POLINOMIAL KARAKTERISTIK MATRIKS DALAM ALJABAR MAKS-PLUS

Maryatun, Siswanto, dan Santoso Budi Wiyono
Program Studi Matematika FMIPA UNS

Abstrak. Polinomial dalam aljabar maks-plus dapat dinotasikan sebagai $p(z) = \oplus_{r=0}^{m} c_r \otimes z^{j_r}$ dengan $c_r, j_r \in \mathbb{R}$. Bilangan j_r disebut *degree* (derajat) dari $p(z)$ dan $m+1$ disebut *length* (panjang). Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji ulang polinomial karakteristik dari suatu matriks, sudut terbesar (*the greatest corner*) dari polinomial karakteristik dan polinomial karakteristik dari matriks khusus dalam aljabar maks-plus. Selanjutnya diberikan contoh untuk polinomial karakteristik matriks, sudut terbesar, dan matriks khusus. Hasil penelitian ini, yaitu suatu polinomial karakteristik suatu matriks, sudut terbesar dengan menggunakan nilai eigen dan polinomial karakteristik dari matriks khusus, yaitu polinomial karakteristik dari matriks diagonal dominan dan matriks atas $T = \{0, -\infty\}$.

Kata kunci : *polinomial karakteristik, sudut terbesar, matriks khusus, matriks diagonal dominan, matriks atas* $T = \{0, -\infty\}$.

1. Pendahuluan

Aljabar maks-plus merupakan himpunan bilangan $\mathbb{R}_{maks} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ yang dilengkapi dengan dua operasi biner yakni operasi "maksimum" dan operasi "plus" (Bacelli et al. [2]). Aljabar maks-plus banyak diterapkan untuk menyelesaikan persoalan di bidang teori graf, kombinatorik, teori sistem, teori antrian, dan proses stokastik. Polinomial maks-plus terdapat dalam aljabar maks-plus. Polinomial maks-plus dapat dinyatakan dalam bentuk $p(z) = \oplus_{r=0}^{m} c_r \otimes z^{j_r}$ dengan $c_r, j_r \in \mathbb{R}$. Bilangan j_r disebut *degree* (derajat) dari $p(z)$ dan $m+1$ disebut *length* (panjang) (Butkovic [3]).

Pemfaktoran polinomial maks-plus berbeda dengan pemfaktoran pada aljabar konvensional (Butkovic [3]). Menurut Anton [1], jika A adalah suatu matriks berukuran $n \times n$ maka nilai eigen λ dapat diperoleh dengan mencari akar-akar dari persamaan $det(\lambda I - A) = 0$. Persamaan tersebut disebut sebagai persamaan karakteristik dari A. Schutter [8] dan Farlow [6] menunjukkan bagaimana cara menentukan persamaan karakteristik dalam aljabar maks-plus. Dalam hal ini penulis ingin membahas tentang polinomial karakteristik matriks dalam aljabar maks-plus.

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji ulang polinomial karakteristik dalam aljabar maks-plus. Selanjutnya, dicari sudut terbesar dari polinomial karakteristrik menggunakan nilai eigen terbesar. Kemudian, dicari polinomial karakteristik dari matriks khusus, yaitu polinomial karakteristik dari matriks diagonal dominan dan matriks atas $T = \{0, -\infty\}$.

2. POLINOMIAL KARAKTERISTIK MAKS-PLUS

Menurut Butcovic [3], bentuk dari polinomial karakteristik didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1. *Jika $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ maka polinomial karakteristik maks-plus adalah*

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= maper(A \oplus x \otimes I) \\
&= maper \begin{pmatrix} a_{11} \oplus x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \oplus x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \oplus x \end{pmatrix} \\
&= x^n \oplus \delta_1 \otimes x^{n-1} \oplus \ldots \oplus \delta_{n-1} \otimes x \oplus \delta_n
\end{aligned}$$

dapat ditulis $\chi_A(x) = \Sigma^{\oplus}_{k=0,\ldots,n} \delta_{n-k} \otimes x^k$ dengan $\delta_0 = 0$.

