PROSES POISSON MAJEMUK

Chris Risen, Respatiwulan, Pangadi
Program Studi Matematika FMIPA UNS

Abstrak. Proses Poisson merupakan proses menghitung $\{N(t); t \geq 0\}$ yang digunakan untuk menentukan jumlah kejadian dalam selang waktu tertentu. Kedatangan pelanggan pada suatu kasir, kejadian gempa bumi pada suatu tempat tertentu, kejadian padamnya generator listrik merupakan beberapa contoh dari proses Poisson. Dalam artikel ini, proses Poisson digunakan untuk menentukan kedatangan dari setiap variabel acak independen dan berdistribusi identik. Jumlah dari variabel-variabel acak tersebut membentuk proses Poisson majemuk. Dalam artikel ini pula, dijelaskan sifat proses Poisson majemuk yaitu *stationary independent increments*, selain itu ditentukan ekspektasi, variansi, fungsi pembangkit momen, dan fungsi pembangkit probabilitas, serta penerapan dari proses Poisson majemuk pada suatu contoh kasus.

Kata Kunci: *proses menghitung, proses Poisson, proses Poisson majemuk.*

1. Pendahuluan

Menurut Olofsson [4], Proses menghitung $\{N(t); t \geq 0\}$ merupakan kumpulan variabel acak yang nilainya nonnegatif, bulat, dan tidak turun. Selanjutnya, menurut Tijms [6], proses Poisson merupakan suatu proses menghitung dengan tambahan asumsi-asumsi tertentu untuk menentukan jumlah kejadian dalam selang waktu tertentu. Asumsi-asumsi tambahan yang dimaksud seperti jumlah kejadian nol pada waktu t_0, intensitas jumlah kejadian tetap, terjadi satu kejadian tiap interval waktu, *stationary increments* dan *independen increments*. Kedatangan pelanggan pada suatu kasir, kejadian gempa bumi pada suatu tempat tertentu, kejadian padamnya generator listrik merupakan beberapa contoh dari proses Poisson.

Mingola [3] dalam penelitiannya telah menurunkan ulang, menjelaskan sifat-sifat, serta menerapkan proses Poisson dalam beberapa kasus. Kerusakan zat radioaktif, masalah pengumpulan kupon, perhitungan total pembelian pelanggan, dan kasus perambatan suara pada kawat merupakan kasus-kasus penerapan proses Poisson oleh Mingola [3]. Selain itu, dalam penelitian Petrov dan Alessandro [5], disimpulkan bahwa frekuensi terjadinya sambaran petir pada data yang mereka gunakan merupakan proses Poisson. Hal ini dibuktikan dari perbandingan probabilitas data prediksi terjadinya sambaran petir yang mendekati probabilitas data asli pada parameter yang sudah ditentukan.

Berbeda dari penelitian-penelitian sebelumnya, pada penelitian ini setiap kejadian pada proses Poisson diubah menjadi suatu variabel acak independen dan berdistribusi identik. Dari perbedaan tersebut, lebih lanjut diteliti proses Poisson majemuk yang merupakan jumlahan dari variabel-variabel acak tersebut yang kedatangannya ditentukan proses Poisson. Tujuan penelitian ini adalah menurunkan proses Poisson majemuk, menjelaskan sifat-sifatnya, serta menerapkannya pada suatu contoh kasus.

2. Proses Poisson

Menurut DeJardine [1] dan Zhang *et al.* [7], proses menghitung $\{N(t); t \geq 0\}$ dikatakan sebagai proses Poisson jika memenuhi asumsi-asumsi berikut.

(1) Pada waktu t_0, jumlah kejadian yang terjadi adalah nol juga $(N(t_0) = 0)$.
(2) intensitas jumlah kejadian λt tetap.
(3) Terjadi satu kejadian tiap interval waktu.
(4) *Stationary increments*, untuk $t_i \leq t_i + t$ dengan $i = 0, 1, 2, ...,$ jumlah kejadian $N(t_i + t) - N(t_i)$ memiliki distribusi yang sama dengan $N((t_i + t) - t_i) = N(t)$. Sehingga jumlah kejadian yang terjadi antara interval waktu $[t_i, t_i + t)$ hanya bergantung selama waktu t, sedangkan waktu awal t_i tidak berpengaruh.
(5) *independent increments*, jumlah kejadian yang terjadi antar interval waktu *disjoint* saling independen.

