik yang diambil di dalam $[z_0^\star, z_1^\star]$ sehingga $z_0^\star \leq z_{(1)} \leq z_1^\star, z_{(2)}$ adalah titik yang diambil di dalam $[z_1^\star, z_2^\star]$ sehingga $z_1^\star \leq z_{(2)} \leq z_2^\star$ dan seterusnya. Jadi $z_{(h)}$ adalah titik yang diambil di dalam $[z_{h-1}^\star, z_h^\star]$ sehingga $z_{h-1}^\star \leq z_{(h)} \leq z_h^\star$. Selanjutnya dapat dibentuk suatu penjumlahan yaitu

$$T_N = \frac{mn}{m+n} \sum_{h=1}^{N} [F_n(z_{(h)}) - F_m(z(h))]^2 \Delta z. \tag{2.19}$$

Persamaan (2.19) disebut jumlah Riemann pada interval $[0, 1]$. Untuk N sangat besar $(N \to \infty)$ berakibat $\Delta z \to 0$ sehingga persamaan (2.19) menjadi

$$T = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{mn}{m+n} \sum_{h=1}^{N} [F_n(z_{(h)}) - F_m(z(h))]^2 \Delta z. \tag{2.20}$$

Persamaan (2.20) kemudian dapat dinyatakan dalam bentuk integral yaitu

$$T = \frac{mn}{m+n} \int_0^1 [F_n(z) - F_m(z)]^2 dz. \tag{2.21}$$

Persamaan (2.21) merupakan bentuk umum dari uji Cramer-von Mises. Karena $F_n(z)$ dan $F_m(z)$ merupakan fungsi tangga sehingga menurut Definisi 2.2.3, persamaan (2.21) menjadi

$$T = \frac{mn}{(m+n)^2} \sum_{h=1}^{N} [F_n(z_{(h)}) - F_m(z_{(h)})]^2. \tag{2.22}$$

Misalkan $z_{(h)}$, dengan $h = 1, 2, ..., N$ dipisahkan meenurut sampel $X_i, i = 1, 2, ..., n$ dan $Y_j, j = 1, 2, ..., m$ maka persamaan (2.22) menjadi

$$T = \frac{mn}{(m+n)^2} (\sum_{i=1}^{n} [F_n(x_{(i)}) - F_m(x_{(i)})]^2 + \sum_{j=1}^{m} [F_n(y_{(j)}) - F_m(y_{(j)})]^2) \tag{2.23}$$

dengan menggunakan persamaan (2.13), (2.14), (2.11) dan (2.12) maka menurut Anderson [1] persamaan (2.23) menjadi

$$T = \frac{1}{(m+n)^2} (\frac{n}{m} \sum_{i=1}^{n} [G_{(i)} - \frac{(m+n)}{mn} i]^2 + \frac{m}{n} \sum_{j=1}^{m} [H_{(j)} - \frac{(m+n)}{m} j]^2). \tag{2.24}$$

Persamaan (2.24) merupakan statistik uji dari uji Cramer-von Mises. Menurut Anderson [1] untuk ukuran kedua sampel sama $(m = n)$ maka

$$T = \frac{1}{4n^2} (\sum_{i=1}^{n} [G_{(i)} - 2i]^2 + \sum_{j=1}^{m} [H_{(j)} - 2j]^2) \tag{2.25}$$

dengan n adalah ukuran sampel X, m adalah ukuran sampel Y, $G_{(i)}$ adalah peringkat statistik terurut ke-i dari sampel X, untuk $i = 1, 2, ..., n$, $H_{(j)}$ adalah peringkat statistik terurut ke-j dari sampel Y, untuk $j = 1, 2, ..., m$.

Kaidah pengambilan keputusan uji Cramer-von Mises melibatkan distribusi asimtotik dari statistik uji Cramer-von Mises, sehingga perlu ditentukan distribusi asimtotik tersebut. Menurut Anderson dan Darling [2], distribusi asimtotik dari uji Cramer-von Mises adalah

$$\tau(w) = \frac{1}{\pi\sqrt{w}}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t C_t^{-\frac{1}{2}}(4t+1)^{\frac{1}{2}}\exp(-\frac{(4t+1)^2}{16w})\kappa_{\frac{1}{4}}[\frac{(4t+1)^2}{16w}]$$

dengan

$$C_t^{-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^t\Gamma(\frac{1}{2}+t)}{\Gamma(\frac{1}{2})t!}.$$

Menurut Conover [5], aturan pengambilan keputusan untuk uji Cramer-von Mises yaitu H_0 ditolak pada tingkat signifikansi α bila T lebih besar dari kuantil $(1-\alpha)$ atau dapat ditulis $T > w_{(1-\alpha)}$. Kuantil ini merupakan pendekatan yang didasarkan pada distribusi asimtotik. Nilai $w_{(1-\alpha)}$ secara lengkap terdapat pada Lampiran 1 Tabel 5.1.

2.2.16 Uji Kolmogorov-Smirnov

Pada tahun 1930 Kolmogorov memperkenalkan suatu uji kecocokan data (*goodness of fit test*) untuk satu sampel atau sering disebut uji Kolmogorov satu sampel. Selanjutnya pada tahun 1939 Smirnov mengembangkan uji tersebut untuk dua sampel bebas yang dikenal sebagai uji Kolmogorov-Smirnov dua sampel. Dalam uji Kolmogorov-Smirnov satu sampel, yang dibandingkan yaitu fungsi distribusi empiris dari sampel dengan fungsi distribusi kumulatif yang dihipotesiskan, sedangkan untuk kasus dua sampel, yang dibandingkan yaitu fungsi distribusi empiris dari kedua sampel (Gibbon [9]).

Menurut Conover [5], uji Kolmogorov-Smirnov digunakan untuk mengetahui apakah dua sampel berasal dari populasi yang sama. Misalkan $X_1, X_2, ..., X_n$ dan $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ merupakan dua sampel random dari populasi $F_X(x)$ dan $F_Y(x)$ yang belum diketahui fungsi distribusinya. Jika diinginkan menguji apakah dua sampel berasal dari populasi yang sama atau identik maka dapat dituliskan hipotesis dua sisi dari uji Kolmogorov-Smirnov yaitu

$$H_0 : F_X(x) = F_Y(x), \text{untuk semua } x, \tag{2.26}$$

$$H_1 : F_X(x) \neq F_Y(x), \text{untuk paling tidak satu } x, \tag{2.27}$$

dimana $F_X(x)$ dan $F_Y(x)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif dari kedua populasi. Jika pernyataan hipotesis nol tidak benar maka H_0 ditolak, berarti bahwa dua sampel berasal dari populasi yang berbeda.

Misalkan $X_1, X_2, ..., X_n$ dan $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ merupakan dua sampel random dari populasi $F_X(x)$ dan $F_Y(x)$ yang belum diketahui fungsi distribusinya. Menurut Dudewich dan Mishra [8], Teorema Glivenko-Canteli menyatakan bahwa fungsi tangga $F_n(x)$, yang dibentuk dari statistik terurut $X_{(1)}, X_{(2)}, , X_{(n)}$ dari suatu sampel random, mendekati fungsi distribusi sebenarnya $F(x)$ untuk semua x. Oleh karena itu, untuk n besar, selisih antara fungsi distribusi sebenarnya dengan fungsi distribusi empiris yang dinotasikan $|F_n(x) - F(x)|$ seharusnya kecil untuk semua x.