Contoh 2.1. Dari Butcovic dan Murfit [4]. Diberikan suatu matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, dengan menggunakan Definisi 2.1 dapat diperoleh

$$\chi_A(x) = maper \begin{pmatrix} 1 \oplus x & 3 & 2 \\ 0 & 4 \oplus x & 1 \\ 2 & 5 & 0 \oplus x \end{pmatrix},$$

sehingga didapatkan polinomial karakteristik matriks A adalah

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= (1 \oplus x) \otimes (4 \oplus x) \otimes (0 \oplus x) \oplus 3 \otimes 1 \otimes 2 \oplus 2 \otimes 0 \otimes 5 \oplus \\
&\quad 3 \otimes 0 \otimes (0 \otimes x) \oplus (1 \oplus x) \otimes 1 \otimes 5 \oplus 2 \otimes (4 \oplus x) \otimes 2 \\
&= x^3 \oplus 4 \otimes x^2 \oplus 6 \otimes x \oplus 8.
\end{aligned}$$

Jadi, polinomial karakteristik dari matriks A adalah $\chi_A(x) = x^3 \oplus 4 \otimes x^2 \oplus 6 \otimes x \oplus 8$.

Contoh 2.2. Dari Jafari dan Hosseinyazdi [7] dan Cuninghame-Green [5]. Diberikan suatu matriks $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, dengan menggunakan Definisi 2.1, diperoleh polinomial karakteristik dari matriks B adalah

$$\begin{aligned}
\chi_B(x) &= maper\begin{pmatrix} 2\oplus x & 1 & 4 \\ 1 & 0\oplus x & 1 \\ 2 & 2 & 1\oplus x \end{pmatrix} \\
&= (2\oplus x)\otimes(0\oplus x)\otimes(1\oplus x)\oplus 1\otimes 1\otimes 2\oplus 4\otimes 1\otimes 2 \\
&\quad \oplus 1\otimes 1\otimes(1\oplus x)\oplus(2\oplus x)\otimes 1\otimes 2\oplus 4\otimes(0\oplus x)\otimes 2 \\
&= x^3\oplus 2\otimes x^2\oplus 6\otimes x\oplus 7.
\end{aligned}$$

Jadi, polinomial karakteristik dari matriks B adalah $\chi_B(x) = x^3\oplus 2\otimes x^2\oplus 6\otimes x\oplus 7$.

Teorema 2.2. *Jika $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$, maka $\delta_k = \sum^{\oplus}_{B\in P_{k(A)}} maper(B)$ untuk $k = 1,\ldots,n$, dengan $P_{k(A)}$ adalah himpunan submatriks utama A dengan orde k.*

Bukti.

Koefisien δ_k merupakan koefisien dari x^{n-k} di $\chi_A(x)$ dan karena itu bobot maksimum dari semua permutasi adalah $n-k$ dari x, dan k adalah konstanta dari baris dan kolom yang berbeda dari submatriks A dengan menghapus baris dan kolom x. Kolom x hanya muncul dari diagonal yang sesuai submatriks utama. Oleh karena itu, dengan mudah menemukan $\delta_n = maper(A)$ dan $\delta_1 = maks(a_{11},\ldots,a_{nn})$. ■

Teorema 2.3. *Jika $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$, maka $\chi_A(x) = x^n$ jika dan hanya jika D_A asiklik.*

Bukti.

Jika D_A asiklik, maka semua bobot permutasi yang berhubungan dengan submatriks utama A adalah ε dan dengan demikian semua $\delta_k = \varepsilon$. Jika D_A mengandung *cycle*, misalnya $(i_1, , i_k, i_1)$ untuk beberapa $k\in\mathbb{N}$, maka $maper(A(i_1,\ldots,i_k)) > \varepsilon$, sehingga $\delta_k > \varepsilon$. ■

3. SUDUT TERBESAR (*THE GREATEST CORNER*) POLINOMIAL KARAKTERISTIK MAKS-PLUS

Menurut Butcovic [3], definisi sudut tebesar (*the greatest corner*) sebagai berikut.