Misalkan $N(t)$ adalah variabel acak Poisson dengan parameter $\lambda t > 0$, sehingga didapat $P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, n = 0, 1, \ldots$. Selanjutnya, dapat ditentukan ekspektasi dan variansi dari variabel acak Poisson $N(t)$.

$$
\begin{aligned}
E[N(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t} \lambda t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-\lambda t} \lambda t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \\
&\quad , j = n - 1 \\
&= e^{-\lambda t} \lambda t e^{\lambda t} = \lambda t.
\end{aligned}
$$

Menggunakan cara yang sama, dapat ditentukan $E[N(t)^2] = (\lambda t)^2 + \lambda t$, sehingga didapat variansi dari $N(t)$ sebagai berikut.

$$
var[N(t)] = E[N(t)^2] - (E[N(t)])^2 = (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t.
$$

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. **Proses Poisson Majemuk.** Untuk menyusun proses Poisson majemuk membutuhkan tiga asumsi penting sebagai berikut.

(1) Variabel acak Y_k adalah variabel acak independen dan berdistribusi identik,
(2) Proses $\{N(t); t \geq 0\}$ adalah proses Poisson dengan parameter yang dinotasikan dengan λt,
(3) Variabel acak Y_k independen terhadap $N(t)$, untuk setiap $t \geq 0$.

Sesuai asumsi-asumsi diatas dapat disusun proses Poisson majemuk berparameter λt yang merupakan penjumlahan variabel acak Y_k yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, t \geq 0.$$

Jika dimisalkan $G^{(n)}$ merupakan fungsi massa probabilitas dari $Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ dengan $G^{(0)}(s) = 1$ dan $G^{(1)}(s) = P(Y_1 = s)$, maka $G^{(n)}(s) = P(\sum_{k=1}^{n} Y_k = s)$. Selanjutnya, bisa ditentukan fungsi massa probabilitas untuk $\{S(t); t \geq 0\}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} P(S(t) = s) &= P(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k = s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k = s \mid N(t) = n) P(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{n} Y_k = s) \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} G^{(n)}(s) \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}. \end{aligned}$$

3.2. **Sifat-Sifat Proses Poisson Majemuk.** Berikut merupakan teorema-teorema yang menunjukkan sifat-sifat dari proses Poisson majemuk.

Teorema 3.1. *Proses poisson majemuk $\{S(t); t \geq 0\}$ merupakan proses Lévy yaitu proses yang memiliki stationary independent increments.*

Bukti. Akan dibuktikan dengan kasus khusus dari sifat *stationary independent increments* untuk $k = 2$ (Sedangkan untuk k dibuktikan dengan cara yang sama). Dibuktikan bahwa $P(S(t_1) \leq s_1, S(t_2) - S(t_1) \leq s_2) = P(S(t_1) \leq s_1)P(S(t_2 - t_1) \leq s_2)$ untuk semua $s_1 > 0$ dan $s_2 > 0$ dan untuk setiap $0 < t_1 < t_2$. Akan digunakan definisi dari proses Poisson majemuk $S(t)$ untuk waktu t_1 dan t_2.

$$P(S(t_1) \leq s_1, S(t_2) - S(t_1) \leq s_2) = P(\sum_{k=1}^{N(t_1)} Y_k \leq s_1, \sum_{k=1}^{N(t_2)} Y_k - \sum_{k=1}^{N(t_1)} Y_k \leq s_2)$$

