

# SIMULASI PADA MASALAH KEBANGKRUTAN PENJUDI

Dwi Ardian Syah, Respatiwulan, dan Vika Yugi Kurniawan  
Program Studi Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Sebelas Maret

**ABSTRAK.** Perubahan nilai modal dari waktu ke waktu pada masalah kebangkrutan penjudi merupakan proses stokastik. Pada masalah kebangkrutan penjudi diberikan asumsi batasan pemain sebanyak 2 penjudi dan permainan ditinjau dari salah satu penjudi yaitu penjudi A. Dimulai dengan modal awal sebanyak  $k$  dan modal total sebanyak  $N$ , penjudi dapat menang atau kalah pada permainan selanjutnya dengan nilai probabilitas  $p$  dan  $q$ . Probabilitas penjudi memperoleh atau kehilangan seluruh modal disebut probabilitas absorpsi, dan nilai harapan dari banyaknya permainan sampai penjudi menang total atau bangkrut disebut ekspektasi banyaknya permainan. Tujuan penelitian ini adalah menyimulasikan masalah kebangkrutan penjudi dengan berbagai macam kondisi probabilitas serta modal awal. Dari simulasi tersebut didapatkan hasil berupa menang total atau kebangkrutan penjudi A serta ekspektasi banyaknya permainan yang dilakukan dipengaruhi oleh nilai  $p$  dan  $q$ , serta  $k$  yang diberikan.

**Kata kunci:** kebangkrutan penjudi, perubahan keadaan modal, ekspektasi banyaknya permainan, simulasi

## 1. PENDAHULUAN

Menurut Afrilya [1], awal mulanya perjudian berwujud permainan atau kesibukan pengisi waktu senggang untuk menghibur hati, dimana sifatnya rekreatif dan netral. Pada sifat yang netral ini, lambat laun ditambahkan unsur baru untuk merangsang kegairahan bermain, dan menaikkan ketegangan serta pengharapan untuk menang. Perjudian dimulai dengan nilai modal awal lalu dipertaruhkan dengan hasil menang atau kalah. Apabila penjudi menang maka penjudi mendapatkan sejumlah nilai yang dipertaruhkan, sebaliknya apabila penjudi kalah maka penjudi membayar sejumlah nilai yang dipertaruhkan (Siegrist [6]).

Allen [2] membahas terkait masalah kebangkrutan penjudi, yaitu tentang modal penjudi yang seluruh modalnya dapat diperoleh ataupun hilang, probabilitas transisi yang terjadi pada setiap permainan, probabilitas absorpsi hingga ekspektasi banyaknya permainan yang dilakukan dengan menggunakan persamaan *difference*. Isaac [5] melakukan simulasi perjudian dengan persamaan *difference* untuk mencari probabilitas absorpsi dari perjudian. El-Shehawey [3] mengembangkan masalah kebangkrutan penjudi pada rantai Markov berhingga dengan probabilitas menang atau kalah bergantung pada nilai modal awal yang dimiliki penjudi.

Pada masalah kebangkrutan penjudi diberikan asumsi batasan pemain hanya 2 penjudi yaitu penjudi A dan penjudi B, serta probabilitas absorpsi serta ekspektasi banyaknya permainan hanya ditinjau dari salah satu pemain yaitu penjudi A.

Ditentukan probabilitas  $p$  dan  $q$ , modal awal sebanyak  $k$ , modal total sebanyak  $N$  dan nilai taruhan untuk bermain sebanyak 1. Selanjutnya disimulasikan perubahan modal penjudi menggunakan algoritme dalam *software* R dengan menentukan berbagai macam kondisi probabilitas bermain serta modal awal penjudi. Dari simulasi tersebut didapatkan hasil berupa menang total atau kebangkrutan penjudi A serta ekspektasi banyaknya permainan yang akan dilakukan.

## 2. PROSES STOKASTIK DAN RANTAI MARKOV WAKTU DISKRIT

Menurut Allen [2], proses stokastik adalah kumpulan variabel random  $\{X_n(s) : n \in T, s \in S\}$ , untuk  $n$  menyatakan waktu, dengan  $T$  adalah himpunan indeks dan  $S$  adalah ruang sampel dari variabel *random*.

Berikut diberikan definisi mengenai rantai Markov waktu diskrit.

**Definisi 2.1.** Suatu proses stokastik dengan waktu diskrit  $\{X_n\}$  dikatakan memiliki sifat Markov jika  $P\{X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\} = P\{X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}\}$ . Proses ini disebut rantai Markov, atau lebih spesifik lagi disebut rantai Markov waktu diskrit.