Demikian juga untuk dua sampel random dengan fungsi distribusi empiris $F_n(x)$ dan $F_m(x)$, agar kondisi dari Teorema Glivenko-Canteli dapat dipenuhi, maka selisih dari dua fungsi distribusi empiris $|F_n(x) - F_m(x)|$, harus kecil untuk semua x. Fungsi distribusi empiris dari kedua sampel random $F_n(x)$ dan $F_m(x)$ menurut Definisi (2.2.16) masing-masing dapat ditentukan dengan

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } x < X_{(1)} \\ \frac{i}{n} & \text{untuk } X_{(i)} < x < X_{(i+1)} \text{ dengan } i = 1, 2, ..., n-1 \\ 1 & \text{untuk } x \geq X_{(n)} \end{cases} \tag{2.28}$$

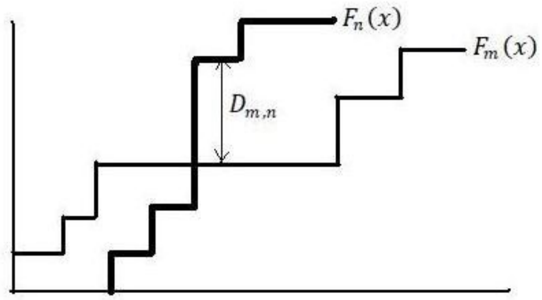
dan

$$F_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } x < Y_{(1)} \\ \frac{j}{m} & \text{untuk } Y_{(j)} < x < Y_{(j+1)} \text{ dengan } j = 1, 2, ..., m-1 \\ 1 & \text{untuk } x \geq Y_{(m)}. \end{cases} \tag{2.29}$$

Oleh karena itu, agar $|F_n(x) - F_m(x)|$ kecil dan memenuhi untuk semua x, maka supremum dari $|F_n(x)-F_m(x)|$ harus kecil. Oleh Kolmogorov dan Smirnov, supremum ini digambarkan sebagai jarak vertikal terjauh antara kedua sampel yang merupakan statistik uji dari pengujian hipotesis ini. Menurut Conover [5], jarak tersebut dinotasikan $D_{(m,n)}$, sehingga statistik ujinya dapat ditentukan dengan

$$D_{m,n} = \sup_x |F_n(x) - F_m(x)|. \tag{2.30}$$

Untuk mempermudah memahami nilai $D_{m,n}$ maka jarak vertikal terjauh tersebut disajikan pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5. Supremum selisih fungsi distribusi empiris

Dengan mensubstitusi persamaan (2.28) dan (2.29) ke persamaan (2.30) diperoleh

$$D_{m,n} = \sup_x |\frac{i}{n} - \frac{j}{m}|. \tag{2.31}$$

Kaidah pengambilan keputusan uji Kolmogorov-Smirnov melibatkan distribusi asimtotik dari statistik uji Kolmogorov-Smirnov [2]. Menurut Dudewich dan Mishra [8], untuk m dan n mendekati tak hingga sedemikian sehingga $\frac{m}{n}$ konstan, distribusi asimtotik dari uji Kolmogorov-Smirnov untuk dua sisi yaitu

$$L(z) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\exp(-2k^2z^2) \tag{2.32}$$

dengan $L(z)$ adalah distribusi asimtotik dari uji Kolmogorov-Smirnov, m adalah ukuran sampel Y, n adalah ukuran sampel X.

Pengambilan keputusan dari uji Kolmogorov-Smirnov dilakukan dengan membandingkan statistik uji $D_{m,n}$ dengan kuantil $1-\alpha$ uji Kolmogorov-Smirnov.

Kuantil tersebut merupakan pendekatan yang didasarkan pada distribusi asimtotik $L(z)$ (Conover [5]). Jika pada taraf α nilai $D_{m,n}$ lebih besar dari kuantil $1-\alpha$ maka H_0 ditolak. Nilai kuantil uji Kolmogorov-Smirnov terdapat pada Lampiran 1 Tabel 5.2.

2.2.17 Uji Wilcoxon

Uji Wilcoxon pertama kali diperkenalkan oleh Frank Wilcoxon pada tahun 1945. Uji tersebut dibagi menjadi dua jenis yaitu uji untuk dua sampel bebas dan uji untuk dua sampel berpasangan. Dalam penelitian ini hanya dibahas uji Wilcoxon untuk dua sampel bebas saja. Uji yang sebenarnya sama dengan uji Wilcoxon untuk dua sampel bebas juga diperkenalkan oleh H.B Mann dan D.R Whitney pada tahun 1947.

Menurut Conover [5], uji Wilcoxon digunakan untuk mengetahui apakah dua sampel berasal dari populasi yang sama. Misalkan $X_1, X_2, ..., X_n$ dan $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ masing-masing merupakan dua sampel random dari populasi $F_X(x)$ dan $F_Y(x)$ yang belum diketahui fungsi distribusinya. Jika diinginkan menguji apakah dua sampel berasal dari populasi yang sama atau identik. Hipotesis dua sisi untuk uji Wilcoxon sama dengan hipotesis dua sisi pada uji Cramer-von Mises dan Kolmogorov-Smirnov yaitu

$$H_0 : F_X(x) = F_Y(x), \text{untuk semua } x, \tag{2.33}$$

$$H_1 : F_X(x) \neq F_Y(x), \text{untuk paling tidak satu } x, \tag{2.34}$$

dimana $F_X(x)$ dan $F_Y(x)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif dari kedua populasi. Jika pernyataan hipotesis nol tidak benar maka H_0 ditolak, berarti bahwa dua sampel berasal dari populasi yang berbeda.

Misalkan ukuran sampel X adalah n dan ukuran sampel Y adalah m, kemudian kedua sampel digabungkan dan diberi peringkat dari 1 sampai $N = n+m$ dengan urutan meningkat. Peringkat pada observasi sampel gabungan dinotasikan dengan variabel random indikator. Misalkan diketahui $S_i = S_1, S_2, ..., S_N$ dimana $S_i = 1$ jika variabel random ke-i pada sampel gabungan adalah X dan $S_i = 0$

jika variabel random ke-i pada sampel gabungan adalah Y, untuk $i = 1, 2, ..., N$ dan $N = n + m$. Oleh karena uji Wilcoxon didasarkan pada peringkat sampel gabungan, maka statistik uji Wilcoxon dapat ditentukan dengan

$$W_X = \sum_{i=1}^{N} iS_i \tag{2.35}$$

dengan S_i adalah variabel random indikator [27].

Berikut ini mean dan variansi dari W_X dengan asumsi H_0 berdistribusi sama dan tidak ada *ties*. Jika

$$f_{s_i}(S_i) = \begin{cases} \frac{n}{N} & \text{jika } S_i = 1 \\ \frac{m}{N} & \text{jika } S_i = 0 \text{ dengan } i = 1, 2, ..., N \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

berdistribusi bernoulli maka mean dari S_i adalah $E(S_i) = 1(\frac{n}{N}) + 0(\frac{m}{N}) = \frac{n}{N}$ dan karena $E({S_i}^2) = 1^2(\frac{n}{N}) + 0^2(\frac{m}{N}) = \frac{n}{N}$ sehingga variansi S_i adalah

$$Var(S_i) = \frac{nm}{N^2}$$

Oleh karena itu, mean dari W_X adalah

$$E(W_X) = \frac{n(N+1)}{2}. \tag{2.36}$$

Berdasarkan moment bersama

$$E(S_iS_j) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$$

dan menggunakan rumus $cov(S_i, S_j) = E(S_iS_j) - E(S_i)E(S_j)$ diperoleh

$$cov(S_i, S_j) = \frac{-nm}{N^2(N-1)}.$$

Menggunakan persamaan (2.4), dapat ditentukan variansi dari W_X yaitu

$$var(W_X) = \frac{nm(N+1)}{12}. \tag{2.37}$$

Menurut Praptono [19], jika X_i dan Y_i independen dengan asumsi H_0 berdistribusi sama, maka setiap penyusunan sampel X dan Y dalam sampel gabungan mempunyai probabilitas sama (*equally likely*). Jika ukuran sampel dari X_i adalah n dan Y_j adalah m maka besarnya sampel gabungan adalah $n + m$. Peringkat untuk X_i pada sampel gabungan merupakan pilihan acak n bilangan bulat dari 1 sampai $n+m$. Karena setiap peringkat mempunyai probabilitas yang sama untuk dipilih sebagai peringkat X_i dan harus dipilih n buah berbeda sebagai peringkat untuk semua anggota X_i maka distribusi W_X dapat dicari dengan fungsi probabilitas dari n bilangan bulat yang diambil secara acak tanpa pengembalian dari bilangan bulat $1, 2, ..., n+m$. Dimana banyak cara memilih n bilangan bulat yang tersedia adalah C_n^{n+m} dan setiap cara mempunyai probabilitas yang sama. Oleh karena itu, terdapat $P(W_X = c)$ sama dengan banyaknya himpunan n bilangan bulat yang berjumlah c dibagi dengan C_n^{n+m}.

