

**METODE RANK NONPARAMETRIK
PADA MODEL REGRESI LINEAR**



oleh
KUSUMA
M0102004

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan
memperoleh gelar Sarjana Sains Matematika

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SEBELAS MARET SURABAYA

2007

SKRIPSI
METODE RANK NONPARAMETRIK
PADA MODEL REGRESI LINEAR

yang disiapkan dan disusun oleh

KUSUMA

M0102004

dibimbing oleh

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Dra. Sri Subanti, M. Si.

Dra. Mania Roswitha, M. Si.

NIP 131 568 293

NIP 130 285 863

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji
pada hari Senin, tanggal 4 Juni 2007
dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Anggota Tim Penguji

Tanda Tangan

1. Dra. Yuliana Susanti, M. Si.

1.

2. Dra. Etik Zukhronah, M. Si.

2.

3. Irwan Susanto, DEA

3.

Surakarta, 14 Juni 2007

Disahkan oleh

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dekan,

Ketua Jurusan Matematika,

Prof. Drs. Sutarno, M. Sc., Ph. D.

Drs. Kartiko, M. Si.

NIP 130 906 776

NIP 131 569 203

ABSTRAK

Kusuma, 2007. METODE RANK NONPARAMETRIK PADA MODEL REGRESI LINEAR. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Universitas Sebelas Maret.

Persamaan $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$ merupakan model regresi linear dengan β_i adalah parameter regresi yang diestimasi berdasarkan data pengamatan. Metode kuadrat terkecil merupakan metode estimasi parameter regresi yang dapat memberikan hasil yang optimal jika sesatannya diasumsikan berdistribusi normal, $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$. Jika kenormalan tidak dipenuhi maka estimasi parameter regresi yang diperoleh tidak tepat. Sesatan yang tidak berdistribusi normal dapat diindikasikan dengan adanya pencilan (*outlier*).

Metode rank nonparametrik merupakan metode estimasi parameter regresi yang dapat digunakan untuk menganalisis data jika sesatannya tidak berdistribusi normal yang diindikasikan dengan adanya pencilan. Tujuan dalam penulisan skripsi adalah menentukan estimasi parameter regresi dan uji signifikansi parameter regresi untuk mengetahui hubungan antara variabel bebas dengan variabel tak bebas menggunakan metode rank nonparametrik. Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi adalah studi literatur.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa estimasi parameter regresi diperoleh dengan meminimumkan jumlah rank sisaan berbobot. Hipotesis yang digunakan pada regresi linear sederhana adalah $H_0: \beta = 0$ dan $H_1: \beta \neq 0$ dengan statistik uji

$$|t| = \frac{|U|}{SD(U)}.$$

Hipotesis nol H_0 ditolak jika $p < \alpha$ dengan $p = Prob [|T| \geq |t|]$ dan nilai p diperoleh menggunakan tabel distribusi t dengan derajat bebas $n - 2$. Pada regresi linear ganda, hipotesis yang digunakan adalah $H_0: \beta_{l+1} = \dots = \beta_k = 0$ dan $H_1: \beta_{l+1, \dots, k} \neq 0$ dengan statistik uji

$$F_{rank} = \frac{JRSB_{tereduksi} - JRSB_{penuh}}{(k-l) \hat{c} \tau}.$$

Hipotesis nol H_0 ditolak jika $p < \alpha$ dengan $p = Prob [F \geq F_{rank}]$ dan nilai p diperoleh menggunakan tabel distribusi F dengan derajat bebas $k - l$ dan $n - k - 1$.

Kata kunci: model regresi linear, metode rank nonparametrik

ABSTRACT

Kusuma, 2007. NONPARAMETRIC RANK METHOD ON LINEAR REGRESSION MODEL. Faculty of Mathematics and Natural Sciences. Sebelas Maret University.

The equation $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$ is a model of a linear regression with β_i are regression parameters which are estimated based on the observations of data. The least square method is a method to estimate the regression parameters that gives an optimal result if the error terms assumed have normally distributed, $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$. If the normality assumption is not satisfied then estimation of regression parameters is not exact. The violation of normality assumption is indicated by the occurrence of outliers.