## 3. PROBABILITAS TRANSISI

Pada masalah kebangkrutan penjudi, modal penjudi dapat berubah sewaktu-waktu. Perubahan tersebut dikaitkan pada suatu proses *random* yang dinyatakan dalam bentuk probabilitas sebagai probabilitas transisi untuk menentukan perubahan modal penjudi berikutnya. Menurut Allen [2], apabila proses berada pada *state*  $i$  pada waktu ke- $n$ , maka pada waktu ke- $n + 1$  proses tersebut tetap pada *state*  $i$  atau bergerak ke *state*  $j$  lainnya. Probabilitas dari perubahan *state* tersebut didefinisikan oleh probabilitas transisi satu langkah (*one step transition probability*).

**Definisi 3.1.** Probabilitas transisi satu langkah dinyatakan sebagai  $p_{ji}$ , yang dituliskan  $p_{ji} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$ , dengan  $i, j \in S$  untuk  $i, j = \{1, 2, \dots\}$ .

Berdasarkan Definisi 3.1 dapat dibentuk persamaan berikut.

$$p_{ji} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \begin{cases} p, & \text{untuk } j = i + 1, \\ q, & \text{untuk } j = i - 1, \\ 0, & \text{untuk } j \neq i + 1, i - 1, \end{cases}$$

untuk  $i = \{1, 2, \dots, N - 1\}$  dengan ruang *state* adalah  $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ .

## 4. MASALAH KEBANGKRUTAN PENJUDI

Pada masalah kebangkrutan penjudi, penggunaan persamaan *difference* untuk menentukan probabilitas absorpsi ( $a_k$  dan  $b_k$ ) serta ekspektasi banyaknya

permainan ( $\tau_k$ ) yang dibentuk dari hubungan probabilitas kebangkrutan penjudi mengalami kenaikan atau penurunan modal.

Probabilitas penjudi memperoleh atau kehilangan seluruh modal disebut probabilitas absorpsi. Berikut persamaan probabilitas absorpsi  $a_k$  pada interval  $k \in [0, N]$  dalam bentuk persamaan *difference*.

$$a_k = pa_{k+1} + qa_{k-1}, \text{ untuk } 1 \leq k \leq N - 1. \quad (4.1)$$

Penjudi dapat menang atau kalah dalam setiap permainan dengan nilai probabilitas  $p$  atau  $q$ . Jika penjudi menang, modal awal  $k$  berubah menjadi  $k + 1$  dan probabilitas absorpsi menjadi  $a_{k+1}$ . Sebaliknya jika penjudi kalah, modal awal  $k$  berubah menjadi  $k - 1$  dan probabilitas absorpsi menjadi  $a_{k-1}$ .

Persamaan (4.1) adalah persamaan *difference* orde kedua dalam  $a_k$ , selanjutnya dibentuk dalam persamaan homogen dan ditransformasikan dalam bentuk persamaan karakteristik yang digunakan untuk menentukan solusi umum dari persamaan *difference* (Boccio [4]). Setelah itu menurut Allen [2], solusi umum  $a_k$  diberikan kondisi batas dan diperoleh solusi khusus untuk  $a_k$  dan  $b_k$ .

$$a_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}, \quad (4.2)$$

$$b_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}, \quad (4.3)$$

dengan  $a_k + b_k = 1$ .

Nilai harapan dari banyaknya permainan sampai penjudi menang total atau bangkrut disebut ekspektasi banyaknya permainan. Berdasarkan persamaan (4.1), bentuk persamaan *difference*  $\tau_k$  adalah

$$\tau_k = p(1 + \tau_{k+1}) + q(1 + \tau_{k-1}), \text{ untuk } k = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (4.4)$$

Penjudi dapat menang atau kalah dalam setiap permainan dengan nilai probabilitas  $p$  atau  $q$ . Jika penjudi menang, modal awal  $k$  berubah menjadi  $k + 1$  dan bermain sebanyak  $1 + \tau_{k+1}$  kali. Sebaliknya jika penjudi kalah, modal awal  $k$  berubah menjadi  $k - 1$  dan bermain sebanyak  $1 + \tau_{k-1}$  kali.

Berdasarkan persamaan (4.4), dapat dibentuk solusi khusus persamaan *difference* nonhomogen untuk  $\tau_k$  sebagai berikut

$$\tau_k = \frac{1}{q - p} \left[ k - N \left( \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \right) \right]. \quad (4.5)$$

## 5. ALGORITME PERMAINAN

Berdasarkan konsep masalah kebangkrutan penjudi dapat dibentuk algoritme untuk menyimulasikan masalah kebangkrutan penjudi sebagai berikut.

