KREDIBILITAS DENGAN PENDEKATAN BÜHLMANN

oleh

KRISTINA NATALIA

NIM M0102029

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan

memperoleh gelar Sarjana Sains Matematika

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS SEBELAS MARET SURAKARTA

2007

ABSTRAK

Kristina Natalia, 2007. <u>KREDIBILITAS DENGAN PENDEKATAN BÜHLMANN</u>. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Sebelas Maret.

Teori kredibilitas adalah proses pembuatan tarif premi oleh aktuaris untuk melakukan penyesuaian premi di masa depan menurut pengalaman masa lampau. Pada teori kredibilitas terdapat tiga pendekatan untuk menentukan perkiraan kredibilitas $C = Z\,\overline{X} + (1-Z)\,\mu$, dengan Z adalah faktor kredibilitas, $\overline{X}$ adalah rata-rata dari pengamatan yang terpilih, dan μ adalah rata-rata awal. Salah satu pendekatan yang dapat digunakan untuk menentukan perkiraan kredibilitas yaitu pendekatan kredibilitas keakuratan terbesar dengan menggunakan model Bühlmann. Bühlmann mendefinisikan faktor kredibilitas Z sebagai $Z = \dfrac{n}{n+K}$, dengan $0 \le Z \le 1$, n menyatakan banyak pengamatan dan K disebut parameter kredibilitas Bühlmann.

Tujuan dalam penulisan skripsi ini adalah menentukan perkiraan kredibilitas C dengan menggunakan model Bühlmann dan mengestimasi parameter-parameter dari kredibilitas Bühlmann. Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi adalah studi literatur.

Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa dalam menentukan perkiraan kredibilitas menggunakan kredibilitas Bühlmann, melibatkan penerapan analisis dari variansi, yaitu menghitung nilai harapan dari variansi proses dan variansi dari rata-rata yang diduga. Parameter-parameter kredibilitas Bühlmann diestimasi berdasarkan data empiris yang diamati. Penduga tidak bias untuk nilai harapan dari variansi proses yaitu $\hat{v} = \left(\dfrac{1}{r}\right)\sum_{i=1}^{r}\hat{\sigma}_i^2 = \left(\dfrac{1}{r(n-1)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{t=1}^{n}(x_{it}-\overline{x}_i)^2\right)$ dan penduga tidak bias untuk variansi dari rata-rata yang diduga yaitu $\hat{a} = \left(\dfrac{1}{r-1}\right)\sum_{i=1}^{r}(\overline{x}_i-\overline{x})^2 - \dfrac{\left\{\left(\dfrac{1}{r(n-1)}\right)\sum_{i=1}^{r}\sum_{t=1}^{n}(x_{it}-\overline{x}_i)^2\right\}}{n}$. Penduga dari parameter kredibilitas Bühlmann yaitu $\hat{K} = \dfrac{\hat{v}}{\hat{a}}$. Sehingga faktor kredibilitas dapat diestimasi sebagai berikut $\hat{Z} = \dfrac{n}{n+\hat{K}}$, dan penduga dari perkiraan kredibilitas adalah $\hat{C} = \hat{Z}\,\overline{x}_i + (1-\hat{Z})\,\hat{\mu}$, $i = 1,2,\ldots,r$.

ABSTRACT

Kristina Natalia, 2007.CREDIBILTY WITH BÜHLMANN APPROACH. Faculty of Mathematics and Natural Sciences. Sebelas Maret University.

Credibility theory is a rate making process which allows actuary to adjust the future premiums according to the past experience. In credibility theory, there are three approaches to determine estimate credibility $C = Z\,\overline{X} + (1-Z)\,\mu$, where Z is credibility factor, $\overline{X}$ is the mean of the current observations, and μ is the prior mean. One of the approach to determine estimate credibility is greatest accuracy credibility approach by using Bühlmann model. Bühlmann defined credibility factor Z as $Z = \dfrac{n}{n+K}$, $0 \le Z \le 1$, n is the number of trial and K is Bühlmann credibility parameter.

The aims of this final project are to determine estimate credibility C using Bühlmann model and to estimate parameters of Bühlmann credibility. The method used in this final project is a literary study.

Based on the result, it can be concluded that to determine estimate credibility using Bühlmann credibility, involves application analysis of variance, calculation of the expected value of the process variance and calculation of the variance of the hypothetical means. Parameters of Bühlmann credibility were estimated based on empirical observation. Unbiased estimator for expected value of process variance is $\hat{v} = \left(\dfrac{1}{r}\right)\sum_{i=1}^{r}\hat{\sigma}_i^2 = \left(\dfrac{1}{r(n-1)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{t=1}^{n}(x_{it}-\overline{x}_i)^2\right)$ and unbiased estimator for variance of the hypothetical means is $\hat{a} = \left(\dfrac{1}{r-1}\right)\sum_{i=1}^{r}(\overline{x}_i-\overline{x})^2 - \dfrac{\left\{\left(\dfrac{1}{r(n-1)}\right)\sum_{i=1}^{r}\sum_{t=1}^{n}(x_{it}-\overline{x}_i)^2\right\}}{n}$. Estimation for Bühlmann credibility parameter is $\hat{K} = \dfrac{\hat{v}}{\hat{a}}$. Therefore estimator of credibility factor is $\hat{Z} = \dfrac{n}{n+\hat{K}}$, and estimator of estimate credibility is $\hat{C} = \hat{Z}\,\overline{x}_i + (1-\hat{Z})\,\hat{\mu}$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

MOTO

Perjalanan beribu-ribu mil dimulai dengan satu langkah kecil
(Lao-Tzu)

Kegagalan bukan berarti Tuhan sudah meninggalkanmu tetapi Dia mempunyai rencana yang lebih baik
(Dr. Robert Schuller)

Waspadalah terhadap sikap putus asa terhadap diri sendiri, kamu diperintahkan untuk menaruh kepercayaanmu pada Tuhan, bukan pada dirimu sendiri
(St. Agustinus)

Ku takkan menyerah walau apapun juga...
sebab hatiku percaya... Tuhan punya rencana (Wawan)

PERSEMBAHAN

- Pniel "Penasihat Ajaib" yang terhebat, Jesus Kristus terimakasih telah membuat hatiku menjadi baru
- Kedua orangtua tercinta, terimakasih atas cinta kalian yang selalu menjaga diriku
- my lovely sisters&brothers (b'Andri, k'Betty, k'Joko, k'Lena, Theres, Nuel, Aci) yang telah sabar mendukung dan menantikan satu impianku tercapai
- Indra"chay"Cahyanto, thanks... 4 kesetiaannya menemani hari2ku... 4 kesabarannya yang tak terkira... agape...
- My bestpren's; Fennie, Dwee, Prio, Sanny, Trisna, Kusuma, Aat, Naomi, Scha, Penghuni Kost Lotus & KMK St.Theresia
- Calon keponakkan yang akan meramaikan hari2 yang akan datang.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, atas segala berkat dan rahmat yang telah dilimpahkanNya sehingga penulis dapat menyelesaikan dan menyusun skripsi ini.

Di dalam penulisan skripsi ini, penulis tidak lepas dari segala kesulitan dan keterbatasan yang akhirnya dapat penulis atasi berkat bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, sudah sepantasnya pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada

1. Drs. Isnandar Slamet, M.Sc, dan Drs. Muslich, M.Si., sebagai pembimbing I dan pembimbing II yang dengan sabar mengarahkan dan membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
2. Dra. Sri Subanti, M.Si., sebagai pembimbing akademis yang telah memberikan bimbingan akademis.
3. Nur dan Ardina yang telah membantu penulis dalam memahami materi. Yonda atas pinjaman monitor komputernya yang sangat membantu.
4. Rekan-rekan Matematika khususnya angkatan 2002 FMIPA UNS atas dukungannya.
5. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam penyusunan skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi pembaca.

Surakarta, Mei 2007

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR NOTASI DAN SIMBOL

X	: variabel random pengamatan
Θ	: variabel random risiko
$\mu(\theta)$	: rata-rata yang diduga
$\sigma^2(\theta)$	: variansi proses
v	: nilai harapan dari variansi proses
a	: variansi dari rata-rata yang diduga
C	: perkiraan kredibilitas
Z	: faktor kredibilitas
$\overline{X}$	: rata-rata pengamatan
μ	: rata-rata awal
n	: jumlah pengamatan
K	: parameter kredibilitas Bühlmann
$\overline{x}_i$	: penduga tidak bias dari rata-rata yang diduga
$\hat{\sigma}_i^2$	: penduga tidak bias dari variansi proses
$\hat{v}$	: penduga tidak bias nilai harapan dari variansi proses
$\hat{a}$	: penduga tidak bias variansi dari rata-rata yang diduga
$\hat{C}$	: penduga dari perkiraan kredibilitas
$\hat{Z}$	: penduga faktor kredibilitas
$\hat{\mu}$	: penduga dari rata-rata awal
$\hat{K}$	: penduga parameter kredibilitas Bühlmann

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Ketidakpastian beserta risikonya merupakan sesuatu yang tidak dapat diabaikan dan harus ditanggulangi, artinya kita berusaha untuk meminimumkan ketidakpastian agar kerugian yang ditimbulkan dapat dihilangkan atau paling tidak diminimumkan. Salah satu cara untuk menanggulangi risiko melalui pembiayaan adalah dengan mengasuransikan suatu risiko kepada perusahaan asuransi. Djojosoedarso (1999) menyatakan bahwa asuransi artinya transaksi pertanggungan yang melibatkan dua pihak, yaitu tertanggung (*insured*) dan penanggung (*insurer*). Penanggung menjamin pihak tertanggung, bahwa ia akan mendapatkan penggantian terhadap suatu kerugian yang mungkin akan diderita, sebagai akibat dari suatu peristiwa yang semula belum tentu akan terjadi atau yang semula belum dapat ditentukan saat atau kapan terjadi. Sebagai kontra prestasi, tertanggung diwajibkan membayar sejumlah uang kepada penanggung sebesar sekian prosen dari nilai pertanggungan yang biasa disebut premi. Pekerjaan menghitung premi pada asuransi adalah merupakan fungsi yang sangat penting. Dalam perusahaan asuransi ada bagian tersendiri untuk menghitung premi, yaitu bagian aktuaria.