The nonparametric rank method can be used to analyze the data if the errors have not normally distribution which indicated by the occurrence of outliers. The aims of the final project are to estimate the regression parameters and to test the significance of regression parameters to know the relationship of independent variable with dependent variable, using the method of nonparametric rank. The method used in this final project is a literary study.

Based on the discussion, it can be concluded that estimation of regression parameters is obtained by minimizing the sum of rank – weighted residuals. The hypothesis used on simple linear regression is $H_0: \beta = 0$ versus $H_1: \beta \neq 0$ with the test statistics

$$|t| = \frac{|U|}{SD(U)}.$$

The zero hypothesis H_0 is rejected when $p < \alpha$ where $p = Prob [|T| \geq |t|]$ and p value is obtained by using t distribution table with $n - 2$ degrees of freedom. On the multiple linear regression, the hypothesis used is $H_0: \beta_{l+1} = \dots = \beta_k = 0$ versus $H_1: \beta_{l+1, \dots, k} \neq 0$ with the test statistics

$$F_{rank} = \frac{JRSB_{tereduksi} - JRSB_{penuh}}{(k-l) \hat{c} \tau}.$$

The zero hypothesis H_0 is rejected when $p < \alpha$ where $p = Prob [F \geq F_{rank}]$ and p value is obtained by using F distribution table with $k - l$ and $n - k - 1$ degrees of freedom.

Key words: linear regression model, nonparametric rank method

MOTO

Empat kiat " P "

Untuk meraih keberhasilan

Perencanaan yang bertujuan.

Persiapan yang penuh DOA.

Proses yang positif

Pengejaran yang penuh ketabahan

Lakukan Hari Ini

Lakukan hal yang benar ,

Lakukan hari ini .

Lakukan dengan tidak mengharapakan penghargaan ,

Lakukan dengan senyuman dan sikap yang ceria ,

Lakukan terus hari demi hari demi hari .

Lakukan dan suatu saat ,

Akan datang harinya ,

Yang merupakan hari perolehan gaji ,

Karena setiap hari yang kemarin yang anda habiskan ,

Mengarah pada hari ini .

Yang tidak hanya akan memberi nilai pada hari ini ,

Tapi juga akan membuat hari-hari berikutnya ,

Lebih terang dari hari-hari kemarin .

Dan apa lagi yang akan anda minta dari sebuah Hari ?

PERSEMBAHAN

Karya ini kupersembakan untuk

My Father in the heaven....

My Mom ... I love U S o Mu CH

My Brother n My Sister.....Thanx for all

Aat, Dwii, Lia, Lisha, *Naomii*, Fennie dan Trisna .

My friend (**Stephanus J** ohan.)...always" t hanX....

KATA PENGANTAR

Dengan kasih karunia dari Allah Bapa, penulis mengucapkan syukur atas terselesaikannya skripsi yang berjudul “ METODE RANK NONPARAMETRIK PADA MODEL REGRESI LINEAR” yang diajukan sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar kesarjanaan pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Dra. Sri Subanti, M.Si sebagai Pembimbing I yang telah memberikan motivasi, petunjuk serta pengarahan dalam penulisan skripsi ini.
2. Dra. Mania Roswitha, M.Si sebagai Pembimbing II yang telah memberikan petunjuk serta pengarahan dalam penulisan skripsi ini.
3. Dra. Yuliana Susanti, M. Si sebagai pembimbing akademis yang telah memberikan bimbingan akademis.
4. Seluruh staf dosen dan karyawan, khususnya di jurusan Matematika dan umumnya di Fakultas MIPA.
5. Rekan-rekan jurusan Matematika khususnya angkatan 2002 FMIPA UNS atas dukungannya.
6. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam penyusunan skripsi ini.

Akhirnya, semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat sebagaimana yang diharapkan.

Terima kasih.

