POISSON PROSES NON-HOMOGEN

Abdurrahman Valid Fuady, Hasih Pratiwi, dan Supriyadi Wibowo
Program Studi Matematika FMIPA UNS

ABSTRAK. Proses Poisson merupakan proses stokastik sederhana dan dapat digunakan untuk menganalisis kedatangan atau kejadian suatu peristiwa. Berdasarkan intensitasnya, proses Poisson dibagi menjadi dua yaitu homogen dan non-homogen. Proses Poisson dikatakan homogen jika intensitasnya konstan dan dinotasikan dengan λ. Proses Poisson dikatakan non-homogen jika intensitasnya merupakan fungsi terhadap waktu dan dinotasikan dengan $\lambda(t)$. Dalam tulisan ini dijelaskan tentang proses Poisson non-homogen dan penerapannya pada kedatangan bus di terminal Tirtonadi. Dalam penelitian ini didapatkan bahwa rata-rata kedatangan bus di terminal Tirtonadi setiap hari dapat dimodelkan dengan $m(t) = \int_0^t \lambda(t)\, dt.$ Dari empat jalur yang dianalisis didapatkan bahwa jalur 1 yaitu jalur menuju Jakarta, Yogyakarta, Magelang, Purwokerto, lintas dari Surabaya, Bandung, dan Lintas Sumatera merupakan jalur terpadat yaitu dengan 108 bus yang datang setiap harinya.
Kata Kunci : *proses Poisson, proses Poisson non-homogen, intensitas, fungsi nilai rata-rata..*

1. PENDAHULUAN

Proses Poisson merupakan suatu kejadian khusus dari proses menghitung (*counting process*) dimana selang-selang waktu antar kejadian saling bebas dan semuanya berdistribusi eksponensial. Proses Poisson ini terbagi dalam dua tipe yaitu proses Poisson homogen dan proses Poisson non homogen. Jika distibusi-distribusi eksponensial itu mempunyai parameter yang sama maka dinamakan proses Poisson homogen. Jika tidak maka dinamakan proses Poisson non homogen.

Proses Poisson-non homogen merupakan proses Poisson dengan laju yang tergantung pada waktu. Secara spesifik dapat didefinisikan bahwa peluang tidak ada kejadian atau kedatangan pada kondisi awal adalah 1 dan peluang *n* kejadian atau kedatangan pada kondisi awal adalah 0. Proses ini mempunyai *independent increment* (kenaikan bebas) dan waktu antar kejadian saling bebas. Hal yang membedakan antara proses Poisson homogen dan proses Poisson non-homogen adalah fungsi dari waktu. Pada penerapannya, proses Poisson non homogen bisa digunakan untuk menyelesaikan suatu persoalan yang sering terjadi di kehidupan sehari-hari diantaranya adalah kedatangan nasabah pada suatu bank, pada kejadian gempa, dan pada kedatangan bus di terminal. Pada tugas akhir ini akan diterapkan proses Poisson non homogen pada kedatangan bus di terminal Tirtonadi.

2. PROSES MENGHITUNG

Proses stokastik $\{ N(t); t \geq 0 \}$ dikatakan sebagai proses menghitung jika $N(t)$ atau N_t menyatakan banyaknya kejadian yang terjadi selama waktu t. Proses menghitung $\{ N(t); t \geq 0 \}$ memenuhi sifat

a) $N(t) \geq 0$,
b) $N(t)$ adalah bilangan bulat,
c) jika $s < t$, maka $N(s) \leq N(t)$,
d) untuk $s < t, N(s) - N(t)$ menyatakan banyaknya kejadian yang terjadi pada interval waktu $(s, t]$.

Proses Menghitung disebut proses dengan kenaikan bebas (*independent increments*) jika banyaknya kejadian yang terjadi pada interval waktu terpisah saling bebas. Proses menghitung disebut proses dengan kenaikan stasioner (*stationary increments*) jika distribusi dari banyaknya kejadian yang terjadi pada interval waktu tertentu hanya tergantung pada panjang interval.