Aktuaris menggunakan pengamatan-pengamatan dari kejadian yang terjadi di masa lampau untuk memprediksi biaya-biaya di masa depan. Teori kredibilitas adalah proses pembuatan tarif premi oleh aktuaris untuk melakukan penyesuaian di masa depan menurut pengalaman masa lampau. Denuit *et al*. (2001) menyatakan bahwa permasalahan yang muncul dalam praktek asuransi adalah menggunakan pengalaman untuk menentukan premi di masa yang akan datang, dengan menghitung bukan hanya pengalaman individual saja tetapi juga pengalaman kolektif. Hal ini menimbulkan dua kemungkinan besar, yaitu membebani premi yang sama kepada setiap orang, yang diduga dengan rata-rata keseluruhan data μ, dan membebani kelompok i dengan rata-rata klaim sendiri $\overline{X}_i$ sebagai premi. Sebuah pernyataan yang terjadi sejak awal abad 20, yang menyatakan premi sebagai rata-rata bobot dari kedua kemungkinan tersebut, yaitu $C = Z\,\overline{X}_i + (1-Z)\,\mu$. Faktor Z menyatakan seberapa besar terpercayanya pengalaman perseorangan dari kelompok tersebut. Faktor Z disebut juga faktor kredibilitas dan C disebut perkiraan kredibilitas.

Menurut Dean and Mahler (2006), ada tiga pendekatan yang dapat digunakan untuk menentukan faktor kredibilitas, yaitu model kredibilitas klasik yang disebut juga sebagai pendekatan kredibilitas fluktuasi terbatas (*limited fluctuation credibility approach*) karena pendekatan ini mencoba untuk membatasi risiko fluktuasi random dari observasi-observasi yang akan diduga, pendekatan kredibilitas keakuratan terbesar (*greatest accuracy credibility approach*) yaitu pendekatan yang meminimumkan kuadrat sesatan antara perkiraan dan nilai harapan dari kuantitas yang akan diduga, dan analisis Bayesian merupakan pendekatan yang menggabungkan observasi-observasi yang ditentukan dengan informasi awal untuk menghasilkan observasi terbaik. Pada pendekatan kredibilitas keakuratan terbesar terdapat dua model, yaitu model Bühlmann dan model Bühlmann-Straub. Dalam skripsi ini dibahas kredibilitas keakuratan terbesar untuk menentukan perkiraan kredibilitas dan menentukan penduga dari parameter-parameter kredibilitas Bühlmann.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka permasalahan yang akan dibahas adalah

1. bagaimana menentukan perkiraan kredibilitas dengan menggunakan pendekatan kredibilitas keakuratan terbesar.
2. bagaimana mengestimasi parameter-parameter dari kredibilitas keakuratan terbesar.

1.3 Batasan Masalah

Dalam penulisan skripsi ini penulis membatasi masalah teori kredibilitas keakuratan terbesar yang akan dibahas hanyalah model Bühlmann.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah

1. dapat menentukan perkiraan premi dengan menggunakan pendekatan kredibilitas keakuratan terbesar.
2. dapat mengestimasi parameter-parameter dari kredibilitas keakuratan terbesar.

1.5 Manfaat Penulisan

Secara teoritis manfaat yang dapat diperoleh dari penulisan skripsi ini adalah dapat menambah pengetahuan dan wawasan tentang teori kredibilitas, khususnya mengenai model Bühlmann. Manfaat praktis dari penulisan skripsi ini adalah diharapkan dapat memberikan masukan kepada pembaca (khususnya para ahli statistik dan matematika) untuk mengembangkan ilmunya pada bidang aktuaria.

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini diberikan tinjauan pustaka yang berisi teori dan konsep yang digunakan pada pembahasan, serta kerangka pemikiran yang menjelaskan alur pemikiran pada pembahasan.

2.1 Tinjauan Pustaka

Berikut ini diberikan beberapa definisi, teorema, dan konsep yang berhubungan dengan pembahasan tentang kredibilitas Bühlmann yang meliputi konsep dasar statistik, ketidakbiasan, fungsi densitas probabilitas, fungsi densitas probabilitas bersyarat, nilai harapan, variansi, nilai harapan bersyarat, variansi bersyarat, risiko, asuransi, premi asuransi, frekuensi, tingkat kegawatan, premi murni, distribusi Bernoulli, dan distribusi Gamma.

2.1.1 Konsep Dasar Statistika

Parameter adalah ukuran-ukuran atau nilai-nilai ringkasan yang menggambarkan sifat-sifat populasi, dan statistik adalah ukuran-ukuran atau nilai-nilai ringkasan yang menggambarkan sifat-sifat sampel.

Definisi 2.1. *(Bain and Engelhardt, 1992) Variabel random X adalah suatu fungsi yang memetakan setiap hasil e yang mungkin pada ruang sampel S dengan suatu bilangan riil x sedemikian sehingga X(e) = x.*

Definisi 2.2. *(Bain and Engelhardt, 1992) Sebuah statistik,* $T = l(X_1, X_2, \ldots, X_n)$*, yang digunakan untuk mengestimasi nilai dari* $\tau(\theta)$ *dinamakan penduga dari* $\tau(\theta)$*, dan sebuah nilai pengamatan dari statistik,* $t = l(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, dinamakan dugaan dari* $\tau(\theta)$.

2.1.2 Ketidakbiasan (*Unbiased*)

Penyimpangan atau bias dari suatu penduga adalah perbedaan antara nilai harapan dan nilai parameter yang sebenarnya. Suatu penduga dikatakan tidak bias bila selisih antara nilai harapannya dengan nilai parameter yang sebenarnya sama dengan nol, atau dengan kata lain, nilai harapan dari penduganya sama dengan nilai parameter yang sebenarnya.

Definisi 2.3. *(Bain and Engelhardt, 1992) Sebuah penduga T disebut penduga tidak bias dari* $\tau(\theta)$ *jika*

$$E(T) = \tau(\theta)$$

untuk semua $\theta \in \Omega$.

2.1.3 Fungsi Densitas Probabilitas (fdp)

Variabel random dapat dibedakan menjadi dua yaitu variabel random diskrit dan kontinu, adapun distribusi probabilitas untuk variabel random berupa sebuah fungsi dari variabel random yang disebut fungsi densitas probabilitas. Pendefinisian mengenai fungsi densitas probabilitas adalah sebagai berikut.

Definisi 2.4. *(Bain and Engelhardt, 1992) Jika himpunan semua nilai yang mungkin dari variabel random X adalah himpunan terhitung,* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *atau tidak terhingga terhitung,* $x_1, x_2, \ldots,$ *maka X disebut variabel random diskrit. Fungsi yang menyatakan probabilitas setiap nilai x yang mungkin berikut ini*

$$f(x) = P[X = x] \qquad x = x_1, x_2, \ldots$$

disebut fungsi densitas probabilitas diskrit (fdp diskrit).

Definisi 2.5. *(Bain and Engelhardt, 1992) Sebuah variabel random X disebut variabel random kontinu jika terdapat fungsi f(x), yang disebut fungsi densitas probabilitas (fdp) dari X, dengan fungsi distribusi kumulatifnya dinyatakan sebagai berikut*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\,.$$

2.14 Fungsi Densitas Probabilitas (fdp) Bersyarat

Salah satu konsep penting pada teori probabilitas adalah probabilitas bersyarat. Sering seseorang tertarik untuk mengetahui probabilitas bahwa suatu peristiwa akan terjadi jika diketahui bahwa peristiwa kedua telah atau akan terjadi. Pendefinisian mengenai fungsi densitas probabilitas bersyarat adalah sebagai berikut

Definisi 2.6. *(Bain and Engelhardt, 1992) Jika X_1 dan X_2 adalah variabel random diskrit atau kontinu dengan fungsi densitas probabilitas bersama f(x_1, x_2) maka fungsi densitas probabilitas bersyarat dari X_2 diberikan $X_1 = x_1$ sebagai berikut*

$$f(x_2 \mid x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)},$$

untuk setiap x_1 sehingga $f_1(x_1) > 0$ dan nol untuk yang lainnya.

Teorema 2.1. *(Bain and Engelhardt) Jika X_1 dan X_2 adalah variabel random dengan fdp bersama f(x_1, x_2) dan fdp-fdp marginalnya $f_1(x_1)$ dan $f_2(x_2)$ maka*

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f(x_2 \mid x_1) = f_2(x_2) f(x_1 \mid x_2)$$

dan jika X_1 dan X_2 saling bebas, maka

$$f(x_2 \mid x_1) = f_2(x_2)$$

dan

$$f(x_1 \mid x_2) = f_1(x_1).$$

2.1.5 Nilai Harapan dan Variansi

Misal *X* adalah suatu variabel random yang mempunyai fungsi densitas probabilitas *f(x)*. Menurut Bain and Engelhardt (1992),

a. Jika *X* adalah variabel random diskrit dengan fungsi densitas probabilitas *f(x)* maka nilai harapan dari *X* didefinisikan sebagai

$$E[X] = \sum_x x\, f(x).$$

b. Misalkan X suatu variabel random kontinu dengan fungsi densitas probabilitas *f(x)* maka nilai harapan dari X didefinisikan sebagai

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx.$$

Nilai harapan mempunyai beberapa sifat, diantaranya :

1. Jika k suatu konstanta maka $E(k) = k$.
2. Jika k adalah suatu konstanta dan $g(x)$ adalah suatu fungsi maka

$$E[kg(X)] = k\, E[g(X)].$$

3. Jika k_1 dan k_2 adalah suatu konstanta, $g_1(x)$ dan $g_2(x)$ adalah suatu fungsi maka

$$E[k_1\, g_1(x) + k_2\, g_2(x)] = k_1\, E[g_1(x)] + k_2\, E[g_2(x)].$$

Definisi 2.7. *(Bain and Engelhardt, 1992) Variansi dari variabel random X adalah*

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2] = E[X^2] - \mu^2.$$

2.1.6 Nilai Harapan dan Variansi Bersyarat

Konsep yang sering digunakan untuk menghitung tarif premi asuransi adalah nilai harapan bersyarat dan variansi bersyarat. Nilai harapan bersyarat dan variansi bersyarat didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.8. *(Bain and Engelhardt) Jika X dan Y adalah distribusi bersama variabel random, maka nilai harapan bersyarat dari Y dengan diberikan X = x sebagai berikut*

$$E(Y \mid x) = \sum_y y\, f(y \mid x) \qquad \text{, jika } X \text{ dan } Y \text{ diskrit}$$

$$E(Y \mid x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y \mid x)\, dy \qquad \text{, jika } X \text{ dan } Y \text{ kontinu}$$

Teorema 2.2. *(Bain and Engelhardt) Jika X dan Y adalah distribusi bersama variabel random, maka* $E[E(Y \mid X)] = E(Y)$.

