BASIS RUANG VEKTOR EIGEN SUATU MATRIKS ATAS ALJABAR *MAX-PLUS*

oleh

PUNDRA ANDRIYANTO
M0109057

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana Sains Matematika

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SEBELAS MARET
SURAKARTA

2014

SKRIPSI

BASIS RUANG VEKTOR EIGEN SUATU MATRIKS ATAS ALJABAR *MAX-PLUS*

yang disiapkan dan disusun oleh

PUNDRA ANDRIYANTO

M0109057

dibimbing oleh

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. Siswanto, M.Si	Dra. Etik Zukhronah, M.Si
NIP. 19670813 199203 1 002	NIP. 19661213 199203 2 001

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji

pada hari Rabu, tanggal 8 Januari 2014

dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Anggota Tim Penguji	Tanda Tangan
1. Drs. Pangadi, M.Si NIP. 19571012 199103 1 001	1. ....
2. Putranto Hadi Utomo, S.Si., M.Si NIP. 19860907 201212 1 002	2. ....

Surakarta, 20 Januari 2014

Disahkan oleh

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dekan,	Ketua Jurusan Matematika,
Prof. Ir. Ari Handono Ramelan, M.Sc.(Hons)., Ph.D	Irwan Susanto, S.Si., DEA
NIP. 19610223 198601 1 001	NIP. 19710511 199512 1 001

MOTO

1. *Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (Q.S. Al Insyirah: 6).*
2. *Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya. Sesungguhnya pendengaran, penglihatan dan hati, semuanya itu akan diminta pertanggungan jawabnya (Q.S. Al-Israa':36).*
3. *Sesungguhnya setiap perbuatan bergantung pada niatnya. Sesungguhnya setiap orang (akan dibalas) berdasarkan apa yang dia niatkan. Barangsiapa hijrahnya karena (ingin mendapat keridhaan) Allah dan Rasul-Nya, maka hijrahnya kepada (keridhaan) Allah dan Rasul-Nya. Dan barangsiapa hijrahnya karena dunia yang dikehendakinya atau karena wanita yang ingin dinikahinya, maka hijrahnya kepada apa yang dia tuju (niatkan) (H.R.Bukhari-Muslim).*

PERSEMBAHAN

Tulisan ini kupersembahkan untuk
Ibu, Bapak, Saudaraku, serta untuk teman-temanku,
terimakasih atas bantuan yang telah diberikan.

ABSTRAK

Pundra Andriyanto, 2013. BASIS RUANG VEKTOR EIGEN SUATU MATRIKS ATAS ALJABAR *MAX-PLUS*. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret.

Aljabar *Max-Plus* merupakan suatu himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ yang dilengkapi dengan dua operasi $\oplus$ dan $\otimes$. Himpunan matriks berukuran $n \times n$ atas Aljabar *Max-Plus* dinotasikan sebagai $\overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji ulang nilai eigen dan vektor eigen serta basis ruang vektor eigen dalam Aljabar *Max-Plus*. Misalkan $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$, matriks A disebut tak terreduksi jika A *strongly connected*. Jika matriks A tak terreduksi maka A mempunyai nilai eigen tunggal, tetapi jika matriks A terreduksi maka A mempunyai nilai eigen sebanyak $k\ (1 \leq k \leq n)$. Untuk menentukan nilai eigen matriks terreduksi, matriks itu perlu diubah ke dalam bentuk *Frobenius Normal Form (FNF)* sehingga elemen-elemen pada diagonal utamanya merupakan submatriks persegi yang tak terreduksi. Selanjutnya menentukan vektor eigen dan himpunan peta matriks A untuk nilai eigen yang bersesuaian.

Kata kunci: *tak terreduksi, nilai eigen, vektor eigen, Frobenius Normal Form (FNF), himpunan peta.*

ABSTRACT

Pundra Andriyanto, 2013. BASES OF EIGENVECTOR SPACE FOR MATRICES OVER MAX-PLUS ALGEBRA. Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Sebelas Maret University.