Menurut Bhatacharya [12], untuk menentukan daerah kritis pada uji Wilcoxon maka harus ditentukan terlebih dahulu fungsi distribusi dari W. Probabilitas dari semua kemungkinan statistik uji W_X yang kurang dari sama dengan nilai c yang dinotasikan dengan

$$P(W \leq W_X) = \frac{c^*}{C_n^{n+m}}$$

dengan c^* adalah banyaknya himpunan bulat yang berbeda dari 1 sampai $n + m$ yang mempunyai statistik uji lebih kecil sama dengan W_X. Selanjutnya $P(W \leq W_X)$ dinyatakan sebagai fungsi distribusi dari W_X untuk ukuran sampel n dan m. Daerah kritis ditentukan berdasar fungsi distribusi dari W. Kuantil ke-$(1-\alpha)$ dari distribusi W dinotasikan $W_{1-\alpha}$ dengan $P(W_X \leq W_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ maka H_0 ditolak pada tingkat signifikansi α untuk uji dua sisi jika W_X lebih kecil atau sama dengan kuantil ke-$\alpha/2$ atau dinotasikan dengan $(W_X \leq W_{(\alpha/2)})$ atau jika W_X lebih besar atau sama dengan kuantil ke-$1 - (\alpha/2)$ yang dinotasikan dengan $(W_X \geq W_{1-(\alpha/2)})$.

Ketika ukuran sampel n dan m besar, distribusi asimtotik dapat digunakan untuk menentukan pengambilan keputusan pada uji Wilcoxon. Oleh karena W_X adalah jumlah dari variabel random yang berdistribusi identik, maka Teorema Limit Pusat digunakan untuk menyatakan bahwa W_X yang distandardisasi akan mendekati normal standar jika $m, n \to \infty$. Berdasar persamaan 2.36 dan 2.37

diperoleh mean dan variansi dari W_X masing-masing yaitu

$$E(W_X) = \frac{n(N+1)}{2}$$

dan

$$Var(W_X) = \frac{nm(N+1)}{12}.$$

Berdasar Teorema Limit Pusat, maka

$$z = \frac{W_X - E(W_X)}{\sqrt{Var(W_X)}} = \frac{W_X - \frac{n(N+1)}{2}}{\sqrt{\frac{nm(N+1)}{12}}}$$

mendekati normal dengan mean 0 dan variansi 1. Dari uraian tersebut maka diperoleh fungsi distribusi asimtotik Z yaitu

$$P(Z \leq z) = \Phi(z)$$

dengan $\Phi(z)$ adalah fungsi distribusi normal standar. Pendekatan distribusi normal dapat dilakukan jika n dan m masing-masing berukuran lebih besar dari 20 (Conover [5]). Selanjutnya daerah kritis ditentukan dengan fungsi distribusi z. Kuantil ke-$(1-\alpha)$ dari distribusi Z dinotasikan dengan $P(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ atau $\Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ maka H_0 ditolak pada tingkat signifikansi α untuk uji dua sisi jika z lebih kecil atau sama dengan kuantil ke-$1 - \alpha/2$ yang dinotasikan dengan $(Z \leq -z_{(1-\alpha/2)})$ atau jika Z lebih besar atau sama dengan kuantil ke-$1 - (\alpha/2)$ yang dinotasikan dengan $(Z \geq z_{1-(\alpha/2)})$. Nilai kuantil uji Wilcoxon tersebut terdapat pada Lampiran 1 Tabel 5.3.

2.2.18 Simulasi

Uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov dan Wilcoxon merupakan uji-uji nonparametrik untuk dua sampel bebas. Statistik uji Cramer-von Mises dibentuk oleh kuadrat dari selisih fungsi distribusi empiris kedua sampel yang diboboti oleh variansinya. Statistik uji Kolmogorov-Smirnov dibentuk oleh nilai mutlak terbesar dari selisih kedua distribusi empiris, tanpa melalui pembobotan. Statistik uji Wilcoxon dibentuk melalui peringkat gabungan dari kedua sampel.

Ketiga uji tersebut mempunyai statistik uji yang berbeda, sehingga secara analisis tidak dapat dibandingkan. Oleh karena itu, akan digunakan metode simulasi untuk membandingkan ketiga uji tersebut berdasarkan persentase penolakan H_0 ketika H_0 salah.

Metode simulasi merupakan salah satu cara yang sekarang ini sedang berkembang. Kemampuannya menjangkau hal-hal yang lebih luas akan menjadi lebih jelas karena hanya membutuhkan asumsi yang lebih sedikit sehingga dapat digunakan untuk masalah yang lebih kompleks/rumit dibandingkan metode analitik. Menurut Banks dalam Domonkos [7], simulasi adalah tiruan dari proses dunia nyata atau sistem. Simulasi menyangkut pembangkitan proses serta pengamatan dari proses untuk menarik kesimpulan dari sistem yang diwakili.

Dalam penelitian ini, simulasi yang akan dilakukan yaitu membangkitkan dua bilangan random. Selanjutnya diuji dengan uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov dan Wilcoxon sehingga akan diketahui apakah diterima atau ditolak dari masing-masing uji. Suatu pendekatan akan mendekati nilai sebenarnya jika pengulangan dalam simulasi cukup besar [28]. Secara umum, jumlah pengulangan minimum yang dilakukan yaitu sebanyak 10.000 kali dan dalam beberapa kasus 5.000 kali [18]. Oleh karena itu, agar simulasi dalam penelitian ini dapat menggambarkan suatu sistem maka pengulangan dilakukan sebanyak 10.000 kali. Probabilitas penolakan H_0 ketika H_0 salah dari setiap uji statistik diestimasi dari 10.000 sampel random yang disimulasi [23]. Uji statistik yang mempunyai probabilitas penolakan H_0 terbesar merupakan uji yang paling kuat.

2.3 Kerangka Pemikiran

Berikut ini suatu kerangka pemikiran yang memungkinkan untuk mencapai tujuan penelitian. Uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, dan Wilcoxon merupakan uji-uji nonparametrik yang digunakan untuk mengetahui apakah dua sampel bebas berasal dari populasi yang sama.

Untuk mencapai tujuan penelitian ini, uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, dan Wilcoxon akan dikaji dan dibandingkan. Oleh karena itu, teori-teori yang mendukung prinsip-prinsip dasar dari ketiga uji tersebut akan dikumpulkan. Selanjutnya, akan dibuat suatu program dengan *sofware* yang mampu melakukan ketiga uji. Program inilah yang merupakan konstruksi simulasi yang diharapkan dapat menunjukkan perbedaan ketiga uji tersebut dalam menolak H_0 ketika H_0 salah sehingga diperoleh uji terkuat diantara ketiganya.

Bab III

METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini, metode yang digunakan adalah studi literatur. Selanjutnya dilakukan simulasi data untuk membandingkan uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, dan Wilcoxon.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini diuraikan sebagai berikut.