Definisi 3.1. *Sudut terbesar dalam polinomial maks-plus* $p(z) = \oplus_{r=0}^{m} c_r \otimes z^{j_r}$, $m > 0$ *adalah* $maks_{r=0,\ldots,m-1} \frac{c_r - c_m}{j_m - j_r}$.

Definisi 3.2. *Jika* $p_(x) = \chi_A(x)$ *dengan* $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ *maka* $m = n, j_r = r$, *dan* $c_r = \delta_{n-r}$ *untuk* $r = 0, 1, \ldots, n$ *dengan* $c_m = \delta_0 = 0$. *Oleh karena itu, sudut terbesar dari* $\chi_A(x)$ *adalah* $maks_{r=0,\ldots,n-1} \frac{\delta_{n-r}}{n-r}$ *atau ekuivalen dengan* $maks_{k=1,\ldots,n} \frac{\delta_k}{k}$.

Contoh 3.1. Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Akan dicari sudut terbesar dari $\chi_A(x)$.

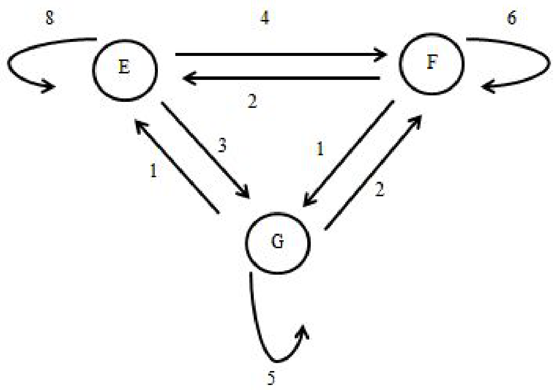
Berdasarkan matriks A, diperoleh polinomial karakteristik dari matriks A sesuai dengan Definisi 2.1 adalah $\chi_A(x) = x^3 \oplus 8 \otimes x^2 \oplus 14 \otimes x \oplus 19$. Sehingga didapatkan $\delta_0 = 0, \delta_1 = 8, \delta_2 = 14, \delta_3 = 19$. Dari polinomial karakteristik tersebut, dicari sudut terbesar dari $\chi_A(x)$ dengan Definisi 3.2 yaitu

$$\begin{aligned} maks_{r=0,\ldots,n-1} \frac{\delta_{n-r}}{n-r} &= maks\{\frac{\delta_{3-0}}{3-0}, \frac{\delta_{3-1}}{3-1}, \frac{\delta_{3-2}}{3-2}\} \\ &= maks\{\frac{19}{3}, \frac{14}{2}, \frac{8}{1}\} \\ &= maks\{\frac{19}{3}, 7, 8\} \\ &= 8. \end{aligned}$$

Didapatkan sudut terbesar dari $\chi_A(x)$ adalah 8.

Teorema 3.3. *Jika* $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ *maka sudut terbesar dari* $\chi_A(x)$ *adalah* $\lambda(A)$.

Contoh 3.2. Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Akan dicari besarnya nilai eigen dalam matriks. Berdasarkan matriks A, didapatkan graf berarah seperti gambar berikut.



Gambar 1. Graf berbobot berarah

Berdasarkan gambar 1 diperoleh *cycle* dasar seperti pada tabel 1.

Tabel 1. *Cycle* dasar dari gambar 1

Cycle	$l(\sigma)$	$w(\sigma, A)$	$\mu(\sigma, A)$
$E \to E$	1	8	8
$F \to F$	1	6	6
$G \to G$	1	5	5
$E \to F \to E$	2	6	3
$E \to G \to E$	2	4	2
$F \to G \to F$	2	3	$\frac{3}{2}$
$E \to F \to G \to E$	3	6	2
$E \to G \to F \to E$	3	7	$\frac{7}{3}$

Berdasarkan tabel, didapatkan $\lambda(A) = maks_\sigma \mu(\sigma, A) = maks\{8, 6, 5, 3, 2, \frac{3}{2}, 2, \frac{7}{3}\}$ $= 8$ yang berarti bahwa nilai eigen adalah 8. Pada Contoh 3.1, didapatkan sudut terbesar dari $\chi_A(x)$ adalah 8, sehingga dapat disimpulkan bahwa sudut terbesar dari $\chi_A(x)$ sama dengan nilai eigen. Hal ini terbukti dari Teorema 3.3, didapatkan sudut terbesar dari $\chi_A(x) = 8$.