Max-Plus Algebra is a set $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ equipped with two operation $\oplus$ and $\otimes$. The set of matrix $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ over Max-Plus Algebra denoted as $\overline{\mathbb{R}}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$. The aim of this research is to study eigenvalue, eigenvector and bases of eigenvector space in Max-Plus Algebra. Let $A \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$, matrix A is called irreducible if A has a strongly connected. If matrix A is irreducible then A has a unique eigenvalue, but if matrix A is reducible then A has k $(1 \leq k \leq n)$ eigenvalues. To determine eigenvalue of reducible matrix, this matrix must be changed to Frobenius Normal Form (FNF) so that these elements in the principal diagonal are irreducible square submatrix. Furthermore eigenvector and image set of matrix A are determined by theirs eigenvalues.

Key words: *irreducible, eigenvalue, eigenvector, Frobenius Normal Form (FNF), image set.*

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim,

Puji syukur kepada Allah SWT yang senantiasa memberikan rahmat dan hidayahNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Selain itu, penulis juga mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini, khususnya kepada

1. bapak Drs. Siswanto, M.Si. sebagai dosen pembimbing I dan ibu Dra. Etik Zukhronah, M.Si. sebagai dosen pembimbing II atas kesediaan dan kesabaran yang diberikan dalam membimbing penulis,
2. teman-temanku baik ditingkat jurusan, fakultas maupun universitas,
3. semua pihak yang membantu dalam penulisan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebut satu per satu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang memerlukan.

Surakarta, Januari 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR NOTASI

$\mathbb{R}$	:	himpunan bilangan real
$\overline{\mathbb{R}}$	:	$\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
$\oplus$	:	operasi maksimum
$\otimes$	:	operasi penjumlahan
ϵ	:	$-\infty$
e	:	0
$\overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$	:	himpunan matriks aljabar *max-plus* berukuran $m \times n$
$\mathbb{N}$	:	himpunan bilangan asli
$\bar{\epsilon}$	:	vektor yang semua elemennya ϵ
$\boldsymbol{\epsilon}$	:	matriks yang semua elemennya ϵ
a^{-1}	:	invers dari a
$Im(A)$	:	himpunan peta dari A
A^{-1}	:	invers dari matriks A
P	:	matriks permutasi
V	:	himpunan node
E	:	himpunan *arc*
(a_{ij})	:	entri matriks A
$D = (V, E)$	:	digraf
$D = (V, E, w)$	:	*weight digraph*
π	:	*path*
$w(i, j)$	:	bobot *path* dari node j ke node i
σ	:	*cycle*
$u \to v$	:	v dapat dicapai dari u
D_A	:	*associated weighted digraph* dari A
$\Gamma(A)$	:	matriks metrik dari A
$l(\sigma)$	:	panjang dari *cycle* σ
$w(\sigma, A)$	:	bobot dari *cycle* σ pada A
$\mu(\sigma, A)$	:	bobot rata-rata *cycle* σ pada A

$\lambda(A)$	:	nilai eigen matriks A
A^n	:	matriks pangkat aljabar *max-plus*
$V(A,\lambda)$	:	himpunan vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ
$\Lambda(A)$	:	himpunan semua nilai eigen dari A
$V(A)$	:	himpunan semua vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ
$V^+(A,\lambda)$	:	himpunan vektor eigen berhingga dari A yang bersesuaian dengan λ
$V^+(A)$	:	himpunan semua vektor eigen berhingga dari A yang bersesuaian dengan λ
$E(A)$	:	himpunan *eigen nodes* atau *critical nodes*
$C(A)$	:	*critical digraph* dari A
$i \sim j$	:	i ekuivalen dengan j
$\emptyset$	:	himpunan kosong
$(E(A), \sim)$	:	kelas ekuivalensi dari $E(A)$
$E^*(A)$	:	himpunan *critical nodes* yang non ekuivalen dari A
$A[K]$	:	*principal* submatriks dari A
$x[K]$	:	subvektor dari vektor x
$D[K]$	:	*induced subdigraph* dari D
A_{jj}	:	submatriks persegi yang tak terreduksi dari A
N_j	:	node untuk matriks A_{jj}
C_A	:	*condensation digraph* dari matriks A yang *FNF*
$*$	:	submatriks lain dari ϵ
$\lvert\Lambda(A)\rvert$	:	kardinalitas dari himpunan semua nilai eigen matriks A
$I(\lambda)$	:	himpunan node yang merupakan kelas *spectral* dari matriks A yang *FNF* dengan nilai eigen λ
$E(\lambda)$	:	himpunan node yang merupakan kelas *spectral* dari matriks A dengan nilai eigen λ
$\sim_\lambda$	:	λ ekuivalen
$\blacksquare$	:	akhir pembuktian