Teorema 2.3. *(Bain and Engelhardt) Jika X dan Y adalah variabel random yang saling bebas, maka* $E(Y \mid x) = E(Y)$ *dan* $E(X \mid y) = E(X)$.

Definisi 2.9. *(Bain and Engelhardt) Variansi bersyarat dari Y dengan diberikan* $X = x$ *didefinisikan sebagai berikut*

$$Var(Y \mid x) = E\{[Y - E(Y \mid x)]^2 \mid x\}.$$

Teorema 2.4. *(Bain and Engelhardt) Jika X dan Y adalah distribusi bersama variabel random maka*

$$Var(Y) = E_X[Var(Y \mid X)] + Var_X[E(Y \mid X)].$$

2.1.7 Risiko

Djojosoedarso (1999) menyatakan bahwa pengertian secara ilmiah dari risiko sampai saat ini masih tetap beragam, yaitu antara lain:

1. Risiko adalah suatu variansi dari hasil-hasil yang dapat terjadi selama periode tertentu.
2. Risiko adalah ketidaktentuan yang mungkin melahirkan peristiwa kerugian.
3. Risiko adalah ketidakpastian atas terjadinya suatu peristiwa.
4. Risiko merupakan penyebaran atau penyimpangan hasil aktual dari hasil yang diharapkan.
5. Risiko adalah probabilitas sesuatu hasil atau outcome yang berbeda dengan yang diharapkan.

Sehingga dari definisi-definisi tersebut dapat disimpulkan bahwa risiko merupakan ketidakpastian atau ketidakmungkinan terjadinya sesuatu, yang bila terjadi akan mengakibatkan kerugian.

2.1.8 Asuransi

Asuransi adalah suatu alat untuk mengurangi risiko yang melekat pada perekonomian, dengan cara menggabungkan sejumlah unit-unit yang terkena risiko yang sama atau hampir sama, dalam jumlah yang cukup besar, agar probabilitas kerugiannya dapat diramalkan dan bila kerugian yang diramalkan terjadi akan dibagi secara proposional oleh semua pihak dalam gabungan itu (Djojosoedarso, 1999).

Definisi asuransi menurut pasal 246 Kitab Undang-Undang Hukum Dagang (KUHD) Republik Indonesia:

"Asuransi atau pertanggungan adalah suatu perjanjian, dengan mana seorang penanggung mengikatkan diri kepada tertanggung dengan menerima suatu premi, untuk memberi penggantian kepadanya karena suatu kerugian, kerusakan atau kehilangan keuntungan yang diharapkan, yang mungkin diderita karena suatu peristiwa yang tak tertentu."

Berdasarkan definisi tersebut, maka dalam asuransi terkandung empat unsur, yaitu:

1. Pihak tertanggung yang berjanji untuk membayar uang premi kepada pihak penanggung, sekaligus atau secara berangsur-angsur.
2. Pihak penanggung yang berjanji akan membayar sejumlah uang (santunan) kepada tertanggung, sekaligus atau secara berangsur-angsur apabila terjadi sesuatu yang mengandung unsur tak tertentu.
3. Suatu peristiwa *(accident)* yang tak tertentu (tidak diketahui sebelumnya).
4. Kepentingan *(interest)* yang mungkin akan mengalami kerugian karena peristiwa yang tak tertentu.

2.1.9 Premi Asuransi

Dalam asuransi yang dimaksud dengan premi adalah pembayaran dari tertanggung kepada penanggung, sebagai imbalan jasa atas pengalihan risiko kepada penanggung. Pekerjaan menghitung premi asuransi adalah merupakan pekerjaan yang sangat penting sekali. Maka pada setiap perusahaan asuransi tentu ada bagian yang khusus menangani pekerjaan ini. Bagian yang berfungsi mengerjakan tugas ini disebut aktuaria, sedangkan orang yang mengerjakan tugas ini disebut aktuaris.

Salim (1998) menyatakan bahwa pembuatan tarif berkisar antara *value judgment* sampai *highly scientific. Value judgment*, umpamanya dalam menghitung premi pada asuransi angkutan laut, yaitu berdasar kepada pengalaman-pengalaman saja. Sedangkan yang menggunakan *scientific* ialah pada asuransi jiwa, yang banyak menggunakan rumus-rumus matematika dan statistik, yaitu dengan tabel mortalitas (*mortality table*). Dalam menentukan tarif harus diupayakan terciptanya tarif yang ideal yang sesuai dengan keadaan yang sesungguhnya, yaitu tarif yang dapat menghasilkan pendapatan bagi perusahaan untuk mengganti kerugian yang terjadi dan memberikan sedikit keuntungan untuk kelangsungan hidup perusahaan yang bersangkutan (Djojosoedarso, 1999). Ada dua jenis tarif asuransi menurut Djojosoedarso (1999) yaitu:

1. *Manual* atau *class rate* yaitu tarif premi asuransi yang berlaku untuk semua risiko yang sejenis. Untuk membuat *manual* atau *class rate* diperlukan klasifikasi dan pengalaman yang banyak sekali, agar hasilnya dapat memenuhi hukum bilangan besar (*the law of large number*) serta dapat dipercaya (*credibility*). Untuk ini statistik asuransi sangat penting peranannya.
2. *Merit rating* yaitu metode penentuan tarif premi asuransi dimana tiap-tiap risiko dipertimbangkan keadaannya masing-masing. *Merit rating* digunakan dalam asuransi kebakaran.

2.1.10 Frekuensi, Tingkat Kegawatan dan Premi Murni

Dalam pengukuran risiko dimensi yang diukur adalah:

1. Besarnya frekuensi kerugian, artinya berapa kali terjadinya suatu kerugian selama suatu periode tertentu. Jadi untuk mengetahui sering tidaknya suatu kerugian itu terjadi.
2. Tingkat kegawatan *(severity)* atau keparahan dari kerugian-kerugian tersebut. Artinya untuk mengetahui sampai seberapa besar pengaruh dari suatu kerugian terhadap kondisi perusahaan, terutama kondisi finansialnya.

Pengukuran frekuensi oleh Djojosoedarso (1999) ialah untuk mengetahui berapa kali suatu jenis risiko dapat menimpa suatu jenis obyek yang bisa terkena risiko selama suatu jangka waktu tertentu, dan pengukuran tingkat kegawatan adalah untuk mengetahui berapa besar nilai kerugian, yang selanjutnya dikaitkan dengan pengaruhnya terhadap kondisi perusahaan. Pada asuransi tingkat kegawatan diukur berdasarkan klaim yang terjadi.

Dean and Mahler (2006) mendefinisikan premi murni sebagai kerugian yang dibagi dengan eksposure. Premi murni merupakan hasil perkalian dari frekuensi dan tingkat kegawatan, sebagai berikut.

Premi murni = kerugian / eksposure = (jumlah klaim / eksposure) (kerugian / jumlah klaim) = (frekuensi) (tingkat kegawatan).

Variansi proses dari premi murni, jika frekuensi dan tingkat kegawatan tidak saling bebas, dihitung dengan menggunakan momen pertama dan momen kedua. Jika frekuensi dan tingkat kegawatan saling bebas, maka variansi proses dari premi murni adalah (rata-rata frekuensi) (variansi tingkat kegawatan) + (rata-rata tingkat kegawatan)^2 (variansi frekuensi).

2.1.11 Distribusi Bernoulli

Bain and Engelhardt (1992) menyatakan bahwa suatu variabel random *X* yang diasumsikan bernilai 0 dan 1 dinyatakan sebagai variabel Bernoulli. Sebuah kejadian dari percobaan dengan dua kemungkinan yang muncul disebut sebagai kejadian Bernoulli. Jika sebuah observasi hanya bisa menghasilkan sukses *E* dan gagal *E'* maka hubungan dengan variabel Bernoulli adalah

$$X(e) = \begin{cases} 1 & \text{jika } e \in E \\ 0 & \text{jika } e \in E' \end{cases}.$$

Kemudian fdp dari *X* dengan $f(0) = 1 - p$ dan $f(1) = p$ disebut sebagai distribusi Bernoulli dan mempunyai bentuk

$$f(x) = p^x (1-p)^{1-x} \qquad x = 0,1,$$

dengan mean $E(X) = p$ dan $Var(X) = p\,(1-p)$.

2.1.12 Distribusi Gamma

Nama distribusi gamma diturunkan dari fungsi gamma yang didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.10. *(Bain dan Engelhardt, 1992) Fungsi gamma, dilambangkan* $\Gamma(k)$ *untuk semua k > 0, adalah sebagai berikut*

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty t^{k-1} e^{-t} dt\,.$$

Variabel random X disebut berdistribusi gamma dengan parameter $k > 0$ dan $\theta > 0$ jika mempunyai fdp sebagai berikut.

$$f(x;\theta,k) = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} x^{k-1} \exp\left[\frac{-x}{\theta}\right] \qquad x > 0\,,$$

dan nol untuk yang lainnya. Notasi dilambangkan dengan $X \sim GAM(\theta,k)$.

2.2 Kerangka Pemikiran

Kerangka pemikiran dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut Teori kredibilitas adalah proses pembuatan tarif oleh aktuaris untuk melakukan penyesuaian premi di masa depan menurut pengalaman di masa lampau. Ada tiga pendekatan pada kredibilitas yang dapat digunakan untuk menentukan faktor kredibilitas Z, sehingga dapat menghitung nilai perkiraannya. Salah satu pendekatan yaitu kredibilitas keakuratan terbesar dengan menggunakan model Bühlmann akan dibahas dan untuk selanjutnya akan disebut sebagai kredibilitas Bühlmann. Penghitungan parameter kredibilitas Bühlmann K membutuhkan nilai harapan dari variansi proses dan variansi dari rata-rata yang diduga. Selanjutnya, K akan digunakan untuk menentukan faktor kredibilitas, sehingga dapat menentukan perkiraan yang diinginkan. Nilai harapan dari variansi proses dan variansi dari rata-rata yang diduga seringkali tidak diketahui, sehingga diperlukan untuk mengestimasi keduanya. Untuk lebih memberikan gambaran mengenai kredibilitas Bühlmann diberikan contoh aplikasinya.