3. PROSES POISSON

Proses Poisson adalah proses stokastik sederhana dan banyak digunakan untuk pemodelan waktu dimana kedatangan memasuki sebuah sistem. Suatu proses menghitung $\{ N(t); t \geq 0 \}$ dikatakan sebagai proses Poisson dengan laju (parameter) λ jika

a) $N(0) = 0$,
b) Proses mempunyai kenaikan bebas (*independent increments*),
c) Peluang mempunyai *k* kejadian dalam interval waktu *t*.

$$P_k(t) = P\big(N(t+s) - N(s) = k\big) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0,1,\ldots$$

$\forall s, t \geq 0$.

4. PROSES POISSON NON-HOMOGEN

Proses Poisson ditandai dengan tingkat kedatangan λ konstan. Sering digunakan untuk mempertimbangkan jenis proses yang lebih umum dimana tingkat kedatangan bervariasi sebagai fungsi waktu. Proses Poisson non-homogen dengan variasi waktu kedatangan $\lambda(t)$ bervariasi didefinisikan sebagai proses menghitung $\{N(t); t > 0\}$ yang memiliki sifat kenaikan saling bebas. Suatu proses menghitung $\{ N(t); t \geq 0 \}$ dikatakan sebagai proses Poisson non-homohen dengan fungsi intensitas $\lambda(t)$ jika

a) $N(0) = 0$,
b) Proses mempunyai kenaikan bebas (*independent increments*),
c) $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$,
d) $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$.

dengan $N(t, t + \delta) = N(t + \delta) - \mathrm{N(t)}$. Proses Poisson non-homogen tidak memiliki sifat kenaikan stasioner. Misalkan interval waktu dibagi menjadi beberapa bagian dengan panjang δ dan jika probabilitas kedatangan pada kenaikan setiap beberapa nilai tetap $p = \delta\lambda(t)$, $\delta > 0$, maka m(t) didefinisikan sebagai

$$m(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau.$$

dengan $m(t)$ merupakan *mean value function* dari proses Poisson non-homogen. Untuk setiap $0 \leq s < t, N(t) - N(S)$ merupakan proses Poisson dengan mean

$$m(t) - m(s) = \int_s^t \lambda(x)\, dx$$

dan untuk $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ dan untuk $k_1, k_2, \ldots, k_m \geq 0$,

$$P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_2 \ldots N(t_m) = k_m\}$$

$$= P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1 \ldots N(t_m)$$
$$= k_m \ldots N(t_m) - N(t_{m-1}) = k_m - k_{m-1}\}$$

$$= \frac{e^{-m(t_1)}\left(m(t_1)\right)^{k_1}}{k_1} \; \frac{e^{-m(t_2)-m(t_1)}((m(t_2) - m(t_1))^{k_2-k_1}}{(k_2-k_1)!}$$

$$\ldots \frac{e^{-(m(t_m)-m(t_{m-1}))}\left(m(t_m) - m(t_{m-1})\right)^{k_m-k_{m-1}}}{k_m - k_{m-1}!}$$

dengan *k* merupakan bilangan hasil.

5. HASIL DAN PEMBAHASAN

5.1 Fungsi Nilai Rata-Rata

Proses *Poisson* non homogen dapat diterapkan pada kedatangan bus di terminal Tirtonadi Surakarta. Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder. Populasi pada penelitian ini adalah banyaknya bus yang datang di terminal Tirtonadi Surakarta.

5.1.1 Fungsi nilai rata-rata jalur 1

Berdasarkan data yang diperoleh diketahui rata-rata banyaknya kedatangan bus di jalur 1 setiap jam dapat dikelompokkan menjadi

a. banyak bus yang datang per jam rata-rata berjumlah 15 bus pada jam 07.00-12.00 (saat $0 \leq t < 5$),
b. banyak bus yang datang per jam rata-rata berjumlah 9 bus pada jam 12.00-15.00 (saat $5 \leq t < 8$),
c. banyak bus yang datang per jam rata-rata berjumlah 3 bus pada jam 12.00-15.00 (saat $8 \leq t < 10$).