Surakarta, Juni 2007

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
JUDUL	i
PENGESAHAN.....	ii
ABSTRAK	iii
ABSTRACT	iv
MOTO.....	v
PERSEMBAHAN.....	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR TABEL	x
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR LAMPIRAN.....	xii
DAFTAR NOTASI DAN SIMBOL	xiv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah.....	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan Penulisan.....	2
1.5 Manfaat Penulisan.....	3
BAB II LANDASAN TEORI.....	4
2.1 Tinjauan Pustaka.....	4
2.1.1 Konsep Dasar Statistika.....	4
2.1.2 Distribusi Normal.....	5
2.1.3 Model Regresi Linear	5
2.1.4 Uji Hipotesis	6
2.1.5 Matriks dan Operasi Matriks	6
2.1.6 Metode Kuadrat Terkecil dengan Matriks.....	7
2.1.7 Rank.....	8
2.1.8 Metode Rank Nonparametrik.....	9

2.2 Kerangka Pemikiran.....	9
BAB III METODE PENULISAN.....	10
BAB IV PEMBAHASAN.....	11
4.1 Estimasi Parameter Regresi Linear Sederhana.....	11
4.2 Uji Signifikansi Parameter Regresi Linear Sederhana.....	15
4.3 Estimasi Parameter Regresi Linear Ganda.....	17
4.3.1 Algoritma	17
4.4 Uji Signifikansi Parameter Regresi Linear Ganda.....	21
4.5 Contoh Kasus Regresi Linear Sederhana.....	24
4.6 Contoh Kasus Regresi Linear Ganda.....	34
BAB V PENUTUP.....	48
5.1 Kesimpulan.....	48
5.2 Saran	49
DAFTAR PUSTAKA	50
LAMPIRAN	51

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 4.1 Data Tingkat Kelahiran	24
Tabel 4.2 Hasil Perhitungan $y_i - bx_i$	30
Tabel 4.3 Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Nilai U	32
Tabel 4.4 Data Oksidasi Amonia NH_3 menjadi Asam Nitrat HNO_3	34
Tabel 4.5 Hasil Perhitungan Vektor u^0 pada Iterasi Pertama.....	39
Tabel 4.6 Hasil Perhitungan Vektor u^0 pada Iterasi Kedua	41
Tabel 4.7 Hasil Perhitungan $y_i - b'x_i$	43
Tabel 4.8 Hasil Perhitungan untuk $JRSB_{penuh}$	44
Tabel 4.9 Hasil Perhitungan untuk $JRSB_{tereduksi}$	45
Tabel 11. a Hasil Perhitungan vektor u^0 pada Iterasi Ketiga.....	64
Tabel 11. b Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Nilai t pada Iterasi Ketiga.	65
Tabel 12. a Hasil Perhitungan vektor u^0 pada Iterasi Keempat	68
Tabel 12. b Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Nilai t pada Iterasi Keempat.....	69
Tabel 13. a Hasil Perhitungan vektor u^0 pada Iterasi Kelima.....	72
Tabel 13. b Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Nilai t pada Iterasi Kelima	73
Tabel 14. a Hasil Perhitungan vektor u^0 pada Iterasi Keenam	76
Tabel 14. b Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Nilai t pada Iterasi Keenam.....	77
Tabel 15. a Hasil Perhitungan vektor u^0 pada Iterasi Ketujuh.....	80
Tabel 15. b Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Nilai t pada Iterasi Ketujuh	81

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 4.1 Output Analisis Regresi untuk Data Penuh pada Data Tingkat Kelahiran.....	25
Gambar 4.2 Plot Sisaan dengan Metode Kuadrat Terkecil untuk Data Penuh pada Data Tingkat Kelahiran.....	26
Gambar 4.3 Ouput Analisis Regresi Tanpa Data Observasi 13 pada Data Tingkat Kelahiran.....	27
Gambar 4.4 Output Analisis Regresi Tanpa Data Observasi 13 dan 3 pada Data Tingkat Kelahiran.....	28
Gambar 4.5 Plot Sisaan dengan Metode Rank Nonparametrik.....	31
Gambar 4.6 Estimasi Garis Regresi dengan Metode Rank Nonparametrik...	30
Gambar 4.7 Output Analisis Regresi untuk Data Penuh pada Data Oksidasi Amonia NH_3 menjadi Asam Nitrat HNO_3	35
Gambar 4.8 Plot Sisaan dengan Metode Kuadrat Terkecil untuk Data Penuh pada Data Oksidasi Amonia NH_3 menjadi Asam Nitrat HNO_3	36
Gambar 4.9 Output Analisis Regresi Tanpa Data Observasi 21 pada Data Oksidasi Amonia NH_3 menjadi Asam Nitrat HNO_3	37