1. Melakukan identifikasi dari uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, dan Wilcoxon.

2. Membuat suatu program dengan *software* yang merupakan konstruksi dari simulasi.

   Langkah-langkah yang dilakukan dalam simulasi adalah

   (a) Membangkitkan 2 himpunan bilangan random. Himpunan bilangan random yang dibangkitkan yaitu

      i. himpunan bilangan berdistribusi berbeda dengan mean dan variansi berbeda yaitu sampel pertama berdistribusi beta ($BETA(\alpha, \beta)$) dan sampel kedua berdistribusi normal ($N(\mu, \sigma)$),

      ii. himpunan bilangan berdistribusi sama dengan mean berbeda tetapi variansinya sama yaitu normal standar ($N(0, 1)$) untuk sampel pertama dan himpunan bilangan random berdistribusi normal dengan mean berubah-ubah dan variansi 1 ($N(a, 1)$) untuk sampel kedua,

      iii. himpunan bilangan berdistribusi sama dengan mean sama tetapi variansi berbeda yaitu normal standar ($N(0, 1)$) untuk sampel pertama dan himpunan bilangan random berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi berubah-ubah ($N(0, a)$) untuk sampel kedua,

iv. himpunan bilangan berdistribusi sama dengan mean dan variansi yang sama pula yaitu eksponensial dengan mean dan variansi tetap ($Exp(1)$) untuk sampel pertama dan bilangan random berdistribusi eksponensial dengan mean dan variansi berubah-ubah ($Exp(a)$),

v. himpunan bilangan berdistribusi beda tetapi mean dan variansinya sama yaitu uniform ($UNIF(-1/2, 1/2)$) untuk sampel pertama dan berdistribusi normal ($N(0, 1/12)$) untuk sampel kedua.

(b) Menentukan hipotesis nul (H_0) dan hipotesis alternatif (H_1).

(c) Menerapkan ketiga uji tersebut pada sampel random yang telah dibangkitkan untuk mengkonstruksi simulasi. Pada langkah ini akan diketahui apakah sampel random yang dibangkitkan tersebut menolak H_0 atau menerima H_0 dengan uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, dan Wilcoxon.

(d) Mengulangi langkah (a), (b) dan (c) sebanyak 10.000 kali.

(e) Menghitung jumlah penolakan H_0 dari masing-masing uji dan menentukan probabilitasnya. Probabilitas penolakan H_0 dari masing-masing uji dapat ditentukan dengan

$$\text{Probabilitas penolakan } H_0 = \frac{\text{jumlah penolakan } H_0}{10.000} \times 100\% \quad (3.1)$$

(f) Membuat grafik penolakan H_0 dari ketiga uji untuk membandingkan uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, dan Wilcoxon. Uji yang memiliki probabilitas penolakan tertinggi merupakan uji yang paling kuat.

Bab IV

PEMBAHASAN

Uji-uji nonparametrik untuk dua sampel bebas yaitu uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, dan Wilcoxon. Ketiga uji tersebut dapat digunakan untuk menguji apakah dua sampel bebas berasal dari populasi yang sama dengan asumsi populasinya memiliki fungsi distribusi kontinu. Hipotesis dua sisi dari ketiga uji yaitu $H_0 : F_X(x) = F_Y(x)$, untuk semua nilai x dan $H_1 : F_X(x) \neq F_Y(x)$, untuk paling tidak satu x, dengan $F_X(x)$ dan $F_Y(x)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif dari kedua populasi [5].

Dalam menguji hipotesis tersebut, ketiga uji memiliki perbedaan dalam perhitungan statistik uji. Statistik uji Cramer-von Mises dibentuk oleh kuadrat dari selisih fungsi distribusi empiris kedua sampel diboboti oleh variansinya yang dapat dinyatakan

$$T = \frac{mn}{(m+n)^2}(\sum_{i=1}^{n}[F_n(x_{(i)}) - F_m(x_{(i)})]^2 + \sum_{j=1}^{m}[F_n(y_{(j)}) - F_m(y_{(j)})]^2)$$

dengan n adalah ukuran sampel X dan m adalah ukuran sampel Y [5]. Menurut Conover [5], statistik uji Kolmogorov-Smirnov dibentuk oleh nilai mutlak terbesar dari selisih kedua distribusi empiris $[F_n(x) - F_m(x)]$ tanpa melalui pembobotan dan dinyatakan dengan

$$D_{m,n} = \sup_x |F_n(x) - F_m(x)|.$$

Statistik uji Wilcoxon dibentuk melalui peringkat gabungan dari kedua sampel dan dinyatakan dengan

$$W_X = \sum_{i=1}^{N} iS_i$$

dengan S_i adalah variabel random indikator yang bernilai 1 jika sampel gabungan berasal dari X dan bernilai 0 jika sampel gabungan berasal dari Y [27]. Karena perbedaan tersebut, maka dimungkinkan adanya kesimpulan yang berbeda dari ketiga uji.

Berikut ini diberikan contoh yang diambil dari Lehmann dan D'Abrera [15]. Data merupakan percobaan perbandingan pengaruh vitamin C yang terdapat dalam jus jeruk dan asam ascorbat dalam pertumbuhan *odontoblasts*. Percobaan dilakukan terhadap 20 babi yang dibagi secara random menjadi 2 kelompok, masing-masing kelompok terdiri dari 10 babi. Satu kelompok diberi vitamin C yang terdapat dalam jus jeruk dan kelompok yang lain diberi vitamin C yang terdapat dalam asam ascorbat. Data panjang *odontoblasts* setelah 6 minggu terdapat pada Tabel 4.1. Dari kasus tersebut akan diuji apakah pengaruh dari vitamin

Tabel 4.1. Panjang *odontoblasts* setelah 6 minggu (dalam milimeter)

Jus jeruk	8,2	9,4	9,6	9,7	10,0	14,5	15,2	16,1	17,6	21,5
Asam ascorbat	4,2	5,2	5,8	6,4	7,0	7,3	10,1	11,2	11,3	11,5

C dalam jus jeruk dengan vitamin C dalam asam ascorbat dalam pertumbuhan *odontoblasts* sama, tingkat signifikansi yang digunakan yaitu $\alpha = 0,05$. Untuk menyelesaikan kasus tersebut, ditentukan hipotesis dari uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov dan Wilcoxon yaitu

H_0 : pengaruh vitamin C dalam jus jeruk dengan vitamin C dalam asam ascorbat dalam pertumbuhan *odontoblasts* sama,

H_1 : pengaruh vitamin C dalam jus jeruk dengan vitamin C dalam asam ascorbat dalam pertumbuhan *odontoblasts* berbeda.

Misalkan jus jeruk sebagai sampel pertama dan asam ascorbat sebagai sampel kedua. Peringkat dari masing-masing sampel adalah G_i dengan $i = 1, 2, ..., 20$ dan H_j dengan $j = 1, 2, ..., 20$, sedangkan $F_n(x)$ dan $F_m(x)$ merupakan distribusi empiris dari masing-masing sampel maka diperoleh hasil pada Tabel 4.2.

Berdasarkan Tabel 4.2 diperoleh statistik uji Cramer-von Mises yaitu $T = 0,5750$, statistik uji Kolmogorov-Smirnov yaitu $D_{m,n} = 0,6$ dan statistik uji Wilcoxon yaitu $W_X = 75$. Daerah kritis untuk uji Cramer-von Mises adalah

Tabel 4.2. Perhitungan fungsi distribusi empiris

G_i	H_j	$F_n(x)$	$F_m(x)$	$\|F_n(x) - F_m(x)\|$
1	0	1/10	0	1/10
2	0	2/10	0	2/10
3	0	3/10	0	3/10
4	0	4/10	0	4/10
5	0	5/10	0	5/10
6	0	6/10	0	6/10
0	7	6/10	1/10	5/10
0	8	6/10	2/10	4/10
0	9	6/10	3/10	3/10
0	10	6/10	4/10	2/10
0	11	6/10	5/10	1/10
12	0	7/10	5/10	2/10
13	0	8/10	5/10	3/10
14	0	9/10	5/10	4/10
15	0	10/10	5/10	5/10
0	16	10/10	6/10	4/10
0	17	10/10	7/10	3/10
0	18	10/10	8/10	2/10
0	19	10/10	9/10	1/10
0	20	10/10	10/10	0

H_0 ditolak pada tingkat signifikansi $\alpha = 0,05$ jika $T > 0,46136$. Daerah kritis untuk uji Kolmogorov-Smirnov adalah H_0 ditolak jika $D_{m,n} > 0,6$. Sedangkan daerah kritis untuk uji Wilcoxon adalah H_0 ditolak jika $W_X \leq 79$ atau $W_X \geq 131$. Karena statistik uji $T = 0,5750$ lebih besar dari $0,46136$ maka dapat disimpulkan dengan uji Cramer-von Mises H_0 ditolak. Nilai $D_{m,n} = 0,6$ tidak lebih dari $0,6$ sehingga dengan uji Kolmogorov-Smirnov disimpulkan H_0 diterima dan dengan uji Wilcoxon $W_X = 75$ kurang dari 79 maka H_0 ditolak.