- (1) Menentukan asumsi dan parameter yang diperlukan untuk menyimulasikan permainan pada masalah kebangkrutan penjudi.
  - (a) Menentukan pemain sebanyak 2 penjudi, permainan ditinjau dari salah satu pemain yaitu penjudi A.
  - (b) Menentukan modal awal penjudi A yaitu sebanyak  $k$  serta modal total dari kedua penjudi yaitu sebanyak  $N$ , modal  $k$  dianggap bernilai sama dan berbeda untuk kedua penjudi.
  - (c) Menentukan taruhan untuk bermain yaitu sebanyak 1.
  - (d) Menentukan nilai probabilitas untuk menang yaitu  $p$  dan probabilitas kalah yaitu  $q$ .
  - (e) Menentukan probabilitas absorpsi serta ekspektasi banyaknya permainan dengan menerapkan algoritme persamaan *difference*.
- (2) Menerapkan algoritme permainan pada masalah kebangkrutan penjudi.
- (3) Menginterpretasikan hasil simulasi masalah yang diperoleh.
  - (a) Memperoleh hasil tiap permainan yang dilakukan yaitu menang total atau bangkrut.
  - (b) Memperoleh ekspektasi banyaknya permainan yang dilakukan.

## 6. SIMULASI PERMAINAN

Pada bagian ini dilakukan simulasi permainan pada masalah kebangkrutan penjudi. Analisis hasil simulasi permainan ditinjau dari nilai ketiga modal awal yang saling berbeda yaitu  $k = 50$ ,  $k = 40$  dan  $k = 60$ .

- (1) Ditentukan masing-masing permainan dengan modal total  $N = 100$ , nilai  $p = q = 0.5$  dan nilai taruhan untuk bermain yaitu sebanyak 1. Berikut hasil probabilitas absorpsi serta ekspektasi banyaknya permainan ditinjau dari persamaan (4.2) dan (4.3) beserta persamaan (4.5).

Tabel 1. Hasil  $a_k$  dan  $b_k$  serta  $\tau_k$  apabila  $p = 0.5$

Nilai $p$	Modal Awal	$a_k$	$b_k$	$\tau_k$
0.5	$k = 50$	0.5	0.5	2500
0.5	$k = 40$	0.6	0.4	2400
0.5	$k = 60$	0.4	0.6	2400

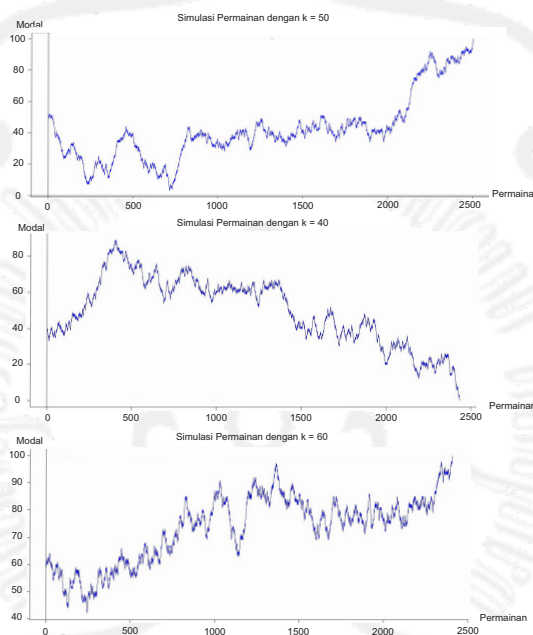
Didapatkan kesimpulan dari Tabel 1. yaitu

- (a) Jika  $k = 50$  maka penjudi A mengalami kekalahan hingga bangkrut sebesar 0.5 dari seluruh permainan yang dilakukan, jika  $k = 40$  maka

penjudi A mengalami kekalahan hingga bangkrut sebesar 0.6 dari seluruh permainan yang dilakukan dan jika  $k = 60$  maka penjudi A mengalami kekalahan hingga bangkrut sebesar 0.4 dari seluruh permainan yang dilakukan.

- (b) Jika  $p = 0.5$  dan  $k = 50$ , maka ekspektasi banyaknya permainan penjudi A sebanyak 2500 kali. Namun jika  $k = 40$  dan  $k = 60$  maka ekspektasi banyaknya permainan penjudi A sebanyak 2400 kali.

