

PENENTUAN JADWAL PRODUKSI DI YAYASAN KIAM LEMAH MANAH SMART EDUCATION MENGGUNAKAN ALJABAR MAKS-PLUS

Kholis Fuad Ahmad, Siswanto, dan Supriyadi Wibowo

Program Studi Matematika FMIPA UNS

ABSTRAK. Sistem produksi merupakan contoh dari sistem kejadian diskrit (SKD). Karakteristik dari masalah SKD adalah dinamika berjalan yaitu proses operasi produksi hanya dapat dimulai apabila proses sebelumnya telah selesai. Untuk meningkatkan kegiatan produksi maka dicari kinerja operasi yang sesuai agar mendapatkan penjadwalan yang baik. Untuk menentukan jadwal dari suatu sistem produksi diperlukan data lama waktu operasi yang menghasilkan persamaan nonlinier. Untuk menyelesaikan persamaan nonlinier ini dapat digunakan aljabar maks-plus. Aljabar maks-plus (R_{maks}) adalah himpunan $\mathbb{R}_{maks} = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ yang dilengkapi dengan operasi \oplus dan \otimes yang dinotasikan sebagai $\mathcal{R}_{max} = (\mathbb{R}_{max}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$ dengan $\varepsilon = -\infty$ dan $e = 0$. Sistem produksi pupuk di Yayasan Lembah Manah menggunakan aljabar maks-plus. Dengan menerapkan model tersebut diperoleh periode sistem untuk memulai fase selanjutnya yaitu (dalam satuan jam) dan waktu yang baik untuk memulai produksi pada masing-masing sistem produksi (dalam satuan jam) yaitu 0, 60, 65, 66 234 dan 239.

Kata kunci : penjadwalan, sistem produksi, aljabar maks-plus.

1. PENDAHULUAN

Dunia industri di Indonesia saat ini berkembang pesat selaras dengan berkembangnya sektor usaha. Sektor usaha yang banyak mengalami kemajuan adalah usaha pengelolaan sampah untuk dijadikan pupuk, mulai dari usaha kecil yang dimiliki perseorangan menggunakan cara konvensional atau sampai perusahaan besar yang menggunakan teknologi mesin sehingga mampu memproduksi dalam skala besar. Permintaan konsumen akan kebutuhan pupuk yang semakin banyak berakibat produsen dituntut untuk meningkatkan kinerja, kinerja dalam hal ini adalah meningkatkan proses produksi agar permintaan dapat terpenuhi.

Untuk mencapai tujuan tersebut produsen harus melakukan berbagai usaha untuk meningkatkan kinerja operasi, salah satunya adalah peningkatan kemampuan produksi barang atau jasa yang dapat memenuhi permintaan konsumen secara efektif dan efisien sehingga sebelum dilakukan proses produksi, perlu diadakan penyusunan

perencanaan, pengawasan, dan penjadwalan dengan baik agar proses produksi berjalan dengan tepat.

Proses produksi membentuk suatu sistem yang kompleks, sistem ini termasuk dalam Sistem Kejadian Diskrit (SKD). Sistem Kejadian Diskrit merupakan klasifikasi dari masalah suatu sistem buatan manusia dengan sumber daya dan pengguna yang terbatas untuk mencapai tujuan bersama (Subiono [11]). Kejadian pada SKD berkaitan dengan awal atau akhir dari suatu aktivitas, dimana kejadian tersebut terjadi dalam waktu diskrit. Karakteristik masalah SKD adalah dinamika berjalan yang berarti bahwa operasi dapat dimulai apabila proses sebelumnya telah diselesaikan. Pada umumnya permasalahan SKD berbentuk persamaan nonlinier sehingga tidak mudah untuk diselesaikan. Oleh karena itu, untuk menyelesaikan permasalahan SKD digunakan aljabar maks-plus dengan mengubah persamaan nonlinier menjadi persamaan linier.

Aljabar maks-plus adalah himpunan \mathbb{R}_{max} dilengkapi dengan operasi maksimum (maks) yang dinotasikan \oplus dan jumlah (plus) yang dinotasikan \otimes (Heidergott [5]). Sedangkan aljabar konvensional adalah himpunan bilangan real \mathbb{R} dilengkapi dengan operasi hitung penjumlahan (+) dan pergandaan (\times). Pada tahun 1996, Schutter [9] meneliti tentang penerapan aljabar maks-plus pada sistem produksi sederhana yang dapat dikembangkan menjadi 5 tipe sistem produksi yaitu sistem produksi tipe *serial*, *assembly*, *splitting*, *parallel*, dan *flexible* dengan aktivitas barisan tertentu.