Contoh tersebut memberikan penjelasan bahwa adanya perbedaan perhitungan menyebabkan perbedaan kesimpulan dari hasil analisis ketiga uji. Oleh karena itu, perlu dilakukan simulasi untuk membandingkan ketiga uji tersebut berdasarkan persentase penolakan H_0 ketika H_0 salah sehingga diperoleh uji terkuat di antara uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, dan Wilcoxon.

Dalam mengkonstruksi simulasi, diperlukan langkah-langkah untuk melakukan ketiga uji tersebut. Berikut ini langkah-langkah dari masing masing uji untuk dua sampel bebas.

1. Langkah-langkah uji Cramer-von Mises.

   (a) menentukan H_0 dan H_1 sesuai dengan persamaan (2.15) dan (2.16),

   (b) memberi peringkat pada sampel X dan Y. Pemberian peringkat dilakukan dengan menggabungkan kedua sampel menjadi satu dan mengurutkan dari sampel terkecil sampai terbesar atau dibuat statistik terurut dari sampel X dan Y. Peringkat untuk statistik terurut ke-$i(G_{(i)})$ dari sampel X, untuk $i = 1, 2, ..., n$ diberikan pada persamaan (2.11). Peringkat untuk statistik terurut ke-$j(H_{(j)})$ dari sampel Y, untuk $j = 1, 2, ..., m$ diberikan pada persamaan (2.12). Peringkat dari sampel gabungan X dan Y bernilai $1, 2, ..., (n + m)$,

   (c) menghitung statistik uji Cramer-von Mises, dimana untuk $n \neq m$ menggunakan persamaan (2.24) sedangkan untuk $n = m$ menggunakan persamaan (2.25),

   (d) menentukan tingkat signifikansi (α),

(e) menentukan daerah kritis, yaitu H_0 ditolak pada tingkat signifikansi α jika $T > w_{1-\alpha}$,

(f) membuat kesimpulan berdasarkan nilai statistik uji dan daerah kritis.

2. Langkah-langkah uji Kolmogorov-Smirnov.

   (a) menentukan H_0 dan H_1 sesuai dengan persamaan (2.26) dan (2.27),

   (b) memberi peringkat pada sampel X dan Y. Pemberian peringkat dilakukan dengan menggabungkan kedua sampel menjadi satu dan mengurutkan dari sampel terkecil sampai terbesar atau dibuat statistik terurut dari sampel X dan Y. Peringkat untuk statistik terurut ke-$i(G_{(i)})$ dari sampel X, untuk $i = 1, 2, ..., n$ diberikan pada persamaan (2.11). Peringkat untuk statistik terurut ke-$j(H_{(j)})$ dari sampel Y, untuk $j = 1, 2, ..., m$ diberikan pada persamaan (2.12). Peringkat dari sampel gabungan X dan Y bernilai $1, 2, ..., (n + m)$,

   (c) menghitung statistik uji Kolmogorov-Smirnov menggunakan persamaan (2.31),

   (d) menentukan tingkat signifikansi (α),

   (e) menentukan daerah kritis, yaitu H_0 ditolak pada tingkat signifikansi α jika $D_{m,n} >$ kuantil $1 - \alpha$,

   (f) membuat kesimpulan berdasarkan nilai statistik uji dan daerah kritis.

3. Langkah-langkah uji Wilcoxon.

   (a) menentukan H_0 dan H_1 sesuai dengan persamaan (2.33) dan (2.34),

   (b) memberi peringkat pada sampel X dan Y. Pemberian peringkat dilakukan dengan menggabungkan kedua sampel menjadi satu dan mengurutkan dari sampel terkecil sampai terbesar atau dibuat statistik terurut dari sampel X dan Y. Peringkat dari sampel gabungan X dan Y bernilai i dengan $i = 1, 2, ..., (n + m)$,

   (c) menghitung statistik uji Wilcoxon menggunakan persamaan (2.35),

(d) menentukan tingkat signifikansi (α),

(e) menentukan daerah kritis, yaitu H_0 ditolak pada tingkat signifikansi α jika $W_X \leq W_{(\alpha/2)}$ atau $W_X \geq W_{1-(\alpha/2)}$ untuk ukuran sampel n dan m masing-masing kurang dari atau sama dengan 20. Sedangkan untuk ukuran sampel lebih besar dari 20, maka H_0 ditolak jika $Z \leq -z_{(1-\alpha/2)}$ atau jika $Z \geq z_{1-(\alpha/2)}$.

(f) membuat kesimpulan berdasarkan nilai statistik uji dan daerah kritis.

Simulasi yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu membangkitkan data yang dianggap sebagai sampel random kemudian melakukan uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov dan Wilcoxon pada sampel tersebut. Simulasi ini dibagi menjadi 5 macam, yaitu

1. Simulasi ketiga uji pada sampel berdistribusi berbeda dengan mean dan variansi berbeda.

2. Simulasi ketiga uji pada sampel berdistribusi normal dengan mean berbeda dan variansi sama.

3. Simulasi ketiga uji pada sampel berdistribusi normal dengan mean sama dan variansi berbeda.

4. Simulasi ketiga uji pada sampel berdistribusi exponensial dengan mean dan variansi berbeda.

5. Simulasi ketiga uji pada sampel berdistribusi berbeda tetapi mean dan variansi sama.

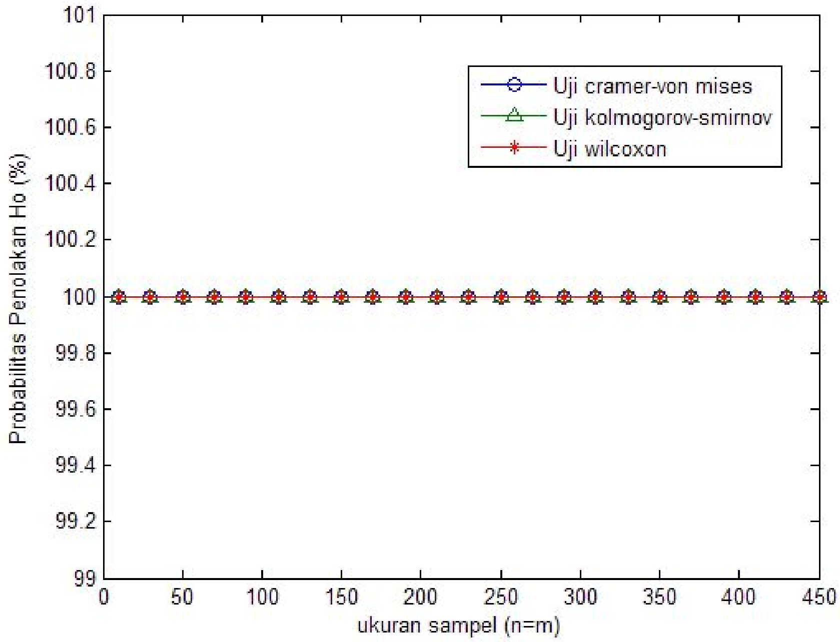
Untuk mengetahui perbandingan ketiga uji maka ditentukan jumlah pengulangan simulasi sebanyak 10.000. Setelah dilakukan simulasi sebanyak 10.000 selanjutnya dihitung jumlah penolakan H_0 dari masing-masing uji dan menentukan probabilitasnya. Probabilitas penolakan H_0 dari masing-masing uji dapat ditentukan dengan persamaan (3.1). Perbandingan dari ketiga uji dilihat berdasarkan grafik penolakan H_0. Simulasi ini dilakukan dengan menjalankan program dengan *sofware* yang telah dibuat. Hasil dari simulasi tersebut yaitu Gambar 4.1, Gambar 4.2, Gambar 4.3, Gambar 4.4, dan Gambar 4.5.