Berikut plot banyaknya modal yang diperoleh serta ekspektasi banyaknya permainan pada  $k = 50$ ,  $k = 40$  dan  $k = 60$  dengan  $p = 0.5$  menggunakan *software R*.



Gambar 1. Plot banyaknya modal yang diperoleh serta ekspektasi banyaknya permainan pada  $k = 50$ ,  $k = 40$  dan  $k = 60$  dengan  $p = 0.5$

Didapatkan kesimpulan dari Gambar 1. yaitu

- (a) Jika  $k = 50$  maka penjudi A mengalami menang total. Namun jika  $k = 40$  maka penjudi A mengalami kebangkrutan dan jika  $k = 60$  maka penjudi A mengalami menang total.
- (b) Jika  $k = 50$ , maka ekspektasi banyaknya permainan penjudi A sebanyak 2500 kali. Namun jika  $k = 40$  maka ekspektasi banyaknya permainan penjudi A sebanyak 2435 kali dan jika  $k = 60$  maka ekspektasi banyaknya permainan penjudi A sebanyak 2405 kali.
- (2) Ditentukan masing-masing permainan dengan modal total  $N = 100$ , nilai  $p = 0.4$ , nilai  $q = 0.6$  dan nilai taruhan untuk bermain yaitu sebanyak 1. Berikut hasil probabilitas absorpsi serta ekspektasi banyaknya permainan ditinjau dari persamaan (4.2) dan (4.3) beserta persamaan (4.5).

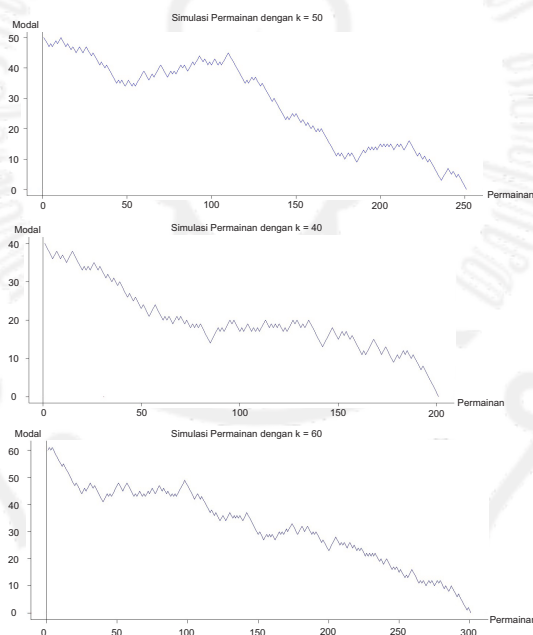
Tabel 2. Hasil  $a_k$  dan  $b_k$  serta  $\tau_k$  apabila  $p = 0.4$

Nilai $p$	Modal Awal	$a_k$	$b_k$	$\tau_k$
0.4	$k = 50$	1	$1.56e - 09$	250
0.4	$k = 40$	1	$2.71e - 11$	200
0.4	$k = 60$	0.999	$9.04e - 08$	300

Didapatkan kesimpulan dari Tabel 2. yaitu

- Jika  $p = 0.4$  maka penjudi A mengalami kekalahan hingga bangkrut sebesar 1 dari seluruh permainan yang dilakukan, pada tiga keadaan modal awal yang berbeda.
- Jika  $p = 0.4$  untuk  $k = 50$ , maka ekspektasi banyaknya permainan penjudi A sebanyak 250 kali. Namun jika  $k = 40$  maka ekspektasi banyaknya permainan penjudi A sebanyak 200 kali dan jika  $k = 60$  maka ekspektasi banyaknya permainan penjudi A sebanyak 300 kali.

Berikut plot banyaknya modal yang diperoleh serta ekspektasi banyaknya permainan pada  $k = 50, k = 40$  dan  $k = 60$  dengan  $p = 0.4$  menggunakan *software R*.



Gambar 2. Plot banyaknya modal yang diperoleh serta ekspektasi banyaknya permainan pada  $k = 50, k = 40$  dan  $k = 60$  dengan  $p = 0.4$

Didapatkan kesimpulan dari Gambar 2. yaitu

- Penjudi A mengalami kebangkrutan pada  $k = 50, k = 40$  dan  $k = 60$ .
- Jika  $k = 50$ , maka ekspektasi banyaknya permainan penjudi A sebanyak 250 kali. Namun jika  $k = 40$  maka ekspektasi banyaknya permainan penjudi A sebanyak 200 kali dan jika  $k = 60$  maka ekspektasi banyaknya permainan penjudi A sebanyak 300 kali.