$$
\begin{aligned}
&= P(\sum_{k=1}^{N(t_1)} Y_k \leq s_1, \sum_{k=N(t_1)+1}^{N(t_2)} Y_k \leq s_2) \\
&\quad \text{[hukum probabilitas total]} \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{n_1} Y_k \leq s_1, \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} Y_k \leq s_2 | N(t_1) = n_1, N(t_2) - N(t_1) = n_2) \\
&\times P(N(t_1) = n_1, N(t_2) - N(t_1) = n_2) \\
&\quad \text{[independen dalam probabilitas bersyarat]} \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{n_1} Y_k \leq s_1, \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} Y_k \leq s_2) P(N(t_1) = n_1, N(t_2) - N(t_1) = n_2) \\
&\quad \text{[independen]} \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{n_1} Y_k \leq s_1) P(\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} Y_k \leq s_2) P(N(t_1) = n_1) \\
&\times P(N(t_2) - N(t_1) = n_2) \\
&\quad \text{[stasioner]} \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{n_1} Y_k \leq s_1) P(\sum_{k=1}^{n_2} Y_k \leq s_2) P(N(t_1) = n_1) \\
&\times P(N(t_2 - t_1) = n_2) \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{n_1} Y_k \leq s_1) P(N(t_1) = n_1) \sum_{n_2=0}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{n_2} Y_k \leq s_2) P(N(t_2 - t_1) = n_2) \\
&= P(\sum_{k=1}^{N(t_1)} Y_k \leq s_1) P(\sum_{k=1}^{N(t_2-t_1)} Y_k \leq s_2) \\
&= P(S(t_1) \leq s_1) P(S(t_2 - t_1) \leq s_2).
\end{aligned}
$$

□

Teorema 3.2. *Andaikan $N(t)$ merupakan variabel acak proses Poisson dan $\{Y_k | k \geq 1\}$ merupakan variabel acak independen dan berdistribusi identik dengan ekspektasi μ serta variansi σ^2. Jika $N(t)$ independen terhadap $\{Y_k | k \geq 1\}$ maka didapat $E[\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k] = \mu E[N(t)]$ dan $Var(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k) = \sigma^2 E[N(t)] + \mu^2 Var(N(t))$.*

Bukti. Andaikan $N(t)$ merupakan proses Poisson dan Y_k merupakan variabel acak independen dan berdistribusi identik dengan $k = 1, 2, ...$, sehingga

$$E[\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k] = E[E[\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k | N(t)]]$$

dengan

$$E[\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k|N(t)=n] = E[\sum_{k=1}^{n} Y_k|N(t)=n] = E[\sum_{k=1}^{n} Y_k] = nE[Y_k].$$

Hasilnya $E[\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k|N(t)=n] = N(t)E[Y_k]$,
sehingga didapat

$$E[\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k] = E[N(t)E[Y_k]] = E[N(t)]E[Y_k] = \mu E[N(t)].$$

Selanjutnya, dibuktikan untuk $Var(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k) = \sigma^2 E[N(t)] + \mu^2 Var(N(t))$.

$$Var(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k|N(t)=n) \;=\; Var(\sum_{k=1}^{n} Y_k|N(t)=n) = Var(\sum_{k=1}^{n} Y_k) = n\sigma^2.$$

Karena didapat $Var(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k|N(t)) = N(t)\sigma^2$ dan $E[\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k|N(t)] = N(t)\mu$ sehingga variansi dari proses Poisson majemuk dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} Var(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k) &= E[Var(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k|N(t))] + Var(E[\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k|N(t)]) \\ &= E[N(t)\sigma^2] + Var(N(t)\mu) \\ &= \sigma^2 E[N(t)] + \mu^2 Var(N(t)). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3. *Jika $M_S(t)$ merupakan fungsi pembangkit momen dari $S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$ maka $M_S(t) = e^{\lambda t(M_{Y_1}-1)}$, untuk setiap $t \in [0,\infty)$ dengan M_{Y_1} merupakan fungsi pembangkit momen variabel acak Y_k untuk $k = 0,1,...,n$.*

Bukti. Misalkan $N(t)$ merupakan proses Poisson dengan parameter λt, sehingga dapat dihitung fungsi pembangkit momen dari variabel acak proses Poisson majemuk $S(t)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E[e^{tS(t)}] = E[e^{t\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k}] = \sum_{n=1}^{\infty} E[e^{t\sum_{k=1}^{n} Y_k}]P(N(t)=n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E[e^{t\sum_{k=1}^{n} Y_k}]\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} E[e^{tY_1}]^n \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (M_{Y_1}(t))^n \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(M_{Y_1}(t)\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = e^{\lambda t(M_{Y_1}(t))}e^{-\lambda t} = e^{\lambda t(M_{Y_1}(t)-1)}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.4. *Andaikan $N(t)$ dengan $t \geq 0$ merupakan variabel acak yang berdistribusi Poisson dengan parameter $\lambda t > 0$ serta Y_k merupakan variabel acak independen dan berdistribusi logarithmic untuk $k = 0, 1, ..., n$. Didapat fungsi pembangkit probabilitas dari $S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$ sama dengan fungsi pembangkit probabilitas dari variabel acak yang berdistribusi $NB(r, p)$.*