4.1 Simulasi pada Sampel Berdistribusi Berbeda dengan Mean dan Variansi Berbeda

Pada simulasi pertama, dibangkitkan sampel pertama berdistribusi beta ($BETA(\alpha, \beta)$) dengan ukuran n dan sampel kedua berdistribusi normal ($N(\mu, \sigma)$) dengan ukuran m. Kedua distribusi tersebut dipilih untuk melakukan simulasi pada sampel berdistribusi berbeda dengan mean dan variansi yang berbeda. Sampel pertama mempunyai parameter yaitu $\alpha = 6a$ dan $\beta = \sqrt{(1/12) + a}$ dengan mean $\frac{6a}{6a+\sqrt{(1/12)+a}}$ dan variasi $\frac{6a\sqrt{(1/12)+a}}{(6a+\sqrt{(1/12)+a})^2(6a+\sqrt{(1/12)+a}+1)}$. Dan sampel kedua berdistribusi normal ($N(\mu = 6a, \sigma^2 = (1/12) + a)$) dengan mean $6a$ dan variasi $(1/12) + a$ dengan $a = 1, 2, ..., 23$.

Simulasi dilakukan dengan a dan ukuran sampel $n = m$ diubah-ubah. Berdasarkan simulasi yang dilakukan sebanyak 10.000 untuk masing-masing ukuran sampel ($n = m$), diperoleh hasil pada Tabel 4.3. Probabilitas penolakan H_0 pada Tabel 4.3 selanjutnya disajikan pada Gambar 4.1.

Gambar 4.1 menunjukkan bahwa uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, dan Wilcoxon memiliki persentase probabilitas penolakan H_0 yang sama yaitu sebesar 100 %. Hal ini berarti bahwa ketika kedua sampel berasal dari dua populasi yang berbeda distribusi dengan mean dan variansinya berbeda pula, maka ketiga uji sama kuat sehingga dapat menghasilkan kesimpulan yang sama. Selain itu, simulasi ini menunjukkan kesahihan uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, dan Wilcoxon dalam menguji hipotesis apakah dua sampel bebas berasal dari populasi yang sama.



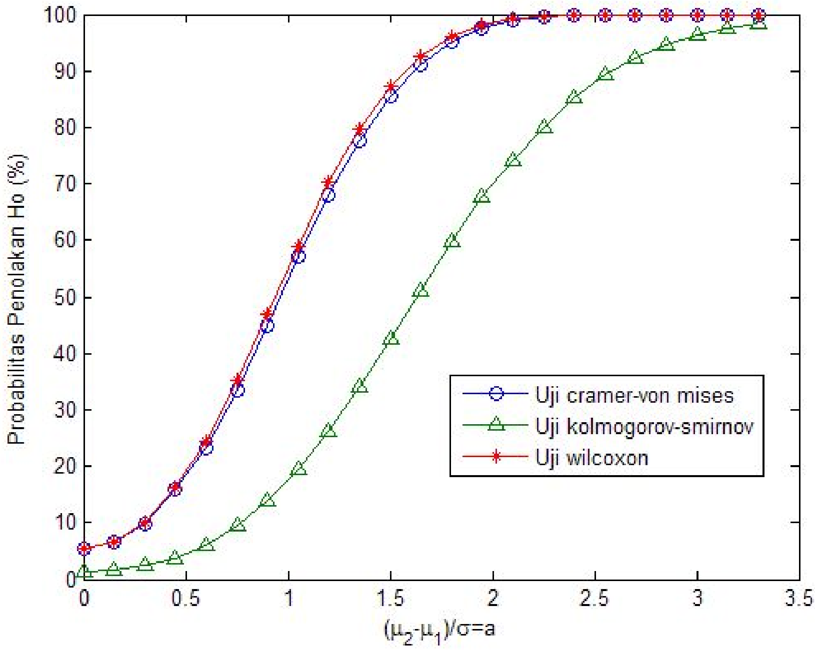
Gambar 4.1. Probabilitas penolakan H_0 hasil simulasi pada sampel berdistribusi berbeda dengan mean dan variansi berbeda

4.2 Simulasi pada Sampel Berdistribusi Normal dengan Mean Berbeda dan Variansi Sama

Pada simulasi kedua, dibangkitkan sampel pertama berdistribusi normal standar $(N(0,1))$ sedangkan sampel kedua berdistribusi normal dengan mean berubah-ubah dan variansi 1 dinotasikan $N(a,1)$, dengan ukuran sampel sama yaitu 10.

Berdasarkan simulasi yang dilakukan sebanyak 10.000 untuk masing-masing a diperoleh hasil pada Tabel 4.4. Probabilitas penolakan H_0 pada Tabel 4.4 selanjutnya dinyatakan dalam persen dan ditunjukkan sebagai fungsi dari $\frac{(\mu_2-\mu_1)}{\sigma} = a$ yang disajikan pada Gambar 4.2.

Pada titik pertama dalam Gambar 4.2 ketika dua sampel dibangkitkan dari populasi yang sama dengan mean dan variansi sama pula, uji Cramer-von Mises dan Wilcoxon mempunyai kekuatan yang sama untuk menolak H_0 ketika H_0 sa-



Gambar 4.2. Probabilitas penolakan H_0 hasil simulasi pada sampel berdistribusi normal dengan mean berbeda dan variansi sama

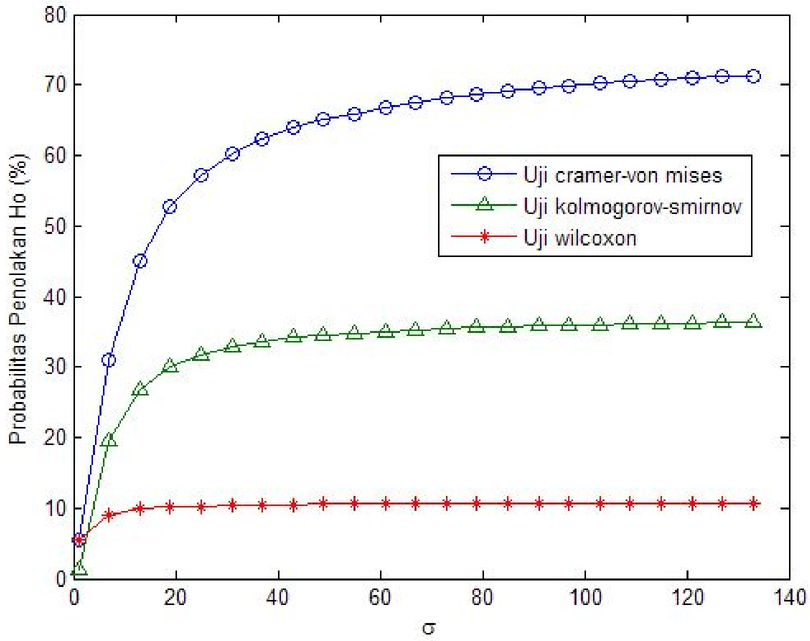
lah. Hasil ini sesuai dengan teori bahwa dua sampel yang berasal dari populasi dengan karakteristik sama akan menghasilkan penolakan yang amat kecil sesuai dengan tingkat signifikansinya. Ketika perbedaan mean antara sampel pertama dan sampel kedua semakin besar, probabilitas penolakan H_0 dari ketiga uji semakin besar. Uji Wilcoxon mempunyai probabilitas sedikit lebih besar daripada uji Cramer-von Mises. Uji Kolmogorov-Smirnov memiliki probabilitas yang paling kecil di antara ketiganya. Hal ini berarti bahwa ketika kedua sampel berasal dari dua populasi berdistribusi normal dengan mean berbeda tetapi variansinya sama, baik uji Wilcoxon maupun uji Cramer-von Mises merupakan uji yang sama kuat sehingga akan menghasilkan kesimpulan yang sama.

