

ANALISIS SISTEM ANTRIAN  $M/M/1$ : PENDEKATAN  
KLASIK DAN *LATTICE PATH COMBINATORICS*



oleh  
FADHILA ALVIN QUROTTA A'YUN  
NIM. M0110025

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan  
memperoleh gelar Sarjana Sains Matematika.

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS SEBELAS MARET SURAKARTA

2015

*commit to user*

SKRIPSI  
ANALISIS SISTEM ANTRIAN  $M/M/1$ : PENDEKATAN KLASIK DAN  
*LATTICE PATH COMBINATORICS*

yang disiapkan dan disusun oleh  
FADHILA ALVIN QUROTTA A'YUN  
NIM. M0110025

dibimbing oleh

Pembimbing I,

  
Drs. Isnandar Slamet, M.Sc., Ph.D.

NIP. 19660328 199203 1 001

Pembimbing II,

  
Drs. Muslich, M.Si.

NIP. 19521118 197903 1 001

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji  
pada hari Jumat, tanggal 30 Januari 2015  
dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Anggota Tim Penguji

1. Dra. Sri Sulistijowati H., M.Si.

NIP. 19690116 199402 2 001

2. Titin Sri Martini, S.Si., M.Kom.

NIP. 19750120 200812 2 001

Tanda Tangan

1. 

2. 


Surakarta, 6 Februari 2015

Disahkan oleh

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam


Dekan



  
Prof. Ir. Ari Handono Ramelan, M.Sc.(Hons)., Ph.D.

NIP. 19610223 198601 1 001

Ketua Jurusan Matematika,

  
Supriyadi Wibowo, M.Si.

NIP. 19681110 199512 1 001

## ABSTRAK

Fadhila Alvin Qurotta A'yun. 2015. ANALISIS SISTEM ANTRIAN  $M/M/1$ : PENDEKATAN KLASIK DAN  $LATTICE PATH COMBINATORICS$ . Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Sebelas Maret.

Sistem antrian  $M/M/1$  merupakan sistem antrian sederhana dimana notasi  $M/M/1$  berturut-turut menyatakan waktu kedatangan berdistribusi Poisson, waktu pelayanan berdistribusi eksponensial dan jumlah fasilitas pelayanan satu. Pendekatan klasik dalam analisis perilaku sistem antrian dilakukan dengan asumsi sistem mencapai keadaan setimbang (*steady-state*). Dalam beberapa keadaan sistem tidak bisa mencapai keadaan setimbang. Sistem demikian disebut sistem antrian keadaan *transient*. Analisis sistem antrian keadaan *transient* dapat dijelaskan menggunakan pendekatan *lattice path combinatorics*.

Penelitian ini bertujuan untuk menurunkan ulang perilaku sistem antrian  $M/M/1$  dengan pendekatan klasik dan *lattice path combinatorics*. Dalam pendekatan klasik, beberapa karakteristik dari sistem antrian diturunkan yaitu rata-rata pelanggan dalam sistem ( $L$ ), rata-rata pelanggan dalam antrian ( $L_q$ ), waktu tunggu dalam sistem ( $W$ ), waktu tunggu dalam antrian ( $W_q$ ), probabilitas sistem menganggur ( $P_0$ ), dan probabilitas  $n$  pelanggan dalam sistem ( $P_n$ ). Sedangkan dengan pendekatan *lattice path combinatorics*, sistem antrian direpresentasikan dalam bentuk *lattice path*. Dengan terlebih dahulu menghitung banyaknya *lattice path* yang mungkin, maka fungsi kepadatan probabilitas dan probabilitas sistem untuk beberapa keadaan berhasil diturunkan.

**Kata Kunci** : sistem antrian  $M/M/1$ , pendekatan klasik, *lattice path combinatorics*, keadaan setimbang, *transient*

## ABSTRACT

Fadhila Alvin Qurotta A'yun. 2015. ANALYSIS OF M/M/1 QUEUING SYSTEM: A CLASSICAL AND LATTICE PATH COMBINATORICS APPROACH. Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Sebelas Maret University.

The  $M/M/1$  queuing system is a simple queuing system where the first notation  $M$  stands for Poisson arrival distribution, the second notation  $M$  stands for exponential service-time distribution and number of server is one. The classical approach in analyzing the behavior of queuing system is that the system is operated under steady-state conditions. In some conditions, the system can not reach steady-state conditions. Under this conditions, the system is known as transient queuing system. Analysis of transient queuing system can be done using the lattice path combinatorics approach.

This research aims to rederive the behavior  $M/M/1$  queuing system using the classical and lattice path combinatorics approach. Using the classical approach, some characteristics of queuing system derived, i.e., expected number of customer in system ( $L$ ), expected number of customer in queue ( $L_q$ ), expected waiting time in system ( $W$ ), expected waiting time in queue ( $W_q$ ), probability idle system ( $P_0$ ) and probability of  $n$  customer in system ( $P_n$ ). Whereas by using the lattice path combinatorics approach, queuing system is represented by a lattice path. By calculating first the possible number of lattice path then probability density function and the probability of some conditions are successfully derived.