4. POLINOMIAL KARAKTERISTIK DARI MATRIKS KHUSUS

4.1. Matriks Diagonal Dominan.

Definisi 4.1. *Matriks diagonal dominan adalah matriks bujur sangkar yang memenuhi* $|a_{ii}| > \sum_{j=1 j\neq i}^{n} |a_{ij}|$.

Teorema 4.2. *Jika $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ diagonal dominan, maka semua submatriks pokok dari A dan semua koefisien dari polinomial karakteristik maks-plus dapat ditemukan dengan rumus $\delta_k = a_{i_1i_1} + a_{i_2i_2} + \ldots + a_{i_ki_k}$, untuk $k = 1, \ldots, n$ dengan $a_{i_1i_1} > a_{i_2i_2} > \ldots > a_{i_ni_n}$.*

Contoh 4.1. Dari Teorema 4.2. Diberikan contoh suatu matriks diagonal dominan $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, dengan menggunakan Definisi 2.1 didapatkan

$$\chi_A(x) = maper \begin{pmatrix} 5 \oplus x & 0 & 0 \\ 2 & 4 \oplus x & 0 \\ 0 & 0 & 3 \oplus x \end{pmatrix}$$

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= (5 \oplus x) \otimes (4 \oplus x) \otimes (3 \oplus x) \oplus 0 \otimes 0 \otimes 0 \oplus 0 \otimes 2 \otimes 0 \oplus \\ &\quad 0 \otimes 2 \otimes (3 \oplus x) \oplus (5 \oplus x) \otimes 0 \otimes 0 \oplus 0 \otimes (4 \oplus x) \otimes 0 \\ &= x^3 \oplus 5 \otimes x^2 \oplus 9 \otimes x \oplus 12. \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 4.2 didapatkan polinomial karakteristik dari matriks diagonal dominan A sebagai berikut.

$$\delta_k = a_{i_1i_1} + a_{i_2i_2} + \ldots + a_{i_ki_k},$$

$\delta_0 = 0$, $\delta_1 = 5$, $\delta_2 = 5 + 4 = 9$, dan $\delta_3 = 5 + 4 + 3 = 12$. Sehingga berdasarkan Definisi 2.1, diperoleh polinomial karaketristik

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \Sigma^{\oplus}_{k=0,\ldots,n} \delta_{n-k} \otimes x^k \\ &= x^3 \oplus 5 \otimes x^2 \oplus 9 \otimes x \oplus 12. \end{aligned}$$

Jadi polinomial karakteristik dari matriks diagonal dominan A adalah

$$\chi_A(x) = x^3 \oplus 5 \otimes x^2 \oplus 9 \otimes x \oplus 12.$$

4.2. **Matriks Atas** $T = \{0, -\infty\}$**.**

Definisi 4.3. *Matriks atas* $T = \{0, -\infty\}$ *adalah matriks bujur sangkar dengan anggota matriks tersebut* $\{0, -\infty\}$*. Matriks* $A = (a_{ij}) \in T^{n \times n}$ *dengan* $\delta_k = 0$ *atau* $\delta_k = -\infty$*, untuk setiap* $k = 1, \ldots, n$*.*

Contoh 4.2. Diberikan contoh matriks atas $T = \{0, -\infty\}$, yaitu

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 0 \\ 0 & -\infty & -\infty \end{pmatrix},$$

dengan menggunakan Definisi 2.1 didapatkan polinomial karakteristik dari matriks T yaitu

$$\begin{aligned} \chi_T(x) &= (0 \oplus x) \otimes (-\infty \oplus x) \otimes (-\infty \oplus x) \oplus 0 \otimes 0 \otimes 0 \oplus -\infty \otimes -\infty \otimes -\infty \oplus \\ & \quad 0 \otimes -\infty \otimes (-\infty \oplus x) \oplus (0 \oplus x) \otimes 0 \otimes -\infty \oplus -\infty \otimes (-\infty \oplus x) \otimes 0 \\ &= x^3 \oplus x^2 \oplus x \oplus 0. \end{aligned}$$