- (3) Ditentukan masing-masing permainan dengan modal total  $N = 100$ , nilai  $p = 0.6$ , nilai  $q = 0.4$  dan nilai taruhan untuk bermain yaitu sebanyak 1. Berikut hasil probabilitas absorpsi serta ekspektasi banyaknya permainan ditinjau dari persamaan (4.2) dan (4.3) beserta persamaan (4.5).

Tabel 3. Hasil  $a_k$  dan  $b_k$  beserta  $\tau_k$  apabila  $p = 0.6$ 

Nilai $p$	Modal Awal	$a_k$	$b_k$	$\tau_k$
0.6	$k = 50$	$1.56e - 09$	1	250
0.6	$k = 40$	$2.71e - 11$	1	300
0.6	$k = 60$	$9.04e - 08$	0.999	200

Didapatkan kesimpulan dari Tabel 3. yaitu

- (a) Jika  $p = 0.6$  maka penjudi A mengalami kemenangan hingga menang total sebesar 1 dari seluruh permainan yang dilakukan, pada tiga keadaan modal awal yang berbeda.
- (b) Jika  $p = 0.4$  untuk  $k = 50$ , maka ekspektasi banyaknya permainan penjudi A sebanyak 250 kali. Namun jika  $k = 40$  maka ekspektasi banyaknya permainan penjudi A sebanyak 300 kali dan jika  $k = 60$  maka ekspektasi banyaknya permainan penjudi A sebanyak 200 kali.

Berikut plot banyaknya modal yang diperoleh serta ekspektasi banyaknya permainan pada  $k = 50$ ,  $k = 40$  dan  $k = 60$  dengan  $p = 0.6$  menggunakan *software* R.



Gambar 3. Plot banyaknya modal yang diperoleh serta ekspektasi banyaknya permainan pada  $k = 50$ ,  $k = 40$  dan  $k = 60$  dengan  $p = 0.6$

Didapatkan kesimpulan dari Gambar 3. yaitu

- (a) Penjudi A mengalami menang total pada  $k = 50$ ,  $k = 40$  dan  $k = 60$ .
- (b) Jika  $k = 50$ , maka ekspektasi banyaknya permainan penjudi A sebanyak 250 kali. Namun jika  $k = 40$  maka ekspektasi banyaknya permainan penjudi A sebanyak 300 kali dan jika  $k = 60$  maka ekspektasi banyaknya permainan penjudi A sebanyak 200 kali.

Dapat disimpulkan probabilitas absorpsi yang menyatakan menang total atau kebangkrutan penjudi A serta ekspektasi banyaknya permainan yang dilakukan dipengaruhi oleh nilai  $p$  dan  $q$ , serta  $k$  yang diberikan.

## 7. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

- (1) Untuk menyimulasikan masalah kebangkrutan penjudi dengan menentukan jumlah modal serta ekspektasi banyaknya permainan yang ditinjau dari salah satu penjudi yaitu penjudi A, ditentukan probabilitas  $p$  dan  $q$ , modal awal sebanyak  $k$ , modal total sebanyak  $N$ , serta nilai taruhan untuk bermain yaitu 1. Simulasi dilakukan menggunakan *software* R.
- (2) Probabilitas absorpsi yang menyatakan menang total atau kebangkrutan penjudi A serta ekspektasi banyaknya permainan yang dilakukan penjudi dipengaruhi oleh nilai  $p$  dan  $q$ , serta  $k$  yang diberikan.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Afrilya, A. M., *Dasar Pertimbangan Jaksa Penuntut Umum Dalam Menentukan Berita Ringannya Tuntutan Pidana Terdakwa Kasus Perjudian : Studi Di Kejaksaan Negeri Kediri*, E-Library Universitas Brawijaya, Malang, 2009.
- [2] Allen, L. J. S., *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology*, Prentice Hall, Upper Saddla River, N. J., 2003.
- [3] El-Shehawey, M.A., *On the Gamblers Ruin Problem for a Finite Markov Chain*, *Statistics and Probability Letters* 79 (2009), 1590-1595.
- [4] <http://www.johnboccio.com/research/quantum/notes/ruin.pdf>, *Gambler's Ruin Problem*, Diakses pada Selasa, 4 Juni 2017 pukul 22.00.
- [5] Isaac, R., *Bold Play Is Best : A Simple Proof*, *Mathematics Magazine* Vol. 72, No. 5 (Dec., 1999), pp. 405- 407.
- [6] Siegrist, K., *How To Gamble If You Must*, *AMC* 10 (2008): 12.