Bukti. Dihitung fungsi pembangkit probabilitas $G_S(z)$ dari $S(t)$, yang merupakan kombinasi dari fungsi pembangkit probabilitas $N(t)$ dan Y_k (G_N dan G_{Y_k}). Digunakan $G_N(z) = e^{(\lambda t(z-1))}$ dengan $z \in C$ dan $G_{Y_1}(z) = \frac{\ln(1-pz)}{\ln(1-p)}$ dengan $|z| < \frac{1}{p}$.

$$\begin{aligned} G_S(z) &= E[z^S] = \sum_{s=1}^{\infty} P(S = s) z^s = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P(S = s \mid N = n) P(N = n) z^s \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \sum_{s=1}^{\infty} P(S = s \mid N = n) z^s \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \sum_{s=1}^{\infty} P(Y_1 + \ldots + Y_n = s) z^s \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) (G_{Y_1}(z))^n = G_N(G_{Y_1}(z)). \end{aligned}$$

Berdasarkan $G_N(z)$ dan $G_{Y_1}(z)$ yang diperoleh sebelumnya, didapat

$$\begin{aligned} G_S(z) &= G_N(G_{Y_1}(z)) = e^{(\lambda t(\frac{\ln(1-pz)}{\ln(1-p)} - 1))} = e^{(-r(\ln(1-pz) - \ln(1-p)))} \\ &= (\frac{\ln(1-p)}{\ln(1-pz)})^r, \qquad |z| < \tfrac{1}{p} \text{ dan } \lambda t = -r ln(1-p). \end{aligned}$$

Fungsi pembangkit probabilitas $G_S(z)$ sama dengan fungsi pembangkit probabilitas dari variabel acak yang berdistribusi *negative binomial.* □

3.3. **Contoh Kasus.** Pada contoh kasus dari Ma [2] ditentukan fungsi massa probabilitas $P[S(t) = s]$ untuk $s = 0, 1, 2, 3, 4$ dengan $S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$ merupakan penjumlahan klaim dari proses Poisson majemuk. Terdapat sejumlah klaim yang dibayarkan oleh suatu perusahaan asuransi pada periode waktu tertentu yang mengikuti distribusi Poisson dengan parameter λt. Klaim dapat bernilai 1 dengan probabilitas 0.6 atau 2 dengan probabilitas 0.4.

Berikut merupakan fungsi massa probabilitas dari $N(t)$, $P(N(t) = n) = \frac{\lambda t^n e^{(-\lambda t)}}{n!}$ dengan $n = 0, 1, 2, \ldots$. Setiap jumlah klaim Y_k memiliki distribusi Bernoulli, dengan Y_k merupakan variabel acak diskrit yang memiliki dua nilai. Dianggap sukses saat $Y_k = 2$ dengan probabilitas $p = 0.4$ dan gagal saat $Y_k = 1$ dengan probabilitas $1 - p = 0.6$. Akibatnya, $P(Y_k = y)$ merupakan fungsi massa probabilitas dari distribusi Binomial dengan parameter y dan p. Berikut ditunjukkan $P(Y_k = y)$ untuk m percobaan, dengan $m = 1, 2, 3, 4$.

Untuk $m = 1$

$P(Y_k = 1) = C_0^1(0.4)^0(0.6)^1 = 0.6$ $\quad P(Y_k = 2) = C_1^1(0.4)^1(0.6)^0 = 0.4$

Untuk $m = 2$

$P(Y_k = 2) = C_0^2(0.4)^0(0.6)^2 = 0.36$ $\quad P(Y_k = 4) = C_2^2(0.4)^2(0.6)^0 = 0.16$

$P(Y_k = 3) = C_1^2(0.4)^1(0.6)^1 = 0.48$

Untuk $m = 3$

$P(Y_k = 3) = C_0^3(0.4)^0(0.6)^3 = 0.216$ $\quad P(Y_k = 5) = C_2^3(0.4)^2(0.6)^1 = 0.288$