4.3 Simulasi pada Sampel Berdistribusi Normal dengan Mean Sama dan Variansi Berbeda

Dalam simulasi yang ketiga, dibangkitkan sampel pertama berdistribusi normal standar ($N(0,1)$) sedangkan sampel kedua berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi berubah-ubah dinotasikan $N(0,\sigma^2)$, dengan masing-masing berukuran 10.

Berdasarkan simulasi yang dilakukan sebanyak 10.000 untuk masing-masing standar deviasi (σ) diperoleh hasil pada Tabel 4.5. Probabilitas penolakan H_0 pada Tabel 4.5 selanjutnya dinyatakan dalam persen dan ditunjukkan sebagai fungsi dari σ yang disajikan pada Gambar 4.3.

Gambar 4.3 menunjukkan bahwa semakin besar perbedaan variansi antara sampel pertama dan sampel kedua, maka probabilitas penolakan H_0 dari ketiga uji semakin besar. Uji Wilcoxon memiliki probabilitas penolakan H_0 yang paling kecil dan jauh dibawah kedua uji yang lain. Hal ini menunjukkan bahwa uji Wilcoxon tidak mampu mendeteksi adanya perbedaan variansi dengan mean sama dari distribusi yang sama. Oleh karena itu, jika uji Wilcoxon digunakan pada kasus yang serupa dengan simulasi ini, maka dapat menghasilkan kesimpulan yang salah. Uji Kolmogorov-Smirnov memiliki probabilitas penolakan H_0 lebih besar daripada uji Wilcoxon. Dan uji Cramer-von Mises memiliki probabilitas penolak-



Gambar 4.3. Probabilitas penolakan H_0 hasil simulasi pada sampel berdistribusi normal dengan mean sama dan variansi berbeda

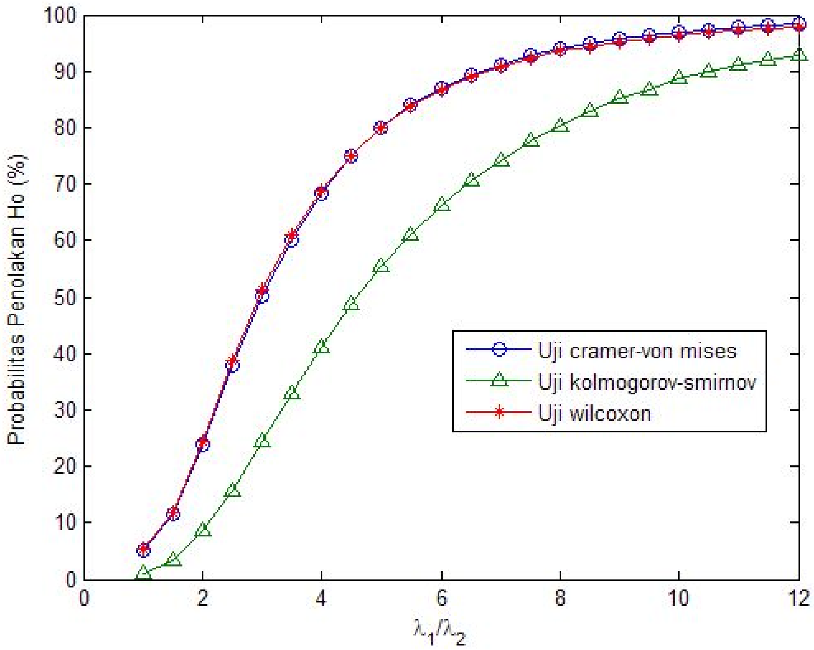
an H_0 yang lebih besar daripada uji Kolmogorov-Smirnov. Hal ini berarti bahwa untuk sampel berdistribusi normal dengan mean sama tetapi variansi berbeda, uji Cramer-von Mises merupakan uji yang terkuat diantara ketiga uji tersebut.

4.4 Simulasi pada Sampel Berdistribusi Eksponensial dengan Mean dan Variansi Berbeda

Pada simulasi yang keempat dibangkitkan sampel pertama berdistribusi eksponensial dengan parameter λ_1 dan sampel kedua berdistribusi eksponensial dengan parameter $\lambda_2 = 1$, dimana nilai λ_1 diubah-ubah dengan ukuran sampel sama yaitu 10.

Berdasarkan simulasi yang dilakukan sebanyak 10.000 untuk masing-masing λ_1 diperoleh hasil pada Tabel 4.6. Probabilitas penolakan H_0 pada Tabel 4.6 selanjutnya dinyatakan dalam persen dan ditunjukkan sebagai fungsi dari λ_1/λ_2

yang disajikan pada Gambar 4.4.



Gambar 4.4. Probabilitas penolakan H_0 hasil simulasi pada sampel berdistribusi eksponensial dengan mean dan variansi berbeda

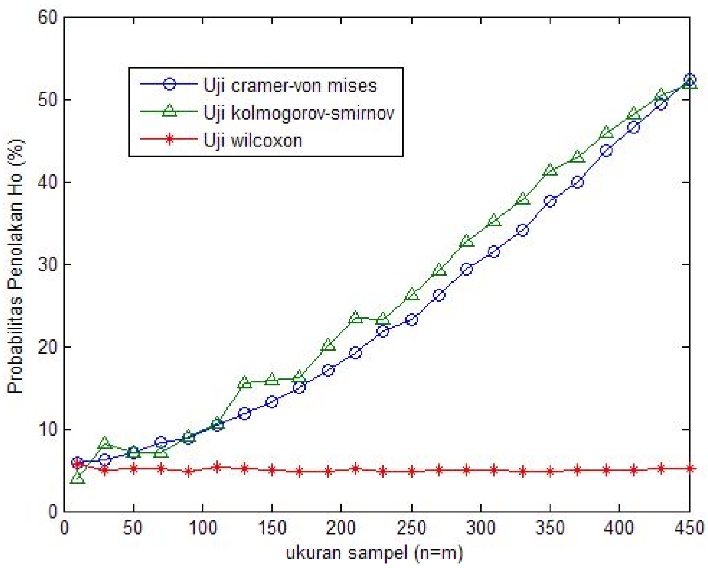
Gambar 4.4 menunjukkan bahwa semakin besar perbandingan λ antara sampel pertama dan kedua mengakibatkan probabilitas penolakan H_0 semakin tinggi. Uji Cramer-von Mises dan Wilcoxon memiliki probabilitas penolakan H_0 yang hampir sama dan lebih besar dibandingkan dengan uji Kolmogorov-Smirnov. Hal ini berarti bahwa ketika sampel berdistribusi exponensial dengan mean dan variansi berbeda maka baik uji Cramer-von Mises maupun uji Wilcoxon merupakan uji yang sama kuat sehingga akan menghasilkan kesimpulan yang sama.

4.5 Simulasi pada Sampel Berdistribusi Berbeda tetapi Mean dan Variansi Sama

Pada simulasi yang kelima dibangkitkan sampel pertama berdistribusi uniform $(UNIF(-1/2, 1/2))$ dengan ukuran n dan berdistribusi normal $(N(0, 1/12))$

dengan ukuran m. Kedua distribusi tersebut dipilih karena memiliki mean dan variansi yang sama yaitu 0 dan 1/12.

Simulasi yang keempat dilakukan dengan ukuran sampel $n = m$ diubah-ubah sehingga didapatkan hasil pada Tabel 4.7. Probabilitas penolakan H_0 pada Tabel 4.7 selanjutnya disajikan pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5. Probabilitas penolakan H_0 hasil simulasi pada sampel berdistribusi berbeda tetapi mean dan variansi sama

Pada Gambar 4.5 terlihat bahwa semakin besar ukuran sampel mengakibatkan probabilitas penolakan H_0 pada uji Cramer-von Mises dan Kolmogorov-Smirnov semakin tinggi dengan probabilitas penolakan H_0 yang saling berpotongan pada ukuran sampel tertentu, sedangkan probabilitas penolakan H_0 pada uji Wilcoxon sangat rendah dan berada dibawah uji Cramer-von Mises dan Kolmogorov-Smirnov. Hal ini berarti bahwa ketika dua sampel diambil dari dua populasi yang berbeda distribusi tetapi mean dan variansinya sama, uji Cramer-von Mises dan Kolmogorov-Smirnov merupakan uji yang sama kuat dan akan memberikan keputusan yang sama sedangkan uji Wilcoxon tidak dapat membedakan kedua populasi tersebut.