Sehingga dapat dituliskan intensitas kedatangan bus pada jalur 1 adalah sebagai berikut

$$\lambda(t) = \begin{cases} 15, \text{untuk } 0 \leq t < 5 \\ 9, \text{untuk } 5 \leq t < 8 \\ 3, \text{untuk } 8 \leq t < 10 \end{cases}$$

dengan $m(t) = \int_0^t \lambda(t)\, dt$, maka

$$m(t) = \int_0^5 15\, dt + \int_5^8 9\, dt + \int_8^{10} 3\, dt$$
$$= 75 + 27 + 26 = 108.$$

Jadi dapat diketahui bahwa rata-rata kedatangan bus pada jalur satu adalah sebanyak 108 bus per hari. Dapat diketahui bahwa kedatangan bus jalur 1 adalah sebanyak 107 sedangkan hasil perhitungan fungsi nilai rata-rata adalah sebanyak 108 bus karena nilai tersebut tidak berbeda secara signifikan maka dapat disimpulkan bahwa *m*(*t*) dapat digunakan untuk menentukan jumlah kedatangan pada jalur 1.

5.1.2 Fungsi nilai rata-rata jalur 2

Berdasarkan data yang diperoleh diketahui rata-rata banyaknya kedatangan bus di jalur 2 setiap jam dapat dikelompokkan menjadi

a. banyak bus yang datang per jam rata-rata berjumlah 6 bus pada jam 07.00-12.00 (saat $0 \leq \mathrm{t} < 5$),
b. banyak bus yang datang per jam rata-rata berjumlah 3 bus pada jam 12.00-15.00 (saat $5 \leq \mathrm{t} < 8$),
c. banyak bus yang datang per jam rata-rata berjumlah 3 bus pada jam 12.00-15.00 (saat $8 \leq \mathrm{t} < 10$).

Sehingga dapat dituliskan intensitas kedatangan bus pada jalur 1 adalah sebagai berikut

$$\lambda(t) = \begin{cases} 6, \text{untuk } 0 \leq \mathrm{t} < 5 \\ 3, \text{untuk } 5 \leq \mathrm{t} < 8 \\ 2, \text{untuk } 8 \leq \mathrm{t} < 10 \end{cases}$$

dengan $m(t) = \int_0^t \lambda(t)\, dt$, maka

$$m(t) = \int_0^5 6\, dt + \int_5^8 3\, dt + \int_8^{10} 2\, dt$$
$$= 30 + 9 + 4 = 43.$$

Jadi dapat diketahui bahwa rata-rata kedatangan bus pada jalur 2 adalah sebanyak 43 bus per hari. Dapat diketahui bahwa kedatangan bus jalur 2 adalah sebanyak 31 sedangkan hasil perhitungan fungsi nilai rata-rata adalah sebanyak 43 bus karena nilai tersebut tidak berbeda secara signifikan maka dapat disimpulkan bahwa $m(t)$ dapat digunakan untuk menentukan jumlah kedatangan pada jalur 2.

5.1.3 Fungsi nilai rata-rata jalur 3

Berdasarkan data yang diperoleh diketahui rata-rata banyaknya kedatangan bus di jalur 3 setiap jam dapat dikelompokkan menjadi

a. banyak bus yang datang per jam rata-rata berjumlah 3 bus pada jam 07.00-09.00 (saat $0 \leq \mathrm{t} < 2$),
b. banyak bus yang datang per jam rata-rata berjumlah 3 bus pada jam 09.00-17.00 (saat $2 \leq \mathrm{t} < 10$),

Sehingga dapat dituliskan intensitas kedatangan bus pada jalur 3 adalah sebagai berikut

$$\lambda(t) = \begin{cases} 3, \text{untuk } 0 \leq \mathrm{t} < 2 \\ 2, \text{untuk } 2 \leq \mathrm{t} < 10 \end{cases}$$

dengan $m(t) = \int_0^t \lambda(t)\, dt$, maka

$$m(t) = \int_0^2 3\,dt + \int_2^{10} 2\ dt$$
$$= 16 + 6 = 22.$$

Jadi dapat diketahui bahwa rata-rata kedatangan bus pada jalur 3 adalah sebanyak 22 bus per hari. Dapat diketahui bahwa kedatangan bus jalur 3 adalah sebanyak 19 sedangkan hasil perhitungan fungsi nilai rata-rata adalah sebanyak 22 bus karena nilai tersebut tidak berbeda secara signifikan maka dapat disimpulkan bahwa *m*(*t*) dapat digunakan untuk menentukan jumlah kedatangan pada jalur 3.