BAB III
METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam menyusun skripsi ini adalah studi literatur yaitu dengan mengumpulkan referensi yang dapat mendukung pembahasan mengenai kredibilitas.

Pada teori kredibilitas terdapat tiga pendekatan yang dapat digunakan untuk menentukan perkiraan kredibilitas, yang dirumuskan sebagai

$$C = Z\,\overline{X} + (1 - Z)\,\mu\,.$$

Bühlmann mendefinisikan faktor kredibilitas Z sebagai berikut

$$Z = \frac{n}{n + K}\,,$$

dengan $0 \le Z \le 1$, n menyatakan banyak percobaan, dan

$$K = \frac{\text{nilai harapan dari variansi proses}}{\text{variansi dari rata} - \text{rata yang diduga}}\,.$$

Oleh karena itu, untuk mencapai tujuan penulisan, diambil langkah-langkah sebagai berikut.

1. Menentukan nilai harapan dari variansi proses.
2. Menentukan variansi dari rata-rata yang diduga.
3. Menentukan faktor kredibilitas *Z*, sehingga dapat menentukan perkiraan kredibilitas yang diinginkan
4. Mengestimasi parameter-parameter kredibilitas Bühlmann. Parameter-parameter kredibilitas seringkali dalam prakteknya tidak diketahui nilainya. Sehingga parameter-parameter tersebut akan ditentukan penduganya.
5. Memberikan contoh aplikasi, untuk lebih memperjelas pembahasan akan diberikan beberapa contoh studi penggunaan kredibilitas Bühlmann dan estimasi parameter-parameter kredibilitas Bühlmann.

BAB IV

PEMBAHASAN

Kredibilitas adalah salah satu teori yang digunakan aktuaris untuk memprediksi premi di masa depan. Pada teori kredibilitas terdapat tiga pendekatan yang dapat digunakan untuk menentukan perkiraan kredibilitas, *C*, yang dirumuskan sebagai

$$C = Z\,\overline{X} + (1 - Z)\,\mu\,,$$

dengan Z menyatakan faktor kredibilitas, $\overline{X}$ adalah rata-rata dari pengamatan yang terpilih, dan μ adalah rata-rata awal.

Herzog (1996) menyatakan sebuah alternatif pendekatan yang tidak memerlukan informasi awal untuk menghitung faktor kredibilitas *Z* dikenal sebagai kredibilitas Bühlmann, untuk menghormati Hans Bühlmann sebagai pengusulnya. Bühlmann mendefinisikan faktor kredibilitas Z sebagai

$$Z = \frac{n}{n + K}\,, \tag{4.1}$$

dengan $0 \le Z \le 1$. Pada persamaan (4.1), *n* menyatakan banyak percobaan dan *K* menyatakan parameter kredibilitas Bühlmann yang dirumuskan sebagai

$$K = \frac{\text{nilai harapan dari variansi proses}}{\text{variansi dari rata} - \text{rata yang diduga}}\,. \tag{4.2}$$

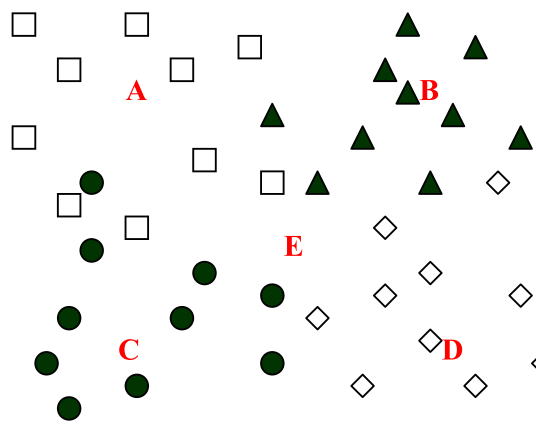
Penghitungan nilai *K* melibatkan penerapan analisis dari variansi, yaitu menghitung nilai harapan dari variansi proses dan variansi dari rata-rata yang diduga.

Bab ini akan membahas analisis dari variansi, yang akan digunakan dalam menentukan parameter kredibilitas Bühlmann dan faktor kredibilitas. Sehingga, dapat menentukan nilai perkiraan kredibilitas yang diinginkan. Pada subbab berikutnya akan ditentukan penduga dari parameter-parameter kredibilitas Bühlmann.

4.1 Nilai Harapan dari Variansi Proses

Herzog (1996) menyatakan bahwa secara umum variansi proses menyatakan variansi frekuensi, tingkat kegawatan atau jumlah klaim keseluruhan pada kombinasi individual dari karakteristik-karakteristik risiko. Oleh karena itu variansi proses adalah variansi bersyarat, dengan diberikan kombinasi dari karakteristik-karakteristik risiko.

Dean and Mahler (2006) menyatakan contoh target penembakan oleh Stephen Philbrick dapat memberikan gambaran mengenai nilai harapan dari variansi proses. Pada contoh dianggap terdapat empat penembak yang akan menembak target masing-masing. Setiap tembakan diasumsikan terdistribusi di sekitar target masing-masing, yang ditandai dengan huruf A, B, C, dan D. Susunan target diperlihatkan pada Gambar 4.1 berikut



Gambar 4.1 Susunan Target Penembakan

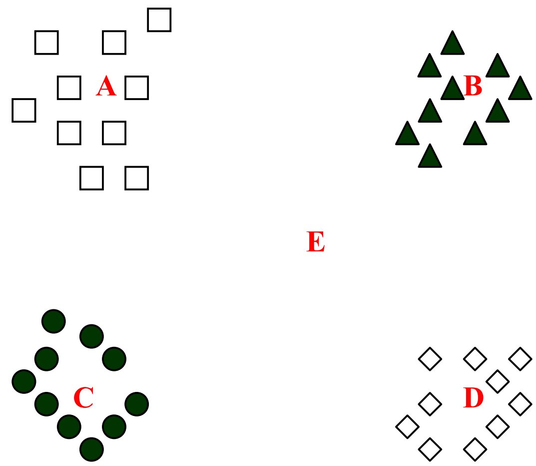
Pada Gambar 4.1, dapat dilihat bahwa hasil tembakan dari masing-masing penembak akan mengelompok di sekitar target miliknya. Tembakan setiap penembak dibedakan dengan simbol-simbol yang berbeda. Sebagai contoh, simbol segitiga adalah tembakan dari penembak B. Titik E menggambarkan rata-rata dari keempat target A, B, C, dan D. Sebuah tembakan dari salah satu penembak (yang identitasnya tidak diketahui) diamati, kemudian ingin diduga lokasi tembakan berikutnya dari penembak yang sama. Pada awalnya untuk setiap tembakan yang diamati, dugaan terbaik dari lokasi tembakan berikutnya adalah E, maka E adalah rata-rata awal (*mean prior*). Dugaan yang diinginkan akan berada di antara pengamatan dan rata-rata awal.

Penembak dianggap tidak sempurna, mereka tidak selalu menembak mengenai target. Jumlah penyebaran tembakan di sekitar target masing-masing dapat diukur dengan variansi. Rata-rata penyebaran adalah nilai harapan dari variansi proses (*expected value of the process variance* atau *EPV*). Penembak yang terbaik menghasilkan nilai harapan dari variansi proses yang lebih kecil dan kluster di sekitar target yang ditembak lebih ketat. Penembak yang buruk menghasilkan nilai harapan dari variansi proses yang lebih besar dan keketatan penyebaran tembakan sangat kecil. Makin baik penembak, makin banyak informasi yang terdapat pada sebuah tembakan. Makin buruk penembak, makin banyak sesatan random yang terdapat pada pengamatan dari lokasi tembakan. Harapan untuk memberi bobot yang lebih besar kepada sebuah pengamatan, terjadi saat penembak sedang berada dalam kondisi yang terbaik, daripada saat penembak dalam kondisi yang buruk. Oleh karena itu, penembak yang terbaik menghasilkan kredibilitas yang lebih besar. Hal tersebut dituliskan pada Tabel 4.1 berikut.

Tabel 4.1 Nilai Harapan dari Variansi Proses dan Kredibilitas

Penembak	Cluster tembakan	Nilai harapan dari variansi proses	Isi dari informasi	Kredibilitas terhadap pengamatan
Baik	Ketat	Lebih kecil	Tinggi	Lebih besar
Buruk	Longar	Lebih besar	Rendah	Lebih kecil

Nilai harapan dari variansi proses yang kecil diperlihatkan oleh Gambar 4.2. Pada Gambar 4.2 akan lebih mudah untuk mengidentifikasi penembak setelah sebuah tembakan diamati, jika dibandingkan dengan Gambar 4.1



Gambar 4.2 Penyebaran Tembakan dengan
Nilai Harapan dari Variansi Proses yang Kecil

Pada contoh target penembakan Philbrick diperlihatkan bahwa untuk menentukan besarnya nilai harapan dari variansi proses, terlebih dahulu perlu menghitung besarnya variansi proses. Menurut Dean (2005) pengamatan untuk sebuah atau sekelompok risiko digunakan aktuaris untuk memperkirakan hasil yang mungkin dari risiko yang sama di masa yang akan datang. Pengamatan selama waktu t dari sebuah atau sekelompok risiko dilambangkan dengan x_t, yang merupakan observasi dari variabel random X_t, dengan t bilangan bulat. Risiko individual adalah anggota dari sebuah populasi yang besar dan karakteristik-karakteristik dari risiko individual didefinisikan oleh paramater risiko θ. Variabel random parameter risiko dilambangkan Θ dan diasumsikan tidak diketahui distribusi populasinya. Distribusi dari variabel random X_t tergantung pada nilai θ; $f_{X|\Theta}(x_t \mid \theta)$. Jika X_t adalah variabel random kontinu, variansi bersyarat dari X_t jika diberikan $\Theta = \theta$ adalah

$$\begin{aligned} Var_{X|\Theta}[X_t \mid \Theta = \theta] &= E_{X|\Theta}[(X_t - \mu(\theta))^2 \mid \Theta = \theta] \\ &= \int (X_t - \mu(\theta))^2 f_{X|\Theta}(x_t \mid \theta)\, dx_t . \end{aligned}$$

Variansi ini disebut variansi proses untuk risiko yang terpilih dan dinotasikan sebagai

$$\sigma^2(\theta) = Var_{X|\Theta}[X_t \mid \Theta = \theta].$$

Variansi tidak bersyarat dari X_t, juga dikenal sebagai total variansi, yang dirumuskan sebagai

$$Var[X_t] = Var_{\Theta}[E_{X|\Theta}[X_t \mid \Theta]] + E_{\Theta}[Var_{X|\Theta}[X_t \mid \Theta]]. \tag{4.3}$$

Persamaan (4.3) dapat ditulis sebagai berikut

$$\text{Total Variansi} = \begin{pmatrix} \text{Variansi dari} \\ \text{rata} - \text{rata yang diduga} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Nilai harapan} \\ \text{dari variansi proses} \end{pmatrix}.$$

Nilai harapan dari variansi proses disimbolkan sebagai berikut

$$v = E_{\Theta}[Var_{X|\Theta}[X_t \mid \Theta]] = E_{\Theta}[\sigma^2(\Theta)].$$

Nilai harapan dari variansi proses menunjukkan variabilitas nilai harapan dari pengamatan yang dilakukan pada risiko individual.