Terkait dengan penelitian ini akan dilakukan penerapan aljabar maks-plus pada proses produksi untuk tiap-tiap unit pemroses pada sistem produksi pengolahan sampah menjadi pupuk di Yayasan Kiat Lembah Manah Smart Education yang berada di Mayang RT 03 RW 04, Mayang, Gatak, Sukoharjo. Pupuk menjadi komoditas penting untuk memenuhi kebutuhan dibidang pertanian, maka industri seperti ini perlu diperhatikan dalam upaya untuk meningkatkan produksi dan mencari penjadwalan proses produksi yang efisien. Proses produksi pada pengolahan sampah menjadi pupuk di Yayasan Kiat Manah Smart Education setiap unit pemroses tidak ada unit penampung. Berdasarkan pengamatan, dapat diterapkan sistem produksi sederhana karena tidak ada unit penampung dalam proses produksi, seperti yang dijelaskan oleh Schutter [9] pada sistem produksi pengolahan sampah

menjadi pupuk di Yayasan Kiat Lembah Manah Smart Education. Selanjutnya akan digunakan aljabar maks-plus untuk mencari penjadwalan produksi secara efisien.

2. ALJABAR MAKS-PLUS

Menurut Heidergott [5], aljabar maks-plus atau R_{max} adalah himpunan $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ yang dilengkapi dengan operasi \oplus dan \otimes yang dinotasikan sebagai

$$R_{max} = (\mathbb{R}_{max}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$$

dengan $\varepsilon = -\infty$ dan $e = 0$. Operasi dasar dari aljabar maks-plus adalah maksimum yang dinotasikan \oplus dan penjumlahan yang dinotasikan \otimes sehingga

$$a \oplus b = \max(a, b) \text{ dan } a \otimes b = a + b$$

untuk semua $a, b \in \mathbb{R}_{max}$.

3. MATRIKS DALAM ALJABAR MAKS-PLUS

Himpunan matriks berukuran $n \times m$ untuk $n, m \in \mathbb{N}^*$ dalam \mathbb{R}_{max} dinotasikan sebagai $\mathbb{R}_{max}^{n \times m}$, \mathbb{N}^* adalah himpunan bilangan asli dalam aljabar maks-plus. Matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times m}$ dapat ditulis

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Untuk matriks $A, B \in \mathbb{R}_{max}^{n \times m}$, penjumlahan matriks $A \oplus B$ didefinisikan sebagai

$$[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij}).$$

Untuk matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times p}$ dan $B \in \mathbb{R}_{max}^{p \times m}$, perkalian matriks $A \otimes B$ didefinisikan sebagai

$$[A \otimes B]_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p a_{ik} \otimes b_{kj} = \max_{k \in \{1, 2, \dots, p\}} (a_{ik} + b_{kj})$$

Untuk matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times m}$ dan skalar $\alpha \in \mathbb{R}_{max}$, perkalian skalar dengan matriks $\alpha \otimes A$ didefinisikan sebagai

$$[\alpha \times A]_{ij} = \alpha \otimes a_{ij}.$$

4. NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Subiono[11] juga menjelaskan suatu algoritme untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ dilakukan secara berulang dari bentuk persamaan linear

$$x(k+1) = A \otimes x(k), k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

1. Mulai dari sembarang nilai awal $x(0) \neq (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)^T$,
2. Iterasi persamaan (4.1) hingga terdapat bilangan bulat p dan q dengan $p > q \geq 0$ serta bilangan real c sehingga terjadi suatu perilaku periodik atau memenuhi $x(p) = c \otimes x(q)$,
3. Hitung nilai eigen $\lambda = \frac{c}{p-q}$,
4. Hitung vektor eigen

$$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1))$$

5. METODE PENELITIAN

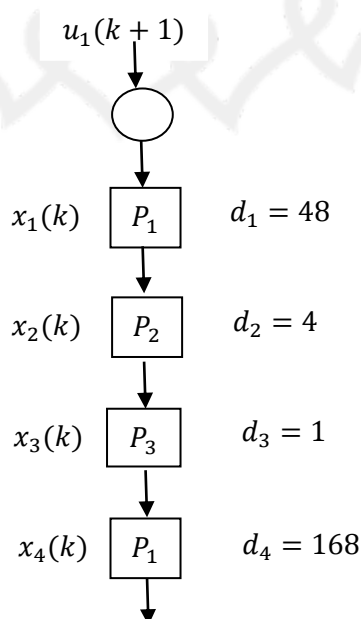
Dalam penelitian ini diterapkan aljabar maks-plus pada penentuan jadwal sistem produksi pupuk di Yayasan Kiat Lembah Manah Smart Education. Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah melakukan pengamatan serta pengambilan data yang berupa alur dan waktu pemrosesan tiap-tiap mesin produksi pupuk. Kemudian menyusun bagan sistem produksi pupuk, setelah itu menyusun persamaan sistem produksi pupuk dalam bentuk $x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k+1)$ dan $y(k) = C \otimes x(k)$. Lalu menentukan matriks \bar{A} , dengan $\bar{A} = A \oplus B \otimes C$. Berikutnya menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks \bar{A} . Langkah yang terakhir adalah menyusun jadwal sistem produksi pupuk dengan nilai eigen digunakan untuk menentukan periode waktu sistem produksi agar berjalan secara periodik, sedangkan waktu awal yang baik untuk mengawali sistem dapat diketahui dengan menentukan vektor eigen.