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1. Output Analisis Regresi Tanpa Data Observasi 21 dan 4 pada Data Oksidasi Amonia NH_3 menjadi Asam Nitrat HNO_3	51
Lampiran 2. Output Analisis Regresi Tanpa Data Observasi 21, 4 dan 3 pada Data Oksidasi Amonia NH_3 menjadi Asam Nitrat HNO_3	51
Lampiran 3. Output Analisis Regresi Tanpa Data Observasi 21, 4, 3 dan 1 pada Data Oksidasi Amonia NH_3 menjadi Asam Nitrat HNO_3	52
Lampiran 4. Output Analisis Regresi Tanpa Data Observasi 21, 4, 3, 1 dan 10 pada Data Oksidasi Amonia NH_3 menjadi Asam Nitrat HNO_3	53
Lampiran 5. Matriks X_c dan Matriks X_c'	54
Lampiran 6. Vektor u^0 pada Iterasi Pertama sampai Ketujuh.....	55
Lampiran 7. Tabel Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Estimasi Parameter Regresi β	56
Lampiran 8. Tabel Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Nilai t pada Iterasi Pertama.....	57
Lampiran 9. Tabel Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Nilai t pada Iterasi Kedua	59
Lampiran 10. Tabel Hasil Perhitungan untuk Rata-Rata Pasangan Sisaan dengan Urutan dari Kecil ke Besar	62
Lampiran 11. Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Vektor u^0 , Vektor d , Nilai t dan Vektor b^* pada Iterasi Ketiga	64
Lampiran 12. Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Vektor u^0 , Vektor d , Nilai t dan Vektor b^* pada Iterasi Keempat	68
Lampiran 13. Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Vektor u^0 , Vektor d , Nilai t dan Vektor b^* pada Iterasi Kelima	72

Lampiran 14. Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Vektor u^0 , Vektor d , Nilai t dan Vektor b^* pada Iterasi Keenam	76
Lampiran 15. Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Vektor u^0 , Vektor d , Nilai t dan Vektor b^* pada Iterasi Ketujuh.....	80

DAFTAR NOTASI DAN SIMBOL

$f()$: fungsi densitas probabilitas
α, β	: parameter regresi
Y	: variabel tak bebas
X	: variabel bebas
ε	: sesatan random
e	: sisaan untuk sampel
τ	: deviasi standar untuk populasi dalam metode rank nonparametrik
$ t $: statistik uji untuk regresi linear sederhana
F_{rank}	: statistik uji untuk regresi linear ganda
$JRSB_{penuh}$: jumlah rank sisaan berbobot untuk model penuh
$JRSB_{tereduksi}$: jumlah rank sisaan berbobot untuk model tereduksi
H_0	: hipotesis nol
H_1	: hipotesis alternatif
b_{ij}	: <i>slope</i> untuk pasangan titik data (x_i, y_i) dan (x_j, y_j)
A_{ij}	: rata-rata untuk pasangan sisaan e_i dan e_j
x_i	: matriks dari k variabel bebas pada baris ke - i
b	: vektor kolom dari estimasi parameter regresi β_1, \dots, β_k

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Analisis regresi merupakan analisis statistik yang digunakan untuk mengetahui hubungan antara variabel bebas X dengan variabel tak bebas Y yang terdapat dalam data. Hubungan antara variabel dapat dinyatakan dalam suatu model yang berbentuk fungsi. Menurut Birkes dan Dodge (1993), persamaan $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k) + \varepsilon$ merupakan model regresi yang tersusun dari fungsi regresi $f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ dan sesatan random ε . Model regresi seringkali belum diketahui dan ditentukan setelah data pengamatan terkumpul dan dianalisis. Model regresi yang paling sederhana yaitu hubungan fungsional antara satu variabel bebas dengan variabel tak bebas yang berupa garis lurus.

