PENERAPAN METODE PANGKAT UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH EIGEN MATRIKS ATAS ALJABAR MAKS-PLUS

oleh

NAZILATULLAILI MUFAROKHAH ASSAKAN

M0111061

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana Sains Matematika

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

SURAKARTA

2015

SKRIPSI

PENERAPAN METODE PANGKAT UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH EIGEN MATRIKS ATAS ALJABAR MAKS-PLUS

yang disiapkan dan disusun oleh

NAZILATULLAILI MUFAROKHAH ASSAKAN

NIM. M0111061

dibimbing oleh

Pembimbing I

Drs. Siswanto, M.Si.
NIP. 19670813 199203 1 002

Pembimbing II

Titin Sri Martini, S.Si., M.Kom.
NIP. 19750120 200812 2 001

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji
pada hari Rabu, tanggal 09 September 2015
dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Anggota Tim Penguji	Tanda Tangan
1. Drs. Santoso Budi Wiyono, M.Si. NIP. 19620203 199103 1 001	1. ....
2. Drs. Isnandar Slamet, M.Sc., Ph.D. NIP. 19660328 199203 1 001	2. ....

Surakarta, Oktober 2015

Disahkan oleh
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Dekan,

Prof. Ir. Ari Handono Ramelan, M.Sc.(Hons), Ph.D.
NIP. 19610223 198601 1 001

Kepala Program Studi Matematika,

Supriyadi Wibowo, M.Si.
NIP. 19681110 199512 1 001

ABSTRAK

Nazilatullaili Mufarokhah Assakan. 2015. PENERAPAN METODE PANGKAT UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH EIGEN MATRIKS ATAS ALJABAR MAKS-PLUS. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Sebelas Maret.

Aljabar maks-plus ($\mathfrak{R}_{max}$) merupakan suatu himpunan $\mathbb{R}_\epsilon = R \cup \{\epsilon\}$ yang dilengkapi dua operasi yaitu $\oplus$ dan $\otimes$ dimana $\epsilon = -\infty$. Himpunan matriks berukuran $n \times n$ atas aljabar maks-plus dinotasikan sebagai $\mathbb{R}_\epsilon^{n\times n}$. Penelitian ini bertujuan untuk menerapkan metode pangkat dalam menentukan nilai eigen dan vektor eigen serta basis ruang vektor eigen matriks atas aljabar maks-plus. Misalkan $A \in \mathbb{R}_\epsilon^{n\times n}$, matriks A disebut matriks tak tereduksi jika A *strongly connected*. Jika A tak tereduksi maka A mempunyai nilai eigen tunggal, tetapi jika matriks A tereduksi maka A mempunyai nilai eigen sebanyak k dimana $1 \leq k \leq n$. Untuk menentukan nilai eigen matriks tereduksi, matriks tersebut diubah ke dalam bentuk *Frobenius Normal Form (FNF)* sehingga elemen-elemen pada diagonal utamanya merupakan submatriks persegi yang tak tereduksi. Metode pangkat diberikan untuk menghitung nilai eigen dan vektor eigen matriks tak tereduksi. Pada matriks tereduksi ditentukan himpunan peta matriks A untuk nilai eigen yang bersesuaian.

Kata Kunci: aljabar maks-plus, matriks, nilai eigen, vektor eigen, metode pangkat,*Frobenius Normal Form (FNF)*, himpunan peta.

ABSTRACT

Nazilatullaili Mufarokhah Assakan. 2015. APPLICATION OF THE POWER METHOD TO SOLVE THE EIGENPROBLEMS MATRIX IN THE MAX-PLUS ALGEBRA. Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Sebelas Maret University.

Max-plus algebra ($\Re_{max}$) is a set $\mathbb{R}_\epsilon = R \cup \{\epsilon\}$ where $\epsilon = -\infty$ equipped with two operation $\oplus$ and $\otimes$. The set of matrix $n \times n$ over max-plus algebra is denoted by $\mathbb{R}_\epsilon^{n\times n}$. The aim of this research is to applying the power method in determining the eigenvalues, eigenvectors, and base on eigenvectors matrix in the max-plus algebra. Let $A \in \mathbb{R}_\epsilon^{n\times n}$, matrix A is called irreducible if A has a *strongly connected*. If A irreducible then A has a unique eigenvalue, but if matrix A reducible then A has $k(1 \leq k \leq n)$ eigenvalues. To determine eigenvalue of reducible matrix, this matrix must be changed to Frobenius Normal Form (FNF) so that these elements in the principal diagonal are irreducible square submatrix. The power method given to determine eigenvalues and eigenvectors matrix irreducible. Reducible matrix by image set of matrix A are determined which eigenvalues.

