

MASALAH VEKTOR EIGEN YANG DIPERMUTASI DALAM
ALJABAR MAKS-PLUS



oleh
PIUS RISHA INDRACAHYA
M0108060

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar
Sarjana Sains Matematika

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SEBELAS MARET
SURAKARTA

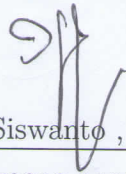
2014

TUGAS AKHIR
MASALAH VEKTOR EIGEN YANG DIPERMUTASI DALAM
ALJABAR MAKS-PLUS

disusun oleh
PIUS RISHA INDRACAHYA
M0108060

dibimbing oleh

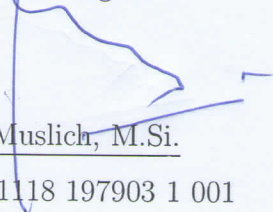
Pembimbing I



Drs. Siswanto, M.Si.

NIP. 19670813 199203 1 002

Pembimbing II



Drs. Muslich, M.Si.

NIP. 19521118 197903 1 001

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji
pada hari Jumat, tanggal 19 Desember 2014
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Anggota Tim Penguji

1. Drs. Santoso Budi Wiyono, M.Si.


NIP. 19620203 199103 1 001

2. Dr. Sri Subanti, M.Si.

NIP. 19581031 198601 2 001

Tanda Tangan

1. 

2. 

Disahkan oleh

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dekan



Prof. Ir. Ari Handono Ramelan, M.Sc.(Hons), Ph.D

NIP. 19610223 198601 1 001

Surakarta, Januari 2015

Ketua Jurusan Matematika

Supriyadi Wibowo, M.Si

NIP. 19681110 199512 1 001

MOTO

*Segala perkara dapat kutanggung di dalam Dia yang memberi
kekuatan kepadaku (Filipi 4 : 13)*



PERSEMBAHAN

*Tulisan ini kupersembahkan untuk
Ibu, Bapak, Keluargaku, serta untuk teman-temanku,
terimakasih atas bantuan yang diberikan.*



ABSTRAK

Pius Risha Indrachya. 2014. MASALAH VEKTOR EIGEN YANG DIPERMUTASI DALAM ALJABAR MAKS PLUS. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret.

Aljabar maks-plus merupakan suatu himpunan $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ yang dilengkapi dua operasi \oplus dan \otimes . Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$ operasi \oplus dan \otimes didefinisikan sebagai $a \oplus b = \max\{a, b\}$ dan $a \otimes b = a + b$. Himpunan matriks berukuran $m \times n$ atas aljabar maks-plus dinotasikan sebagai $\mathbb{R}_\varepsilon^{m \times n}$. Masalah eigen adalah masalah menentukan nilai eigen $\lambda \in \mathbb{R}_\varepsilon$ dan vektor eigen $x \in \mathbb{R}_\varepsilon^n$, $x \neq (\varepsilon, \dots, \varepsilon)^T$ yang memenuhi $A \otimes x = \lambda \otimes x$ untuk $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji ulang vektor eigen bilangan bulat yang dipermutasi yaitu diberikan $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^n$, dan $\pi \in P_n$ sedemikian hingga $A \otimes b(\pi) = b(\pi)$. Vektor $b(\pi)$ disebut vektor eigen bilangan bulat yang dipermutasi.

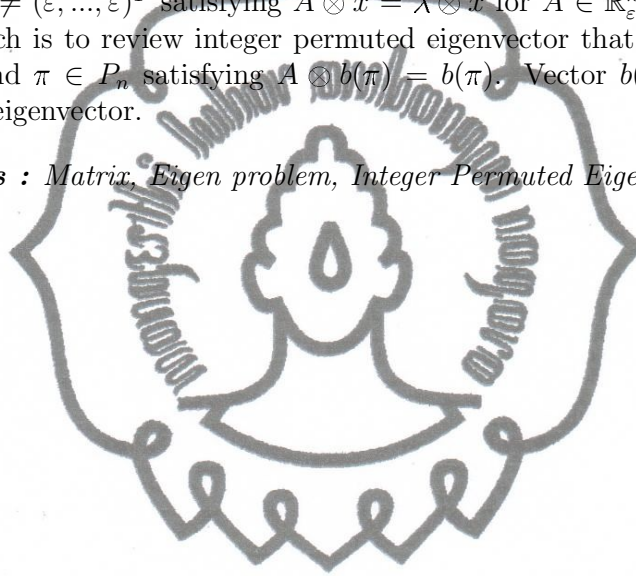
Kata kunci : *Matriks, Masalah Eigen, Vektor Eigen Bilangan Bulat yang Dipermutasi.*

ABSTRACT

Pius Risha Indrachya. 2014. PERMUTED EIGENVECTOR PROBLEM OVER MAX PLUS ALGEBRA. Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Sebelas Maret University.

Max-plus algebra is a set $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ equipped with two operation \oplus and \otimes . For every $a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$ operation \oplus and \otimes is defined by $a \oplus b = \max\{a, b\}$ and $a \otimes b = a + b$. The set of matrix $m \times n$ over max-plus algebra denoted as $\mathbb{R}_\varepsilon^{m \times n}$. Eigen problem is a problem to find eigenvalue $\lambda \in \mathbb{R}_\varepsilon$ and eigenvector $x \in \mathbb{R}_\varepsilon^n$, $x \neq (\varepsilon, \dots, \varepsilon)^T$ satisfying $A \otimes x = \lambda \otimes x$ for $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$. The purpose of this research is to review integer permuted eigenvector that is given $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^n$, and $\pi \in P_n$ satisfying $A \otimes b(\pi) = b(\pi)$. Vector $b(\pi)$ is called integer permuted eigenvector.