$P(Y_k = 4) = C_1^3(0.4)^1(0.6)^2 = 0.432$ $\quad P(Y_k = 6) = C_3^3(0.4)^3(0.6)^0 = 0.064$

Untuk $m = 4$

$P(Y_k = 4) = C_0^4(0.4)^0(0.6)^4 = 0.1296$ $\quad P(Y_k = 7) = C_3^4(0.4)^3(0.6)^1 = 0.1536$

$P(Y_k = 5) = C_1^4(0.4)^1(0.6)^3 = 0.3456$ $\quad P(Y_k = 8) = C_4^4(0.4)^4(0.6)^0 = 0.0256$

$P(Y_k = 6) = C_2^4(0.4)^2(0.6)^2 = 0.3456$

Ditentukan fungsi massa probabilitas $P[S(t) = s]$ berdasar matriks berikut. Baris untuk klaim $Y_k = 0, 1, 2, 3, 4$ dan kolom untuk m percobaan, dengan $m = 0, 1, 2, 3, 4$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.48 & 0.216 & 0 \\ 0 & 0 & 0.16 & 0.432 & 0.1296 \end{pmatrix}$$

Setiap kolom dikalikan dengan fungsi massa probabilitas $P(N(t) = n)$ dengan $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Selanjutnya, kolom-kolom dari setiap baris tersebut dijumlahkan untuk mendapatkan fungsi massa probabilitas $P[S(t) = s]$, dengan $s = 0, 1, 2, 3, 4$.

$P(S(t) = 0) = e^{-\lambda t}$, $P(S(t) = 1) = 0.6\lambda t e^{-\lambda t}$, $P(S(t) = 2) = 0.4\lambda t e^{-\lambda t} + 0.36\frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2}$

$P(S(t) = 3) = 0.48\frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2} + 0.216\frac{(\lambda t)^3 e^{-\lambda t}}{6}$,

$P(S(t) = 4) = 0.16\frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2} + 0.432\frac{(\lambda t)^3 e^{-\lambda t}}{6} + 0.1296\frac{(\lambda t^4) e^{-\lambda t}}{24}$.

Dalam kasus ini $P(S(t) = s)$ merupakan probabilitas jumlah klaim yang harus dibayarkan oleh suatu perusahaan asuransi sebesar s dengan rincian probabilitas seperti diatas.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

(1) Proses Poisson majemuk dengan perameter λt merupakan penjumlahan variabel acak independen dan berdistribusi identik Y_k yang didefinisikan sebagai berikut.

$$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, t \geq 0,$$

dengan $N(t)$ mengikuti distribusi Poisson dengan parameter λt.

(2) (a) Proses Poisson majemuk merupakan proses yang memiliki *stationary independent increments*.

(b) Ekspektasi dan variansi proses Poisson majemuk secara berurutan yaitu $\mu E[N(t)]$ dan $\sigma^2 E[N(t)] + \mu^2 Var(N(t))$.

(c) Fungsi pembangkit momen proses Poisson majemuk yaitu $M_S(t) = e^{\lambda t(M_{Y_1}-1)}$.

(d) Fungsi pembangkit probabilitas proses Poisson majemuk sama dengan fungsi pembangkit probabilitas variabel acak yang berdisrtibusi binomial negatif.

Pustaka

[1] DeJardine, Z.V.C.,*Poisson Processes and Applications in Hockey*, lakehead University, Canada, 2013.

[2] Ma, D., [*Compound Poisson Distribution-Discrete Example*], 2010.

[3] Mingola, P., *A Study of Poisson and Related Processes with Applications*, University of Tennessee, Knoxville, 2013.

[4] Olofsson, P., *Counting Process*, Trinity University, Sweden.

[5] Petrov, N.I., D'Alessandro F., *Verification of lightning strike incidence as a Poisson process*, Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics, **Vol.64**(2002), 1645-1650.

[6] Tijms, H.C., *A First Course in Stochastic Models*, John Wiley Sons Ltd., Chichester, 2003.

[7] Zhang, H., Liu, Y., Li,B., *Notes on discrete compound Poisson model with applications to risk theory*, Insurance Mathematics and Econimics, **Vol.59**(2014), 325-336.