Jadi, polinomial karakteristk dari matriks atas T adalah

$$\chi_T(x) = x^3 \oplus x^2 \oplus x \oplus 0.$$

5. KESIMPULAN

(1) Polinomial karakteristik maks-plus dari matriks A dapat diperoleh dengan $\chi_A(x)$ adalah
$x^n \oplus \delta_1 \otimes x^{n-1} \oplus \ldots \oplus \delta_{n-1} \otimes x \oplus \delta_n$ atau $\Sigma^{\oplus}_{k=0,\ldots,n} \delta_{n-k} \otimes x^k$, dengan $\delta_0 = 0$.

(2) Sudut terbesar (*the greatest corner*) dari $\chi_A(x)$ dapat dicari dengan rumus $maks_{r=0,\ldots,n-1} \frac{\delta_{n-r}}{n-r}$ atau ekuivalen dengan $maks_{k=1,\ldots,n} \frac{\delta_k}{k}$. Adanya kesamaan nilai sudut terbesar dari polinomial karakteristik maks-plus dengan nilai eigen.

(3) Terdapat dua matriks khusus dalam aljabar maks-plus, yaitu sebagai berikut.
   (a) Matriks Diagonal Dominan
   Menurut Teorema 4.2 matriks diagonal dominan adalah matriks bujur sangkar dengan $a_{i_1 i_1} \geqslant a_{i_2 i_2} \geqslant \ldots \geqslant a_{i_n i_n}$.

Misalkan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}. \end{pmatrix}$

Untuk mencari koefisien dari polinomial karakteristik matriks tersebut adalah $\delta_k = a_{i_1i_1} + a_{i_2i_2} + \ldots + a_{i_ki_k}$, untuk $k = 1, \ldots, n$, dengan $a_{i_1i_1} \geqslant a_{i_2i_2} \geqslant \ldots \geqslant a_{i_ni_n}$. Sehingga dihasilkan polinomial karakteristik dengan menggunakan Definisi 2.1 dan sesuai Teorema 4.2 didapatkan

$$\chi_A(x) = \Sigma^{\oplus}_{k=0,\ldots,n} \delta_{n-k} \otimes x^k,$$

dengan $\delta_0 = 0$.

(b) Matriks Atas $T = \{0, -\infty\}$

Matriks atas $T = \{0, -\infty\}$ adalah matriks bujur sangkar dengan anggota matriks tersebut $\{0, -\infty\}$. Matriks $A = (a_{ij}) \in T^{n \times n}$ dengan $\delta_k = 0$ atau $\delta_k = -\infty$, untuk setiap $k = 1, \ldots, n$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H., *Aljabar Linear Elementer*, Edisi Kelima, terjemahan, Erlangga, Jakarta, 1997.

[2] Baccelli, F., G. Cohen, G. J. Olsder, and P. Quadrat, *Synchronization and Linearity*, John Wiley and Sons, New York, 2001.

[3] Butkovic, P., *Max-Linear Systems: Theory and Algorithms*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag London Ltd., London, 2010.

[4] Butkovic, P. and L. Murfitt, *Calculating Essential Terms of a Characteristic Maxpolinomial.* Central European Journal of Operations Research. 8 (2000), no. 3, pp. 237-247.

[5] Cuninghame-Green, R. A., *The Characteristic Maxpolynomial of a Matrix.* Mathematical Analysis and Application 95 (1983), pp. 110-116.

[6] Farlow, Kasie G., *Max-Plus Algebra*, Master's thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, 2009.

[7] Jafari, H. and M. Hosseinyazdi, *Characteristic Max-Polynomial of a Triangular and Certain Strictly Double R-astic Matrices.* Applied Science and Technology 8 (2012), no.1, pp. 47-56.

[8] Schutter, B. D., *Max-Algebraic System Theory for Discrete Event Systems, Ph. D. thesis*, Katholieke Universiteit Leuven, Department Electrotechniek, 1996.