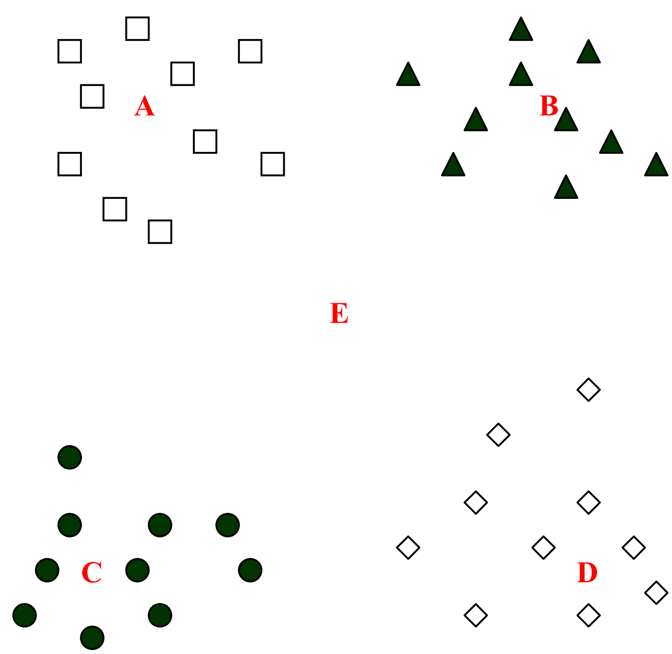
4.2 Variansi dari Rata-Rata yang Diduga

Pada contoh target penembakan Philbrick, posisi dari target yang ditandai dengan huruf A, B, C, dan D menandakan pusat (atau rata-rata) dari masing-masing kluster. Rata-rata dari keempat target yaitu E, merupakan pusat dari gravitasi. Masing-masing pusat dari keempat target merupakan rata-rata yang diduga dari penembak yang bersangkutan, dan pusat dari gravitasi adalah rata-rata dari keseluruhan rata-rata yang diduga. Variansi dari rata-rata yang diduga (v*ariance of the hypothetical means* atau *VHM*) pada contoh target penembakan yaitu jarak tersebarnya keempat target. Pengaruh keadaan penyebaran target terhadap besarnya nilai variansi dari rata-rata yang diduga dan kredibilitas disimpulkan pada Tabel 4.2 berikut.

Tabel 4.2 Variansi dari Rata-Rata yang Diduga dan Kredibilitas

Tersebarnya target	Variansi dari rata-rata yang diduga	Isi dari informasi	Kredibilitas terhadap pengamatan
Lebih dekat	Kecil	Rendah	Lebih kecil
Lebih jauh	Besar	Tinggi	Lebih besar

Nilai variansi dari rata-rata yang diduga yang besar menghasilkan kredibilitas besar. Makin jauh terpisahnya target-target makin besar perkiraan kredibilitas mengarah kepada pengamatan, hal tersebut akan diilustrasikan pada Gambar 4.3.



Gambar 4.3 Susunan Penyebaran Target

Secara umum, rata-rata yang diduga menyatakan nilai rata-rata frekuensi, tingkat kegawatan, atau jumlah klaim keseluruhan pada kombinasi individual dari karakteristik-karateristik risiko. Rata-rata yang diduga adalah nilai harapan bersyarat, dengan diberikan kombinasi dari karakteristik-karakteristik risiko (Herzog, 1996).

Jika X_t adalah variabel random kontinu, rata-rata untuk X_t jika diketahui $\Theta = \theta$, adalah nilai harapan bersyarat sebagai berikut

$$E_{X|\Theta}[X_t \mid \Theta = \theta] = \int x_t f_{X|\Theta}(x_t \mid \theta)\, dx_t.$$

Jika X_t adalah variabel random diskrit, maka nilai harapan bersyarat menjadi

$$E_{X|\Theta}[X_t \mid \Theta = \theta] = \sum_{\forall x_t} x_t f_{X|\Theta}(x_t \mid \theta).$$

Rata-rata X_t disebut sebagai rata-rata yang diduga, dan dinotasikan dengan

$$\mu(\theta) = E_{X|\Theta}[X_1 \mid \theta] = \ldots = E_{X|\Theta}[X_N \mid \theta] = E_{X|\Theta}[X_{N+1} \mid \theta] = \ldots.$$

Parameter risiko yang diwakili oleh variabel random Θ mempunyai fungsi densitas probabilitas (fdp), $f_\Theta(\theta)$. Jika dua risiko mempunyai parameter yang sama, yaitu θ, maka karakteristik-karakteristik risikonya diasumsikan sama dan mempunyai rata-rata yang sama, yaitu $\mu(\theta)$.

Nilai harapan tidak bersyarat dari X_t sebagai berikut

$$\begin{aligned}
E[X_t] &= \iint x_t\, f_{X,\Theta}(x_t, \theta) dx_t d\theta \\
&= \iint x_t\, f_{X|\Theta}(x_t \mid \theta)\, f_\Theta(\theta)\, dx_t\, d\theta \\
&= \int \left[\int x_t\, f_{X|\Theta}(x_t \mid \theta)\, dx_t \right] f_\Theta(\theta)\, d\theta \\
&= E_\Theta[E_{X|\Theta}[X_t \mid \theta]] \\
&= E_\Theta[\mu(\theta)] \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

Variansi dari rata-rata yang diduga adalah ukuran perbedaan antar rata-rata dari risiko pada populasi, dan variansi dari rata-rata yang diduga disimbolkan sebagai berikut

$$a = Var_\Theta[\mu(\Theta)] = E_\Theta[(\mu(\Theta) - \mu)^2].$$

4.3 Faktor Kredibilitas Bühlmann

Sifat ketiga pada contoh target penembakan adalah jumlah tembakan yang diamati dari penembak, yang tidak diketahui identitas penembaknya. Lebih banyak tembakan yang diamati, makin banyak informasi yang diperoleh dan semakin besar kredibilitas menandakan rata-rata dari pengamatan. Ketiga sifat yang terdapat pada contoh target penembakan Philbrick, dicerminkan oleh rumus dari kredibilitas Bühlmann, $Z = n / (n + K) = n\ (a)/\{n\ (a) + v\}$. Hubungan ketiga sifat tersebut disimpulkan dalam Tabel 4.3 berikut.

Tabel 4.3 Pengaruh Sifat Contoh Target Pemburuan

Sifat contoh target penembakan	Kuantifikasi matematika	Kredibilitas Bühlmann
Penembak yang baik	v lebih kecil	Lebih besar
Target terpisah jauh	a lebih besar	Lebih besar
Banyak tembakan	n lebih besar	Lebih besar

Pada contoh target penembakan Philbrick dibandingkan dua dugaan lokasi dari tembakan berikutnya pada penembak yang sama, yaitu rata-rata dari pengamatan dan rata-rata awal. Rata-rata dari pengamatan dinyatakan oleh Z dan (1-Z) menyatakan rata-rata awal. Oleh karena itu kredibilitas Bühlmann adalah ukuran yang relatif dari informasi yang diketahui pada pengamatan terhadap rata-rata awalnya.

Titik awal penghitungan K adalah kombinasi variansi proses dan rata-rata yang diduga dari karakteristik-karakteristik risiko. Untuk setiap kombinasi dari karakteristik-karakteristik risiko, pendekatan nilai harapan dan variansi dapat dihitung, dan nilai K juga dapat ditentukan sesuai dengan persamaan (4.2).

Rata-rata $\overline{X} = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{t=1}^{n} X_t$ digunakan dalam memperkirakan proses, karena rata-rata yang diduga untuk risiko yang terpilih $\mu(\theta)$ tidak diketahui dan $\overline{X}$

merupakan penduga tidak bias untuk $\mu(\theta)$. Jika X_t dan θ diasumsikan saling bebas, maka variansi bersyarat $\overline{X}$ adalah

$$Var_{X|\Theta}[\overline{X} \mid \theta] = Var_{X|\Theta}\left[\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{t=1}^{n} X_t \mid \theta\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{t=1}^{n} Var_{X|\Theta}[X_t \mid \theta]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{t=1}^{n} \sigma^2(\theta) = \frac{\sigma^2(\theta)}{n}$$

Variansi tak bersyarat $\overline{X}$ adalah

$$Var[\overline{X}] = Var_{X|\Theta}[E_{X|\Theta}[\overline{X} \mid \Theta]] + E_{\Theta}[Var_{X|\Theta}[\overline{X} \mid \Theta]] = Var_{\Theta}[\mu(\Theta)] + \frac{E_{\Theta}[\sigma^2(\Theta)]}{n}$$

$$= a + \frac{v}{n}.$$

dengan *n* adalah jumlah pengamatan dan $K = v/a$. Persamaan (4.1) dikalikan dengan (*a* / *n*) diperoleh

$$Z = \frac{a}{a + \frac{v}{n}}, \tag{4.4}$$

dengan penyebut pada persamaan (4.4) adalah $Var[\overline{X}]$. Selanjutnya persamaan (4.1) dapat ditulis kembali sebagai

$$Z = \frac{\text{Variansi dari rata} - \text{rata yang diduga}}{\text{Total Variansi dari penduga } \overline{X}} = \frac{Var_{\Theta}[\mu(\Theta)]}{Var[\overline{X}]}.$$

Menurut Herzog (1996) karakteristik-karakteristik dari faktor kredibilitas Bühlmann $Z = \dfrac{n}{n+K}$, yaitu

1. *Z* adalah fungsi naik dari *n*. Pada kasus limit, jika *n* mendekati tak terhingga maka *Z* mendekati satu.
2. *Z* adalah fungsi turun dari *K*, maka *Z* juga merupakan fungsi turun nilai harapan dari variansi proses, dengan batas bawah nol. Sehingga variansi kombinasi individual dari karakteristik-karakteristik risiko yang lebih besar, memberikan bobot yang lebih kecil kepada pengamatan yang ditentukan, dan bobot yang lebih banyak kepada rata-rata prior.