**Keywords :** *M/M/1 queuing system, a classical approach, lattice path combinatorics, steady-state, transient*

## PERSEMBAHAN

Karya ini kupersembahkan untuk  
kedua orang tuaku dan saudara-saudaraku



*commit to user*

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis berhasil menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Ucapan terima kasih penulis disampaikan kepada Drs. Isnandar Slamet, M. Sc., Ph. D. dan Drs. Muslich, M. Si. sebagai Pembimbing I dan Pembimbing II yang telah memberi bimbingan, arahan dan motivasi dalam penyusunan skripsi ini. Ucapan terima kasih juga disampaikan kepada semua pihak yang telah memberikan bantuan, masukan dan dukungan kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini belum sempurna, untuk itu penulis menerima saran dan kritik yang bersifat membangun. Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat.

Surakarta, Januari 2015

Penulis



## Daftar Isi

PENGESAHAN . . . . .	ii
ABSTRAK . . . . .	iii
<i>ABSTRACT</i> . . . . .	iv
PERSEMBAHAN . . . . .	v
KATA PENGANTAR . . . . .	vi
DAFTAR ISI . . . . .	vii
DAFTAR TABEL . . . . .	ix
DAFTAR GAMBAR . . . . .	x
<b>I PENDAHULUAN</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang Masalah . . . . .	1
1.2 Perumusan Masalah . . . . .	2
1.3 Tujuan Penelitian . . . . .	3
1.4 Manfaat Penelitian . . . . .	3
<b>II LANDASAN TEORI</b> . . . . .	<b>4</b>
2.1 Tinjauan Pustaka . . . . .	4
2.2 Teori-Teori Penunjang . . . . .	5
2.2.1 Model Antrian . . . . .	5
2.2.2 Pendekatan Klasik . . . . .	6
2.2.3 Pendekatan <i>Lattice Path Combinatorics</i> . . . . .	11
2.3 Kerangka Pemikiran . . . . .	12
<b>III METODE PENELITIAN</b> . . . . .	<b>14</b>

*commit to user*

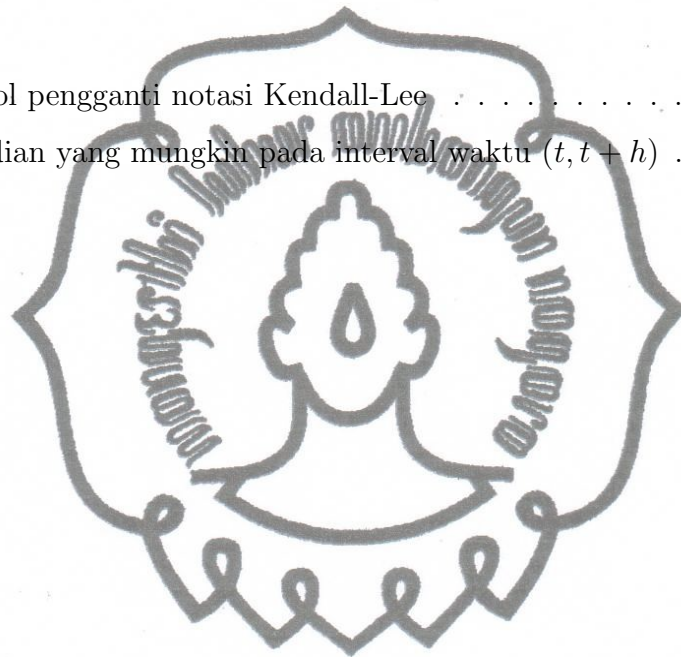
<b>IV HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	<b>15</b>
4.1 Sistem Antrian $(M/M/1) : (FIFO/N/\infty)$ dengan Pendekatan Klasik . . . . .	15
4.1.1 Keadaan Setimbang . . . . .	15
4.1.2 Ukuran Perilaku $(M/M/1) : (FIFO/N/\infty)$ . . . . .	17
4.2 Sistem Antrian $M/M/1$ dengan Pendekatan <i>Lattice Path Combinatorics</i> . . . . .	18
4.2.1 Pendekatan Kombinatorial dan Representasi <i>Lattice Path</i> .	18
4.2.2 Perhitungan <i>Lattice Path</i> . . . . .	19
4.2.3 Probabilitas <i>Transient</i> . . . . .	26
4.3 Penerapan Kasus . . . . .	36
<b>V PENUTUP</b>	<b>40</b>
5.1 Kesimpulan . . . . .	40
5.2 Saran . . . . .	40
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>41</b>





## Daftar Tabel

2.1	Simbol pengganti notasi Kendall-Lee . . . . .	6
2.2	Kejadian yang mungkin pada interval waktu $(t, t + h)$ . . . . .	9



*commit to user*

## Daftar Gambar

4.1	Lattice path dari $(i, 0)$ ke $(m, n)$ . . . . .	20
4.2	Pencerminan titik $(i, 0)$ menjadi $(0, i)$ . . . . .	21
4.3	Lattice path dari $(i, 0)$ ke $(m, n)$ yang berada di bawah garis $y = x - a$ diubah menjadi lattice path dari $(i - a, 0)$ ke $(m - a, n)$ yang berada di bawah garis $y = x$ . . . . .	22
4.4	Banyaknya lattice path $\bar{N}(i; m, m)_f$ . . . . .	23
4.5	Banyaknya lattice path $N_r(i; m)$ . . . . .	24
4.6	Lattice path dari $(i, 0)$ ke $(m, n)$ yang berada di bawah garis $y = x - a$ diubah menjadi lattice path dari $(i - a, 0)$ ke $(m - a, n)$ yang berada di bawah garis $y = x$ . . . . .	26