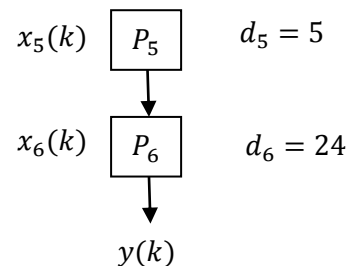
6. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sistem pengelolaan sampah di Kiat Lembah Manah Smart Education terdiri dari 6 mesin pemroses yang disusun seperti pada Gambar 1. Misalkan unit-unit pemroses dinotasikan $P_1, P_2, P_3, \dots, P_6$. Waktu proses yang dibutuhkan untuk setiap unit pemroses dinotasikan d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 , dan d_6 masing-masing adalah 48, 4, 1, 168, 5, dan 24 dalam satuan jam. Didefinisikan sistem produksi pengelolaan sampah sebagai berikut.

1. $u(k + 1)$ adalah waktu saat beras ketan dan bahan baku lainnya dipersiapkan.
 2. $x_i(k)$ adalah waktu saat pemroses ke- i mulai bekerja untuk proses ke- k ,
 3. $y(k)$ adalah waktu saat produk meninggalkan sistem untuk proses ke- k ,
- untuk semua $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ dan $k \in N^*$.

Selanjutnya, waktu saat $P_1, P_2, P_3, \dots, P_6$ mulai bekerja untuk proses ke- $(k + 1)$ sebagai berikut. Ditentukan waktu saat P_1 mulai bekerja untuk proses ke- $(k + 1)$. Jika bahan baku sampah organik sudah masuk ke sistem untuk proses ke- $(k + 1)$, maka bahan baku sampah organik ini sebagai input P_1 pada waktu $u_1(k + 1)$. Akan tetapi P_1 hanya dapat mulai bekerja untuk proses pemasukan bahan apabila P_1 telah menyelesaikan proses sebelumnya, yaitu proses ke- k . Karena waktu proses yang dibutuhkan untuk P_1 adalah 48 satuan dalam jam sehingga waktu proses P_1 akan selesai pada saat $x_1(k) + 48$





Gambar 1. Sistem produksi pupuk

Waktu saat P_2, P_3, \dots, P_6 mulai bekerja untuke proses ke- $(k + 1)$ serta waktu saat produk meninggalkan sistem untuk proses ke- k mempunyai langkah sama pada P_1 .

Dari sistem persamaan tersebut diperoleh bentuk persamaan umum sistem produksi pupuk yang dinyatakan sebagai

$$x(k + 1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k + 1)$$

$$y_k = C \otimes x(k)$$

Diasumsikan jika waktu saat bahan utama masuk ke sistem sama dengan waktu saat produk meninggalkan sistem atau dapat dituliskan sebagai berikut $u(k + 1) = y(k)$, maka persamaan dapat dinyatakan sebagai $x(k + 1) = \bar{A} \otimes x(k)$, dengan $\bar{A} = A \oplus B \otimes C$.

Berikutnya ditentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks \bar{A} dengan menggunakan *scilab* 5.4.1. Diperoleh $p = 2, q = 1, c = 263$. Jadi nilai eigen dari matriks \bar{A} dinyatakan sebagai

$$\lambda = \frac{c}{p - q} = \frac{263}{2 - 1} = 263$$

dan vektor eigen dari matriks \bar{A} dinyatakan sebagai

$$v = (48 \ 108 \ 113 \ 114 \ 282 \ 287)$$

Dengan memilih $\alpha = -48$, diperoleh vektor eigen $v' = (0 \ 60 \ 65 \ 66 \ 234 \ 239)$, unit pemroses $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots, P_6$ masing-masing bekerja

untuk proses pertama pada jam ke-0, 60, 54, 66, 234, dan 239 satuan dalam jam. Untuk proses selanjutnya, yakni $k = 2, 3, \dots$ setiap unit pemroses bekerja secara periodik dengan periodenya adalah 263 satuan dalam jam.