3. Z merupakan fungsi naik dari variansi dari rata-rata yang diduga, dengan batas atas satu. Sehingga Z meningkatkan variansi pada nilai harapan kombinasi variasi dari karakteristik-karakteristik risiko.

Faktor kredibilitas yang diperoleh akan digunakan untuk menentukan perkiraan kredibilitas yang diinginkan, dengan perkiraan kredibilitas dirumuskan sebagai

$$C = Z\,\overline{X} + (1 - Z)\,\mu\,.$$

Pada subbab berikutnya akan dicari penduga dari parameter-parameter kredibilitas, yang digunakan dalam penghitungan perkiraan kredibilitas C yang diinginkan.

4.4 Estimasi Parameter-Parameter Kredibilitas Bühlmann

Model Bühlmann menghendaki penghitungan nilai parameter K. Ada beberapa cara yang dapat dilakukan untuk menentukan K. Dalam prakteknya, salah satunya yaitu dengan usaha menentukan komponen-komponen nilai harapan dari variansi proses dan variansi dari rata-rata yang diduga pada K. Untuk menghitung nilai harapan dari variansi proses dan variansi dari rata-rata yang diduga dibutuhkan hal-hal berikut:

1. Variansi proses $\sigma^2(\theta)$ untuk setiap risiko pada populasi.
2. Rata-rata yang diduga $\mu(\theta)$ untuk setiap risiko pada populasi.
3. Fungsi distribusi dari θ untuk menghitung $v = E_\Theta[\sigma^2(\Theta)]$ dan $a = Var_\Theta[\mu(\Theta)]$.

Pada prakteknya nilai harapan dari variansi proses dan variansi dari rata-rata yang diduga seringkali tidak diketahui. Estimasi nilai harapan dari variansi proses dan variansi dari rata-rata yang diduga dapat dibuat dari observasi-observasi empiris sampel dari populasi risiko.

Model Bühlmann mengasumsikan bahwa untuk setiap risiko i yang diberikan variabel random $\{X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in}\}$ menggambarkan hasil yang mungkin untuk n pengamatan yang berbeda, akan saling bebas dan berdistribusi sama, serta mempunyai rata-rata dan variansi yang sama. Hasil yang mungkin untuk risiko-risiko yang berbeda juga saling bebas.

Pada sampel dianggap terdapat *r* risiko dan *n* observasi dari setiap risiko. Pada dua kolom terakhir dari Tabel 4.4 ditunjukkan hasil yang mungkin dari variabel random *r n*.

Tabel 4.4 Hasil yang Mungkin dari Variabel Random *r n*

Risiko	Periode waktu 1	2	…	n	rata-rata sampel risiko $\bar{x}_i$	Variansi proses sampel risiko
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	$\bar{x}_1 = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{t=1}^{n} x_{1t}$	$\hat{\sigma}_1^2 = \left(\frac{1}{n-1}\right)\sum_{t=1}^{n}(x_{1t}-\bar{x}_1)^2$
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	$\bar{x}_2 = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{t=1}^{n} x_{2t}$	$\hat{\sigma}_2^2 = \left(\frac{1}{n-1}\right)\sum_{t=1}^{n}(x_{2t}-\bar{x}_2)^2$
:	:	:	…	:	:	:
r	x_{r1}	x_{r2}	…	x_{rn}	$\bar{x}_r = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{t=1}^{n} x_{rt}$	$\hat{\sigma}_r^2 = \left(\frac{1}{n-1}\right)\sum_{t=1}^{n}(x_{rt}-\bar{x}_r)^2$

Penduga tidak bias untuk setiap rata-rata risiko $\mu(\theta_i)$ dinyatakan dengan $\bar{x}_i$ dan penduga tidak bias untuk setiap proses variansi risiko $\sigma^2(\theta_i)$ dinyatakan dengan $\hat{\sigma}_i^2$.

Variansi proses dari sampel $\hat{\sigma}_i^2$ dapat dikombinasikan untuk menghasilkan penduga tidak bias untuk nilai harapan dari variansi proses populasi. Sehingga estimasi nilai harapan dari variansi proses adalah

$$\hat{v} = \left(\frac{1}{r}\right)\sum_{i=1}^{r}\hat{\sigma}_i^2 = \left(\frac{1}{r(n-1)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{t=1}^{n}(x_{it}-\bar{x}_i)^2\right). \tag{4.5}$$

Penduga tidak bias untuk setiap mean risiko-risiko $\bar{x}_i$ digunakan untuk mengestimasi variansi dari rata-rata yang diduga. Karena *r* risiko saling bebas, maka $\bar{x}_i$ adalah variabel random yang saling bebas. Penduga tidak bias untuk variansi dari $\bar{x}_i$ adalah

$$\hat{Var}[\bar{x}_i] = \left(\frac{1}{r-1}\right)\sum_{i=1}^{r}(\bar{x}_i - \bar{x})^2 \ , \tag{4.6}$$

dengan $\hat{\mu} = \bar{x} = \left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\bar{x}_i\right)$.

Rumus total variansi menyatakan bahwa

$$Var[\bar{x}_i] = Var_{\Theta}[E_{X|\Theta}[\bar{x}_i \mid \Theta_i]] + E_{\Theta}[Var_{X|\Theta}[\bar{x}_i \mid \Theta_i]], \tag{4.7}$$

karena

$$E_{X|\Theta}(\bar{x}_i \mid \Theta_i = \theta_i) = \mu(\theta_i)$$

dan

$$Var_{X|\Theta}[\bar{x}_i \mid \theta_i] = Var_{X|\Theta}\left[\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{t=1}^{n}x_{it} \mid \theta_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right)^2\sum_{t=1}^{n}Var_{X|\Theta}[x_{it} \mid \theta_i] = \frac{\sigma^2(\theta_i)}{n}.$$

Persamaan (4.7) dapat ditulis kembali sebagai

$$Var[\bar{x}_i] = Var_{\Theta}[\mu(\Theta_i)] + E_{\Theta}[\sigma^2(\Theta_i)]/n \tag{4.8}$$

Notasi pertama yang berada di sebelah kanan persamaan (4.8) adalah *a* dan notasi kedua adalah *v/n*. Persamaan (4.8) dapat ditulis kembali sebagai

$$a = Var[\bar{x}_i] - v/n\ . \tag{4.9}$$

Subtitusikan persamaan (4.5) dan persamaan (4.6) ke dalam persamaan (4.9). Sehingga, penduga tidak bias variansi dari rata-rata yang diduga adalah

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \hat{Var}[\bar{x}_i] - \frac{\hat{v}}{n} \\ &= \left(\frac{1}{r-1}\right)\sum_{i=1}^{r}(\bar{x}_i - \bar{x})^2 - \frac{\left\{\left(\frac{1}{r(n-1)}\right)\sum_{i=1}^{r}\sum_{t=1}^{n}(x_{it} - \bar{x}_i)^2\right\}}{n}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Nilai $\hat{Var}[\bar{x}_i]$ dikurangi $\hat{v}/n$ diperlihatkan oleh rumus penduga $\hat{a}$ pada persamaan (4.10). Pengurangan ini dapat mengakibatkan $\hat{a}$ bernilai negatif padahal variansi haruslah nonnegatif, jika $\hat{a}$ diperoleh negatif maka nilai $\hat{a}$ tersebut dapat diasumsikan nol. $\hat{v}$ dan $\hat{a}$ adalah penduga-penduga tidak bias untuk nilai harapan dari variansi proses dan variansi dari rata-rata yang diduga. Sehingga penduga dari parameter kredibilitas Bühlmann adalah

$$\hat{K} = \frac{\hat{v}}{\hat{a}},$$

dan penduga dari faktor kredibilitas yaitu

$$\hat{Z} = \frac{n}{n + \hat{K}}.$$

Oleh karena itu penduga dari perkiraan kredibilitas yang diinginkan yaitu

$$\hat{C} = \hat{Z}\ \overline{x}_i + (1 - \hat{Z})\ \hat{\mu} \qquad , i = 1, 2, \ldots, r.$$

Meskipun $\hat{v}$ dan $\hat{a}$ adalah penduga-penduga tidak bias untuk nilai harapan dari variansi proses dan variansi dari rata-rata yang diduga, nilai estimasi $\hat{Z}$ adalah bias untuk kredibilitas Z. Namun dalam praktek $\hat{Z}$ secara umum diterima sebagai estimasi yang layak untuk kredibilitas yang diinginkan.

4.5 Contoh Aplikasi

Berdasarkan pada pembahasan sebelumnya, pada subbab ini di bahas tentang contoh aplikasi dari teori kredibilitas dengan menggunakan model Bühlmann.

4.5.1 Contoh Aplikasi Model Bühlmann

Dean and Mahler (2006) memberikan contoh aplikasi model Bühlmann yang meliputi frekuensi, tingkat kegawatan, dan premi murni. Informasi data diberikan dalam Tabel 4.5 berikut.

Tabel 4.5 Informasi Data Frekuensi, Tingkat Kegawatan dan Premi Murni

Tipe	Porsi terjadinya risiko dari setiap tipe	Frekuensi berdistribusi Bernoulli	Tingkat kegawatan berdistribusi gamma
1	50%	p = 40%	$\alpha = 4$, $\lambda = 0{,}01$
2	30%	p = 70%	$\alpha = 3$, $\lambda = 0{,}01$
3	20%	p = 80%	$\alpha = 2$, $\lambda = 0{,}01$

Masing-masing tipe diasumsikan homogen, yang berarti setiap tertanggung dari tipe yang diberikan mempunyai frekuensi dan proses tingkat kegawatan yang sama. Untuk tertanggung individual diasumsikan frekuensi dan tingkat kegawatan saling bebas. Tertanggung diambil secara random dari tipe yang tidak diketahui. Tertanggung yang terpilih secara random mempunyai observasi tiga klaim dengan total \$450 selama empat tahun. Kredibilitas Bühlmann digunakan untuk memprediksi frekuensi, tingkat kegawatan, dan premi murni di masa yang akan datang dari tertanggung tersebut.