Keywords : *Matrix, Eigen problem, Integer Permuted Eigenvector.*



KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Kuasa yang telah memberikan berkat dan penyertaannya sehingga penulis diberikan kesabaran, kemudahan, dan kelancaran dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis mendapat bimbingan, dukungan, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Drs. Siswanto, M.Si sebagai Pembimbing I yang telah memberi arahan dalam penulisan skripsi ini dan Bapak Drs. Muslich, M.Si sebagai Pembimbing II yang telah membimbing dalam penulisan skripsi ini, bapak dan ibu yang selalu memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini, dan semua pihak yang telah membantu. Penulis berharap semoga karya sederhana ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Surakarta, Desember 2014

Penulis

DAFTAR ISI

JUDUL	i
PENGESAHAN	ii
MOTO	iii
PERSEMBAHAN	iv
ABSTRAK	v
<i>ABSTRACT</i>	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR TABEL	x
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR NOTASI	xii
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Perumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	3
II LANDASAN TEORI	4
2.1 Tinjauan Pustaka	4
2.2 Teori Penunjang	4
2.2.1 Aljabar Maks-Plus	5

2.2.2	Graf Berarah	6
2.2.3	Matriks di dalam Aljabar Maks-Plus	8
2.2.4	Permutasi	9
2.2.5	Sistem Persamaan Linear dalam Aljabar Maks-Plus	11
2.2.6	Himpunan Peta Sederhana dan Matriks Reguler Kuat	14
2.2.7	Nilai Eigen dan Vektor Eigen Aljabar Maks-Plus	15
2.3	Kerangka Berpikir	19
III METODE PENELITIAN		20
IV PEMBAHASAN		22
4.1	Maksimum Kolom	22
4.2	Vektor Eigen Bilangan Bulat yang Dipermutasi	27
V PENUTUP		30
5.1	Kesimpulan	30
5.2	Saran	30
DAFTAR PUSTAKA		31

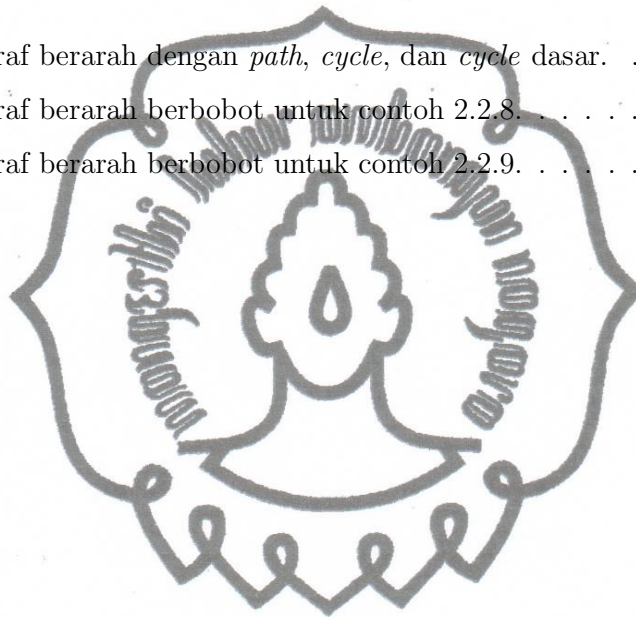
DAFTAR TABEL

2.1	<i>Cycle</i> dasar dari Gambar 2.3.	17
-----	---	----



DAFTAR GAMBAR

2.1	Graf berarah dengan <i>path</i> , <i>cycle</i> , dan <i>cycle</i> dasar.	7
2.2	Graf berarah berbobot untuk contoh 2.2.8.	16
2.3	Graf berarah berbobot untuk contoh 2.2.9.	16



DAFTAR NOTASI

\oplus	: operasi maksimum pada aljabar maks-plus
\otimes	: operasi jumlah pada aljabar maks-plus
ε	: elemen identitas untuk \oplus dengan $\varepsilon = -\infty$
e	: elemen identitas untuk \otimes dengan $e = 0$
\mathbb{R}_ε	: $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$
$\mathbb{R}_\varepsilon^{m \times n}$: matriks berukuran $m \times n$ dengan elemen \mathbb{R}_ε
\mathbb{N}	: himpunan bilangan asli
E_n	: matriks identitas berukuran $n \times n$ dalam aljabar maks-plus
A^T	: transpos suatu matriks A
P_n	: himpunan semua permutasi dari himpunan $\{1, 2, \dots, n\}$
$A(\pi, \sigma)$: matriks A dengan permutasi $\pi[\sigma]$ pada baris [kolom]
D_A	: graf berarah dari matriks A
V_D	: himpunan titik-titik <i>node</i> pada graf berarah D_A
E_D	: himpunan <i>arc</i> pada graf berarah D_A
$\lambda(A)$: nilai eigen dari matriks A
A^k	: $A \otimes A \otimes \dots \otimes A$ (A sebanyak k)
$w(\pi)$: bobot <i>path</i> π
$w(\sigma, A)$: bobot <i>path</i> σ pada D_A
$\mu(\sigma, A)$: rata-rata <i>cycle</i> σ pada D_A
$\Gamma(A)$: matriks metrik A
$Im(A)$: himpunan peta dari matriks A
$sim(A)$: himpunan peta sederhana dari matriks A
$V(A)$: himpunan semua vektor eigen dari matriks A
\square	: akhir pembuktian