5.1 Jadwal Sistem Produksi Pupuk. Berikut ini diberikan jadwal untuk sistem produksi pupuk di Yayasan Kiat Lembah Manah Smart Education. Jadwal sistem produksi agar berjalan secara periodik, ditentukan periode dan waktu awal yang baik untuk mengawali sistem, yaitu dengan menentukan nilai eigen dan vektor eigen. Dari sistem produksi pupuk diperoleh nilai eigen dan vektor eigen sebagai berikut.

$$\lambda = 263 \text{ dan } \mathbf{v}' = (0 \ 60 \ 65 \ 66 \ 234 \ 239)^T$$

Tabel 1. dibawah ini menunjukkan keadaan saat waktu awal yang terbaik untuk memulai masing-masing proses P_1, P_2, P_3 , hingga P_6 aktif bekerja.

Setelah diterapkan jadwal periodik sistem produksi seperti ditunjukkan jadwal produksi pada Tabel 1, sistem produksi pupuk di Yayasan Kiat Lembah Manah Smart Education menjadi lebih efektif dan diperoleh waktu awal yang baik untuk mengawali sistem produksi sehingga produksi berjalan secara teratur atau periodik serta memenuhi batas waktu yang ditetapkan.

Fase ke- (dalam satuan jam)				
Proses	1	2	3	4
p_1	0	263	526	789
p_2	60	323	586	849
p_3	65	328	591	854
p_4	66	329	592	855
p_5	234	497	760	1023
p_6	239	502	765	1028

Tabel 1. Jadwal produksi saat waktu awal sistem aktif

7. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan yang telah dilakukan, telah terusun jadwal periodik sistem produksi pupuk di Kiat Lembah Manah Smart Education seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.1. Waktu mulai mesin bekerja pada unit pemoreses $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ pada fase ke-1 yaitu pada jam ke 0, 60, 65, 66, 234, 239. Untuk fase selanjutnya dapat dimulai dengan periode 263. Jadwal sistem produksi pupuk di Kiat Lembah Manah Smart Education tersebut diperoleh berdasarkan persamaan $x(k+1) = \bar{A} \otimes x(k)$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bacelli, F., G. Cohen, G. J. Olsder, and J. P. Quadrat, *Synchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Event Systems*, John Wiley and Sons, New York, 1992
- [2] Braker, J. G. And G. J. Olsder, *The power algorithm in max algebra*, Linear Algebra and its Application (1993), no.182, 67-89.
- [3] Chartrand, G., *Introductory Graph Theory*, Dover Publications, Inc, New York, 1977.
- [4] Farlow, Kasie G., *Maks-Plus Algebra*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, April 2009.
- [5] Heidergott, B., *Max-Plus Algebra and Queues*, EURANDOM research fellow, Department of Econometrics and Operation Research, Vrije Universiteit, The Netherlands, 2006.
- [6] Lopes, G. A. D., B. Kersbergen, B. D. Schutter, T. V. D. Boom, and R. Babuska, *Synchronization of a class of cyclic discrete-event systems describing legged locomotion*, Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications. (2015), 1-37.
- [7] Maharani, A. E. S. H., *Aplikasi Aljabar Maks-Plus pada Sistem Produksi dengan Switching, Tipe Serial, Tipe Assembly, Tipe Splitting, Tipe Parallel, dan*

- Flexible dengan Aktivitas Barisan Tertentu*, Tugas Akhir S1 Matematika Fakultas MIPA UNS, 2015.
- [8] Retchkiman, K.Z., *A Generalized Eigenmode Algorithm for Reducible Regular Matrices Over the Max-Plus Algebra*, International Mathematical Forum (2009), no.24, 11571171.
- [9] Schutter, B. D., *Max-Algebraic System Theory for Discrete Event System*, Katholieke Universiteit Leuven, Departement Elektrotecniek, Belgium, 1996.
- [10] Schutter, B. D., and T. van den Boom, *Max-Plus Algebra and Max-Plus Linear Discrete Event System: An Introduction*, Proceedings of The 9th International Workshop on DiscreteEvent Systems (WODES'08)(2008), 36-42.
- [11] Subiono, *Aljabar Maks-Plus dan Terapannya*, 3.0.0 ed., Institut Teknologi Sepuluh Nopember, 2015.
- [12] Tam, Kin Po. (2010). *Optimizing and Approximating Eigenvectors In Max-Algebra*, The University of Birmingham, Birmingham.