Penyelesaian.

Penghitungan perkiraan yang diinginkan dimulai dari frekuensi, yang penghitungannya lebih mudah. Kemudian tingkat kegawatan, dan premi murni yang lebih kompleks penghitungannya.

1. **Frekuensi**

Jumlah pengamatan pada frekuensi adalah waktu terjadinya klaim, yaitu $n = 4$.

1.1. Menentukan nilai harapan dari variansi proses.

Frekuensi diketahui berdistribusi Bernoulli dengan variansi sebagai berikut.

$$\sigma_t^2 = p\,q = p\,(1-p)\,. \tag{4.11}$$

Berdasarkan persamaan (4.11) variansi proses dari frekuensi Bernoulli untuk setiap tipe adalah

a. Untuk tipe1, $\sigma_1^2 = (0{,}4)\,(1-0{,}4) = 0{,}24$,

b. Untuk tipe 2, $\sigma_2^2 = (0{,}7)\,(1-0{,}7) = 0{,}21$,

c. Untuk tipe 3, $\sigma_3^2 = (0{,}8)\,(1-0{,}8) = 0{,}16$.

Nilai harapan dari variansi proses adalah rata-rata bobot variansi proses dari tipe-tipe individual, dengan probabilitas awal sebagai bobot maka besar nilai harapan dari variansi proses pada kasus frekuensi yaitu

$$v = (50\%)\,(0{,}24) + (30\%)\,(0{,}21) + (20\%)\,(0{,}16) = 0{,}215\,. \tag{4.12}$$

1.2. Menentukan variansi dari rata-rata yang diduga.

Setelah nilai harapan dari variansi proses diperoleh, langkah selanjutnya adalah menentukan nilai variansi dari rata-rata yang diduga. Rata-rata frekuensi Bernoulli dari setiap tipe telah diketahui sebagai berikut; untuk tipe 1, rata-rata frekuensi yaitu p = 0,4, rata-rata frekuensi tipe 2 yaitu p = 0,7, dan rata-rata frekuensi tipe 3 yaitu p = 0,8. Kemudian kita mencari momen pertamanya yaitu (50%) (0,4) + (30%) (0,7) + (20%) (0,8) = 0,57 dan momen keduanya yaitu (50%) $(0,4)^2$ + (30%) $(0,7)^2$ + (20%) $(0,8)^2$ = 0,355. Sehingga besarnya variansi dari rata-rata yang diduga yaitu

$$a = 0{,}355 - 0{,}57^2 = 0{,}0301. \tag{4.13}$$

1.3. Menentukan *K,* faktor kredibilitas dan perkiraan kredibilitas.

Nilai nilai harapan dari variansi proses dan variansi dari rata-rata yang diduga yang telah diperoleh dalam persamaan (4.12) dan (4.13) digunakan untuk menentukan nilai parameter kredibilitas Bühlmann sebagai berikut.

$$K = \frac{v}{a} = \frac{0{,}215}{0{,}0301} = 7{,}14\,.$$

Kredibilitas Bühlmann untuk pengalaman selama empat tahun dengan menggunakan rumus pada persamaan (4.1) diperoleh sebagai berikut.

$$Z = \frac{4}{4 + 7{,}14} = \frac{4}{11{,}14} = 0{,}359\,.$$

Besarnya observasi frekuensi adalah $\overline{X} = 3/4 = 0{,}75$ dan rata-rata awal frekuensi adalah $\mu = 0{,}57$. Sehingga perkiraan kredibilitas untuk frekuensi tertanggung di masa yang akan datang yaitu

$$C = Z\,\overline{X} + (1 - Z)\,\mu = (0{,}359)\,(0{,}75) + (1 - 0{,}359)\,(0{,}57) = 0{,}635\,.$$

2. **Tingkat kegawatan**

Pertimbangan bobot variansi proses pada tingkat kegawatan untuk tipe-tipe individual menggunakan kemungkinan klaim yang datang dari setiap tipe. Setiap klaim adalah satu observasi pada proses tingkat kegawatan, jumlah pengamatan pada tingkat kegawatan adalah jumlah klaim, sehingga n = 3.

2.1. Menentukan nilai harapan dari variansi proses.

Tingkat kegawatan berdistribusi Gamma $(1/\lambda, \alpha)$. Besarnya variansi proses yaitu

a. Untuk tipe 1, $\sigma_1^2 = 4/0{,}01^2 = 40.000$.

b. Untuk tipe 2, $\sigma_2^2 = 3/0{,}01^2 = 30.000$.

c. Untuk tipe 3, $\sigma_3^2 = 2/0{,}01^2 = 20.000$.

Rata-rata frekuensi yaitu 0,4, 0,7, dan 0,8. Nilai awal pada setiap tipe yaitu 50%, 30%, dan 20%. Maka, besar bobot yang akan digunakan dalam penghitungan nilai harapan dari variansi proses yaitu (0,4) (50%) = 0,2, (0,7) (30%) = 0,21, dan (0,8) (20%) = 0,16. Sehingga nilai harapan dari variansi proses pada tingkat kegawatan yaitu

$$v = \frac{(0{,}2)(40.000) + (0{,}21)(30.000) + (0{,}16)(20.000)}{0{,}2 + 0{,}21 + 0{,}16}$$

$$= 30.702.$$

2.2. Menentukan variansi dari rata-rata yang diduga.

Rata-rata tingkat kegawatan Gamma untuk tipe 1 yaitu $\alpha/\lambda = 4/0{,}01 = 400$, untuk tipe 2 rata-rata tingkat kegawatan yaitu 3/0,01 = 300, dan untuk tipe 3 rata tingkat kegawatan yaitu 2/0,01 = 200. Variansi dari rata-rata yang diduga pada tingkat kegawatan penghitungannya sama dengan variansi yang lainnya. Pertama, kita hitung momen pertamanya yaitu {(0,2) (400) + (0,21) (300) + (0,16) (200)}/(0,2 + 0,21 + 0,16) = 307,02. Kemudian kita hitung momen keduanya yaitu {(0,2) $(400)^2$ + (0,21) $(300)^2$ + (0,16) $(200)^2$}/(0,2 + 0,21 + 0,16) = 100.526. Sehingga, besarnya variansi dari rata-rata yang diduga pada tingkat kegawatan yaitu

$$a = 100.526 - 307{,}02^2 = 6.265.$$

2.3. Menentukan *K*, faktor kredibilitas dan perkiraan kredibilitas.

Besar parameter kredibilitas Bühlmann yaitu

$$K = \frac{v}{a} = \frac{30.702}{6.265} = 4{,}90.$$

Sebelumnya telah diketahui bahwa pada proses tingkat kegawatan observasi adalah klaim, maka faktor kredibilitas Bühlmann yaitu

$$Z = \frac{3}{3 + 4{,}90} = \frac{3}{7{,}90} = 0{,}38\,.$$

Observasi tingkat kegawatan yaitu \$450 / 3 = \$150 dan rata-rata awal yaitu \$307. Sehingga perkiraan kredibilitas untuk tingkat kegawatan tertanggung di masa yang akan datang yaitu

$$C = Z\,\overline{X} + (1 - Z)\,\mu = (0{,}38)\,(150) + (1 - 0{,}38)\,(307) = \$247{,}3\,.$$

3. Premi Murni

Pada premi murni jumlah pengamatan yaitu $n = 4$.

3.1. Menentukan nilai harapan dari variansi proses.

Penghitungan nilai harapan dari variansi proses premi murni mirip dengan penghitungan nilai harapan dari variansi proses pada frekuensi, namun karena premi murni adalah produk dari frekuensi dan tingkat kegawatan maka penghitungan proses variansi premi murni akan lebih rumit. Frekuensi dan tingkat kegawatan diasumsikan saling bebas, maka besarnya variansi proses premi murni yaitu

Variansi proses = (rata-rata frekuensi) (variansi tingkat kegawatan) + (rata-rata tingkat kegawatan)^2 (variansi frekuensi). (4.14)

Penghitungan variansi proses dari setiap tipe adalah sebagai berikut.

a. Untuk tipe 1

Rata-rata frekuensi Bernoulli yaitu p = 0,4 dan variansi frekuensi Bernoulli yaitu $pq = (0{,}4)(1 - 0{,}4) = 0{,}24$. Rata-rata tingkat kegawatan Gamma yaitu $\alpha / \lambda = 4 / 0{,}01 = 400$ dan variansi tingkat kegawatan

Gamma yaitu $\alpha/\lambda^2 = 4/0{,}01^2 = 40.000$. Maka menurut persamaan (4.14), variansi proses dari premi murni untuk tipe 1 yaitu (0,4) (40.000) + $(400)^2$ (0,24) = 54.400.

b. Untuk tipe 2

Rata-rata frekuensi Bernoulli yaitu p = 0,7 dan variansi frekuensi Bernoulli yaitu $pq = (0{,}7)(1-0{,}7) = 0{,}21$. Rata-rata tingkat kegawatan Gamma yaitu $\alpha/\lambda = 3/0{,}01 = 300$ dan variansi tingkat kegawatan Gamma yaitu $\alpha/\lambda^2 = 3/0{,}01^2 = 30.000$. Maka menurut persamaan (4.14), variansi proses dari premi murni untuk tipe 2 yaitu (0,7) (30.000) + $(300)^2$ (0,21) = 39.900.

c. Untuk Tipe 3

Rata-rata frekuensi Bernoulli yaitu p = 0,8 dan variansi frekuensi Bernoulli yaitu $pq = (0{,}8)(1-0{,}8) = 0{,}16$. Rata-rata tingkat kegawatan Gamma yaitu $\alpha/\lambda = 2/0{,}01 = 200$ dan variansi tingkat kegawatan Gamma yaitu $\alpha/\lambda^2 = 2/0{,}01^2 = 20.000$. Maka menurut persamaan (4.14), variansi proses dari premi murni untuk tipe 3 yaitu (0,8) (20.000) + $(200)^2$ (0,16) = 22.400.