Tabel 4.3. Probabilitas penolakan H_0 hasil simulasi pada sampel berdistribusi berbeda dengan mean dan variansi berbeda

a	$n = m$	Cramer-von Mises	Kolmogorov-Smirnov	Wilcoxon
1	10	1,0000	1,0000	1,0000
2	30	1,0000	1,0000	1,0000
3	50	1,0000	1,0000	1,0000
4	70	1,0000	1,0000	1,0000
5	90	1,0000	1,0000	1,0000
6	110	1,0000	1,0000	1,0000
7	130	1,0000	1,0000	1,0000
8	150	1,0000	1,0000	1,0000
9	170	1,0000	1,0000	1,0000
10	190	1,0000	1,0000	1,0000
11	210	1,0000	1,0000	1,0000
12	230	1,0000	1,0000	1,0000
13	250	1,0000	1,0000	1,0000
14	270	1,0000	1,0000	1,0000
15	290	1,0000	1,0000	1,0000
16	310	1,0000	1,0000	1,0000
17	330	1,0000	1,0000	1,0000
18	350	1,0000	1,0000	1,0000
19	370	1,0000	1,0000	1,0000
20	390	1,0000	1,0000	1,0000
21	410	1,0000	1,0000	1,0000
22	430	1,0000	1,0000	1,0000
23	450	1,0000	1,0000	1,0000

Tabel 4.4. Probabilitas penolakan H_0 hasil simulasi pada sampel berdistribusi normal dengan mean berbeda dan variansi sama

a	Cramer-von Mises	Kolmogorov-Smirnov	Wilcoxon
0,00	0,0554	0,0126	0,0543
0,15	0,0647	0,0147	0,0657
0,30	0,0983	0,0236	0,1016
0,45	0,1583	0,0377	0,1620
0,60	0,2318	0,0606	0,2455
0,75	0,3360	0,0959	0,3512
0,90	0,4502	0,1389	0,4681
1,05	0,5712	0,1944	0,5894
1,20	0,6807	0,2627	0,7019
1,35	0,7774	0,3402	0,7976
1,50	0,8555	0,4243	0,8731
1,65	0,9118	0,5101	0,9254
1,80	0,9516	0,5965	0,9612
1,95	0,9653	0,6757	0,9816
2.10	0,9892	0,7415	0,9915
2.25	0,9945	0,8002	0,9962
2.40	0,9983	0,8515	0,9985
2.55	0,9992	0,8939	0,9995
2.70	0,9996	0,9229	0,9996
2.85	0,9998	0,9473	0,9998
3.00	0,9999	0,9643	0,9999
3.15	1,0000	0,9756	1,0000
3.30	1,0000	0,9839	1,0000

Tabel 4.5. Probabilitas penolakan H_0 hasil simulasi pada sampel berdistribusi normal dengan mean sama dan variansi berbeda

σ	Cramer-von Mises	Kolmogorov-Smirnov	Wilcoxon
1	0,0554	0,0126	0,0543
7	0,3103	0,1963	0,0909
13	0,4492	0,2682	0,0988
19	0,5282	0,2999	0,1013
25	0,5709	0,3169	0,1027
31	0,6018	0,3287	0,1039
37	0,6228	0,3366	0,1044
43	0,6397	0,3421	0,1052
49	0,6506	0,3453	0,1054
55	0,6594	0,3478	0,1057
61	0,6679	0,3506	0,1059
67	0,6741	0,3528	0,1061
73	0,6822	0,3546	0,1059
79	0,6863	0,3563	0,1056
85	0,6901	0,3575	0,1058
91	0,6952	0,3584	0,1057
97	0,6987	0,3592	0,1058
103	0,7018	0,3599	0,1057
109	0,7041	0,3607	0,1057
115	0,7069	0,3615	0,1057
121	0,7090	0,3622	0,1058
127	0,7113	0,3633	0,1058
133	0,7134	0,3637	0,1059

Tabel 4.6. Probabilitas penolakan H_0 hasil simulasi pada sampel berdistribusi eksponensial dengan mean dan variansi berbeda

λ_1/λ_2	Cramer-von Mises	Kolmogorov-Smirnov	Wilcoxon
1,0	0,0521	0,0115	0,0531
1,5	0,1154	0,0343	0,1181
2,0	0,2380	0,0874	0,2448
2,5	0,3778	0,1575	0,3884
3,0	0,5022	0,2440	0,5118
3,5	0,6007	0,3280	0,6090
4,0	0,6822	0,4102	0,6876
4,5	0,7492	0,4857	0,7502
5,0	0,7995	0,5539	0,8001
5,5	0,8393	0,6106	0,8383
6,0	0,8686	0,6628	0,8684
6,5	0,8926	0,7061	0,8904
7,0	0,9113	0,7409	0,9082
7,5	0,9281	0,7753	0,9227
8,0	0,9403	0,8037	0,9359
8,5	0,9494	0,8289	0,9435
9,0	0,9565	0,8510	0,9524
9,5	0,9634	0,8681	0,9580
10,0	0,9683	0,8870	0,9638
10,5	0,9726	0,8999	0,9679
11,0	0,9770	0,9108	0,9728
11,5	0,9798	0,9204	0,9758
12,0	0,9834	0,9293	0,9793

Tabel 4.7. Probabilitas penolakan H_0 hasil simulasi pada sampel berdistribusi berbeda tetapi mean dan variansi sama

$n = m$	Cramer-von Mises	Kolmogorov-Smirnov	Wilcoxon
10	0,0593	0,0400	0,0577
30	0,0623	0,0810	0,0499
50	0,0707	0,0710	0,0512
70	0,0828	0,0712	0,0518
90	0,0880	0,0895	0,0484
110	0,1044	0,1058	0,0527
130	0,1189	0,1561	0,0522
150	0,1322	0,1594	0,0502
170	0,1498	0,1617	0,0489
190	0,1702	0,2008	0,0488
210	0,1921	0,2342	0,0513
230	0,2176	0,2330	0,0488
250	0,2328	0,2624	0,0491
270	0,2624	0,2918	0,0497
290	0,2938	0,3271	0,0501
310	0,3143	0,3521	0,0495
330	0,3415	0,3788	0,0475
350	0,3758	0,4133	0,0477
370	0,3984	0,4287	0,0495
390	0,4370	0,4583	0,0498
410	0,4661	0,4818	0,0503
430	0,4945	0,5045	0,0513
450	0,5233	0,5191	0,0510

Bab V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Perbandingan uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, dan Wilcoxon untuk dua sampel bebas didasarkan pada kelima simulasi yang telah dilakukan sehingga diperoleh kesimpulan bahwa uji Cramer-von Mises merupakan uji yang terkuat dalam menolak H_0 ketika H_0 salah.

5.2 Saran

Beberapa uji nonparametrik yang dapat digunakan untuk menguji dua sampel bebas yaitu uji Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, dan Wilcoxon. Bagi pembaca yang tertarik dengan uji-uji nonparametrik, penulis memberikan saran yaitu

1. dalam skripsi ini hanya dibahas perbandingan antar uji nonparametrik, sehingga dapat dicoba untuk membandingkan antara uji nonparametrik dengan uji parametrik.

2. hasil simulasi menunjukkan bahwa uji Wilcoxon merupakan uji yang sangat lemah ketika tidak terdapat perbedaan mean diantara dua populasi, sehingga dapat dilakukan penelitian lebih lanjut mengenahi uji Wilcoxon.