Key words: max-plus algebra, matrix, eigenvalue, eigenvector, power method, *Frobenius Normal Form (FNF)*, image set.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis sampaikan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis berhasil menyelesaikan skripsi ini.

Skripsi ini ditulis dalam lima bab. Bab I berisi tentang pendahuluan yang terdiri dari latar belakang masalah, perumusan masalah, tujuan, dan manfaat. Bab II meliputi tinjauan pustaka yang berisi tentang penelitian-penelitian sebelumnya yang menjadi dasar penelitian dan teori-teori penunjang. Bab III membahas tentang metode penelitian, yaitu langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini. Pada bab IV, diuraikan mengenai hasil penelitian yang telah dilakukan. Kesimpulan dan saran dari penelitian ini diberikan pada bab V.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan, dorongan, serta bimbingan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada

1. Bapak Drs. Siswanto, M.Si sebagai Pembimbing I dan Ibu Titin Sri Martini, S.Si., M.Kom sebagai Pembimbing II yang telah membimbing dan mengarahkan dalam penyusunan skripsi ini.

2. Seluruh pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Penulis

MOTTO

Allah tidak akan mengubah nasib suatu kaum sampai mereka mau mengubah apa yang ada pada diri mereka. (QS. Ar-Ra'du ayat 11)

Sesungguhnya jika kamu bersyukur, pasti Kami akan menambah (nikmat) kepadamu, dan jika kamu mengingkari (nikmat-Ku) maka sesungguhnya azab-Ku sangat pedih. (QS. Ibrahim ayat 7)

PERSEMBAHAN

Saya persembahkan karya ini untuk
kedua orang tua saya, Bapak Wahyudi dan Ibu Siti Syarifah,
adik saya, Annas Annafi', Affan Khoirul Annam dan Faqih Abdul Jalil,
Bapak Joko Mulyono dan Ibu Dwi Ningsih.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR NOTASI

$\mathbb{R}$	:	himpunan bilangan real
$\mathbb{R}_+$	:	himpunan bilangan real positif
$\mathbb{N}$	:	himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}_\epsilon$	:	$\mathbb{R} \cup \{\epsilon\}$ dimana $\epsilon = -\infty$
$\oplus$	:	operasi maksimum
$\otimes$	:	operasi penjumlahan
$\mathfrak{R}_{max}$	:	$(\mathbb{R}_\epsilon, \oplus, \otimes)$ atau aljabar maks-plus
$\otimes$	:	operasi perkalian pada himpunan bilangan eksponen $\mathbb{R}_\epsilon$
$x^{\otimes n}$	:	pangkat ke n dari x dalam aljabar max-plus
$\mathbb{R}_\epsilon^{m \times n}$	:	himpunan matriks atas aljabar maks-plus berukuran $m \times n$
$D = (V, E, \omega)$	:	*weighted digraph*
V	:	*node*
E	:	*edge*
ω	:	bobot dari *digraph*
Π	:	*path*
$u \to v$	:	v dapat dicapai dari u
(a_{ij})	:	entri matriks A
D_A	:	*digraph* dari matriks A
$\Gamma(A)$	:	matriks metrik dari matriks A
$\mu(A)$	:	nilai eigen matriks nonnegatif A
z	:	vektor eigen matriks nonnegatif
$\lambda(A)$	:	nilai eigen matriks A
$V(A, \lambda)$	:	himpunan vektor eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan λ
$\Lambda(A)$	:	himpunan semua nilai eigen dari matriks A

$V(A)$	:	himpunan semua vektor eigen dari matriks A
$V^+(A,\lambda)$	:	himpunan vektor eigen berhingga dari matriks A yang bersesuaian dengan λ
$V^+(A)$	:	himpunan semua vektor eigen berhingga dari matriks A
$E(A)$	:	himpunan *eigen nodes* atau *critical nodes*
$C(A)$	:	*critical graph* dari matriks A
$i \sim j$	:	i ekuivalen dengan j
$\emptyset$	:	himpunan kosong
$(E(A), \sim)$	:	kelas ekuivalensi dari $E(A)$
A_{jj}	:	submatriks tak tereduksi dari matriks A
N_j	:	*node* untuk matriks A_{jj}
C_A	:	*condensation digraph* dari A yang *FNF*
$I(\lambda)$	:	himpunan *node* yang merupakan kelas *spectral* dari matriks A yang *FNF* dengan nilai eigen λ
$E(\lambda)$	:	himpunan *node* yang merupakan kelas spectral dari matriks A dengan nilai eigen λ