Oleh karena itu nilai harapan dari variansi proses untuk premi murni yaitu

$$v = (50\%)(54.400) + (30\%)(39.900) + (20\%)(22.400) = 43.650.$$

3.2. Menentukan variansi dari rata-rata yang diduga.

Penghitungan variansi dari rata-rata yang diduga pada premi murni mirip penghitungan pada frekuensi, dengan besar rata-rata premi murni yaitu

Rata-rata Premi Murni = (rata-rata frekuensi) (rata-rata tingkat kegawatan). (4.15)

Rata-rata premi murni untuk setiap tipe menurut persamaan (4.15) yaitu

a. Untuk tipe 1, rata-rata premi murni = (0,4) (400) = 160.
b. Untuk tipe 2, rata-rata premi murni = (0,7) (300) = 210.
c. Untuk tipe 3, rata-rata premi murni = (0,8) (200) = 160.

Momen pertama untuk premi murni yaitu (50%) (160) + (30%) (210) + (20%) (160) = 175, dan momen kedua untuk premi murni yaitu (50%) $(160)^2$ + (30%) $(210)^2$ + (20%) $(160)^2$ = 31.150. Jadi, besarnya variansi dari rata-rata yang diduga pada premi murni yaitu

$$a = 31.150 - 175^2 = 525.$$

3.3. Menentukan *K,* faktor kredibilitas dan perkiraan kredibilitas.

Besar parameter kredibilitas Bühlmann yaitu

$$K = \frac{v}{a} = \frac{43.650}{525} = 83{,}1.$$

Faktor kredibilitas Bühlmann yaitu

$$Z = \frac{4}{4 + 83{,}1} = 0{,}046\,.$$

Observasi premi murni yaitu \$450/4 = \$112,5 dan rata-rata awal yaitu \$175. Sehingga perkiraan kredibilitas untuk premi murni dari tertanggung di masa yang akan datang yaitu

$$C = Z\,\overline{X} + (1 - Z)\,\mu = (0{,}046)(112{,}5) + (1 - 0{,}046)(175) = \$172\,.$$

4.5.2 Contoh Aplikasi Estimasi Parameter Kredibilitas Bühlmann

Sebuah perusahaan asuransi mempunyai dua kelompok polis pengganti kerugian para pekerja. Jumlah klaim keseluruhan (dalam jutaan dollar) untuk tiga tahun pertama polis diringkas dalam Tabel 4.6. Model Bühlmann digunakan untuk mengestimasi jumlah klaim keseluruhan selama tahun keempat polis untuk masing-masing dua kelompok polis (Herzog, 1996).

Tabel 4.6 Jumlah Klaim Keseluruhan

Jumlah klaim keseluruhan			
Kelompok polis	Tahun polis		
	1	2	3
1	5	8	11
2	11	13	12

Penyelesaian

Diketahui bahwa terdapat dua kelompok polis dan tiga tahun pengalaman data dari masing-masing polis, maka diperoleh r = 2 dan n = 3. Vektor klaim pengamatan untuk kedua polis yaitu

$$x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13}) = (5,8,11)$$

dan
$$x_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23}) = (11,13,12).$$

Rata-rata klaim pengamatan untuk masing-masing polis yaitu

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = \frac{5+8+11}{3} = 8$$

dan

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{2j} = \frac{11+13+12}{3} = 12.$$

Estimasi rata-rata keseluruhan (rata-rata awal) yaitu

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \bar{x}_i = \frac{8+12}{2} = 10.$$

Variansi proses masing-masing polis yaitu

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} (x_{1j} - \bar{x}_1)^2 = \frac{1}{2}[(5-8)^2 + (8-8)^2 + (11-8)^2] = 9$$

dan

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} (x_{2j} - \bar{x}_2)^2 = \frac{1}{2}[(11-12)^2 + (13-12)^2 + (12-12)^2] = 1.$$

Estimasi nilai harapan dari variansi proses yaitu

$$\hat{v} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{2}(9+1) = 5.$$

Estimasi variansi dari rata-rata yang diduga yaitu

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 - \frac{\hat{v}}{n} \\ &= \frac{1}{2-1}[(8-10)^2 + (12-10)^2] - \frac{5}{3} = \frac{19}{3}.\end{aligned}$$

Estimasi parameter kredibilitas Bühlmann yaitu

$$\hat{K} = \frac{\hat{v}}{\hat{a}} = \frac{5}{19/3} = 0{,}78947 .$$

Oleh karena parameter-parameter kredibilitas Bühlmann yang digunakan untuk menentukan faktor kredibilitas telah diketahui, maka estimasi dari faktor kredibilitas untuk setiap kelompok polis dapat ditentukan sebagai berikut

$$\hat{Z} = \frac{n}{n+\hat{K}} = \frac{3}{3+0{,}78947} = 0{,}79167.$$

Setelah faktor kredibilitas diperoleh, estimasi jumlah klaim dari masing-masing kelompok polis untuk tahun keempat polis dapat ditentukan sebagai berikut.

1. Estimasi jumlah klaim untuk kelompok polis pertama yaitu

$$\hat{C} = \hat{Z}\,\bar{x}_1 + (1-\hat{Z})\,\hat{\mu} = (0{,}79167)(8) + (0{,}20833)(10) = 8{,}41666 .$$

2. Estimasi jumlah klaim untuk kelompok polis kedua yaitu

$$\hat{C} = \hat{Z}\,\bar{x}_2 + (1-\hat{Z})\,\hat{\mu} = (0{,}79167)(12) + (0{,}20833)(10) = 11{,}58334 .$$

Sehingga perkiraan kredibilitas untuk kelompok polis pertama pada tahun keempat polis yaitu sebanyak 8,41666 klaim dan perkiraan kredibilitas untuk kelompok polis kedua pada tahun keempat polis yaitu sebanyak 11,58334 klaim.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan maka dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Faktor kredibilitas yang dirumuskan oleh kredibilitas Bühlmann adalah

   $$Z = \frac{n}{n+K},$$

   dengan $0 \le Z \le 1$ dan n menyatakan jumlah pengamatan. Parameter kredibilitas Bühlmann dinotasikan sebagai berikut

   $$K = \frac{v}{a}.$$

   Nilai harapan dari variansi proses yaitu

   $$v = E_{X|\Theta}[Var_{X|t}[X_t \mid \Theta]] = E_{X|\Theta}[\sigma^2(\Theta)].$$

   Variansi dari rata-rata yang diduga yaitu

   $$a = Var_{\Theta}[\mu(\Theta)] = E_{\Theta}[(\mu(\Theta) - \mu)^2].$$

2. Langkah-langkah dalam menentukan perkiraan kredibilitas menggunakan kredibilitas Bühlmann yaitu
   a. Menentukan n atau jumlah pengamatan.
   b. Menentukan nilai harapan dari variansi proses.
   c. Menentukan variansi dari rata-rata yang diduga.
   d. Menghitung K.
   e. Menentukan faktor kredibilitas Z.
   f. Menentukan perkiraan kredibilitas yang diinginkan yaitu

   $$C = Z\,\overline{X} + (1 - Z)\,\mu.$$

3. Parameter-parameter kredibilitas Bühlmann diestimasi berdasarkan data empiris yang diamati. Penduga tidak bias untuk nilai harapan dari variansi proses yaitu

$$\hat{v} = \left(\frac{1}{r}\right)\sum_{i=1}^{r} \hat{\sigma}_i^2 = \left(\frac{1}{r(n-1)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{t=1}^{n}(x_{it} - \bar{x}_i)^2\right).$$

Penduga tidak bias untuk variansi dari rata-rata yang diduga yaitu

$$\hat{a} = V\hat{a}r[\bar{x}_i] - \frac{\hat{v}}{n}$$

$$= \left(\frac{1}{r-1}\right)\sum_{i=1}^{r}(\bar{x}_i - \bar{x})^2 - \frac{\left\{\left(\frac{1}{r(n-1)}\right)\sum_{i=1}^{r}\sum_{t=1}^{n}(x_{it} - \bar{x}_i)^2\right\}}{n}.$$

Penduga dari parameter kredibilitas Bühlmann *K*, yaitu

$$\hat{K} = \frac{\hat{v}}{\hat{a}}.$$

Oleh karena itu faktor kredibilitas dapat diestimasi sebagai berikut

$$\hat{Z} = \frac{n}{n + \hat{K}},$$

dan penduga dari perkiraan kredibilitas adalah

$$\hat{C} = \hat{Z}\,\bar{x}_i + (1 - \hat{Z})\,\hat{\mu} \qquad , i = 1, 2, \ldots, r.$$

5.2 Saran

Dalam skripsi ini hanya dibahas tentang cara menentukan perkiraan kredibilitas dengan menggunakan model Bühlmann. Bagi pembaca yang tertarik dengan pembahasan ini, penulis memberikan saran

1. Pada metode kredibilitas keakuratan terbesar selain menggunakan model Bühlmann, juga dapat menggunakan model Bühlmann-Straub, untuk menentukan perkiraan kredibilitas yang diinginkan.
2. Perkiraan kredibilitas juga dapat ditentukan dengan pendekatan kredibilitas fluktuasi terbatas dan pendekatan analisis Bayesian.

DAFTAR PUSTAKA

Bain, L. J., and M. Engelhardt. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics.* Duxbury Press, California.

Dean, C. G., and H. C. Mahler. (2006). *Credibility.* Download available at http:// www.casact.org / admissions / syllabus / Ch.8.pdf.

Dean, C. G. (2005). *Topics in Credibility Theory*. Download available at http:// www.soa.org/ ccm/ cms-service/ stream/ asset/ asset-id = 80195051.

Denuit, M., Kaas, R., Goovaerts, M., and Dhaene, J. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory.* Kluwer Academic Publishers, London.

Djojosoedarso, S. (1999). *Prinsip-Prinsip Manejemen Resiko dan Asuransi*. Salemba Empat, Jakarta.

Herzog, T. N. (1996). *Introduction to Credibility Theory.* Second Edition. ACTEX, Winsted.

Salim, A. (1998). *Asuransi dan Manajemen Resiko.* Edisi Revisi Kedua. PT. Raja Grafindo Persada, Jakarta.