5.1.4 Fungsi nilai rata-rata jalur empat

Berdasarkan data yang diperoleh diketahui rata-rata banyaknya kedatangan bus di jalur 4 setiap jam dapat dikelompokkan menjadi

a. banyak bus yang datang per jam rata-rata berjumlah 9 bus pada jam 07.00-10.00 (saat $0 \leq \mathrm{t} < 5$),
b. banyak bus yang datang per jam rata-rata berjumlah 6 bus pada jam 10.00-13.00 (saat $5 \leq \mathrm{t} < 8$),
c. banyak bus yang datang per jam rata-rata berjumlah 3 bus pada jam 13.00-17.00 (saat $8 \leq \mathrm{t} < 10$).

Sehingga dapat dituliskan intensitas kedatangan bus pada jalur 4 adalah sebagai berikut

$$\lambda(t) = \begin{cases} 9, \text{untuk } 0 \leq \mathrm{t} < 3 \\ 6, \text{untuk } 3 \leq \mathrm{t} < 6 \\ 4, \text{untuk } \ 6 \leq \mathrm{t} < 10 \end{cases}$$

dengan $m(t) = \int_0^t \lambda(t)\,dt$, maka

$$m(t) = \int_0^3 9\,dt + \int_3^6 6\,dt + \int_6^{10} 4\,dt$$
$$= 27 + 18 + 16 = 61$$

Jadi dapat diketahui bahwa rata-rata kedatangan bus pada jalur empat adalah sebanyak 61 bus per hari. Dapat diketahui bahwa kedatangan bus jalur 4 adalah sebanyak 59 dan 61 sedangkan hasil perhitungan fungsi nilai rata-rata adalah sebanyak 61 bus karena nilai tersebut tidak berbeda secara signifikan maka dapat disimpulkan bahwa *m*(*t*) dapat digunakan untuk menentukan jumlah kedatangan pada jalur 4.

6. KESIMPULAN

Berdasarkan urain pada diatas diperloeh kesimpulan sebagai berikut

1. Proses *Poisson* non homogen memiliki sifat kenaikan saling bebas tetapi tidak memiliki sifat stasioner
2. *Mean Value Function* atau Fungsi Nilai Rata-rata $m(t) = \int_0^t \lambda(t)\, dt$ dapat digunakan untuk menentukan banyaknya keadatangan bus di terminal Tirtonadi Surakarta.
3. Rata-rata jumlah kedatangan bus setiap hari pada jalur 1 adalah 108 bus, rata-rata banyaknya kedatangan bus setiap hari pada jalur 2 adalah 43 bus, rata-rata banyaknya kedatangan bus setiap hari pada jalur 3 adalah 22 bus, dan rata-rata banyaknya kedatangan bus setiap hari pada jalur 4 adalah 61bus.
4. Jalur paling sibuk di terminal Tirtonadi adalah jalur 1 dengan rata-rata kedatangan bus setiap harinya sebanyak 108 bus.

7. DAFTAR PUSTAKA

1. Aki K . *Maximum Lkelihood Estimate of b in the Formula logN=a-bM and its Confidence Limits.* Bull. Earthquake Res. Inst., Univ. Tokyo, 43, 237-239. 1965.
2. Bain, L.J. and M. Engelhardt. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics.* Duxbury Express, California, USA. B. 1992.
3. Chasanah, U. Madlazim, dan Tjipto P. *Analisis Tingkat Seismisitas dan Periode Ulang Gempa Bumi di Sumatera Barat pada Periode 1961-2010*. Jurnal Fisika, volume 2. 2013.
4. Kulkarni, V. G., *Modelling and Analysis of Stochastic System*, 1 ed., Chapman and