Model regresi linear merupakan model regresi dengan fungsi regresi yang berbentuk linear. Persamaan $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$ merupakan model regresi linear dengan β_i adalah parameter regresi yang diestimasi berdasarkan data pengamatan. Metode yang biasa digunakan untuk estimasi parameter regresi adalah metode kuadrat terkecil. Metode kuadrat terkecil dapat memberikan hasil yang optimal jika sesatannya diasumsikan berdistribusi normal, $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$. Pada kenyataannya, asumsi kenormalan tidak selalu dipenuhi sehingga estimasi parameter regresi yang diperoleh tidak tepat. Sesatan yang tidak berdistribusi normal dapat diindikasikan dengan adanya pencilan (*outlier*). Oleh karena itu, diperlukan metode estimasi parameter regresi yang sesuai untuk data dan sesatannya tidak berdistribusi normal yang diindikasikan dengan adanya pencilan. Salah satu metode yang digunakan adalah metode rank nonparametrik.

Menurut Birkes dan Dodge (1993), metode rank nonparametrik merupakan metode estimasi parameter regresi yang tidak tergantung asumsi kenormalan pada sesatan. Dalam hal ini merupakan metode untuk mengendalikan pengaruh pencilan pada sekumpulan data. Pengamatan berpengaruh merupakan suatu

pengamatan yang jika dikeluarkan dari analisis mengakibatkan perubahan yang cukup besar pada model regresinya.

Pada model regresi linear, sisaan dapat menunjukkan penyimpangan model dengan data. Semakin besar nilai sisaan maka semakin besar penyimpangan antara model dengan data. Estimasi parameter regresi ditentukan untuk memperoleh model yang sesuai dengan data. Pada metode rank nonparametrik, estimasi parameter regresi diperoleh dengan meminimumkan jumlah rank sisaan berbobot. Selanjutnya, dapat diperoleh estimasi persamaan regresi yang memiliki beberapa kegunaan, diantaranya sebagai dasar untuk menguji signifikansi hubungan antara variabel bebas dengan variabel tak bebas.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana menentukan estimasi parameter regresi dengan metode rank nonparametrik ?
2. Bagaimana menguji signifikansi parameter regresi dengan metode rank nonparametrik ?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah data yang digunakan memuat pencilan (*outlier*) pada regresi linear sederhana dan regresi linear ganda.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Dapat menentukan estimasi parameter regresi dengan metode rank nonparametrik.
2. Dapat menguji signifikansi parameter regresi dengan metode rank nonparametrik.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat yang dapat diperoleh dari penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Manfaat teoritis yaitu dapat menambah pengetahuan mengenai metode rank nonparametrik dalam mengestimasi parameter regresi dan menguji signifikansi parameter regresi.
2. Manfaat praktis yaitu dapat menerapkan metode rank nonparametrik jika asumsi kenormalan pada sesatan tidak dipenuhi yang diindikasikan dengan adanya pencilan.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Tinjauan Pustaka

Untuk mencapai tujuan penulisan, diperlukan pengertian dan teori-teori yang melandasinya. Pada bab ini diberikan penjelasan tentang konsep dasar statistika, distribusi normal, model regresi linear, uji hipotesis, matriks serta operasinya, metode kuadrat terkecil dengan matriks, rank dan metode rank nonparametrik.

2.1.1 Konsep Dasar Statistika

Pengertian tentang ruang sampel, variabel random, fungsi densitas probabilitas, variabel random independen, variabel random kontinu dan sampel random diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.1 (Bain dan Engelhardt, 1992) *Ruang sampel adalah himpunan semua hasil (outcomes) yang mungkin dari suatu eksperimen dan dinotasikan dengan S .*

Definisi 2.2 (Bain dan Engelhardt, 1992) *Variabel random X adalah suatu fungsi yang memetakan setiap hasil e yang mungkin pada ruang sampel S dengan suatu bilangan real x sedemikian hingga $X(e) = x$.*

Definisi 2.3 (Bain dan Engelhardt, 1992) *Fungsi densitas probabilitas (fdp) dari variabel random X dinyatakan sebagai*

$$\begin{aligned} f(x) &= P[X = x], \quad x = x_1, x_2, \dots, x_n && \text{jika } X \text{ diskrit} \\ &= \frac{d}{dx} F(x) = F'(x) && \text{jika } X \text{ kontinu.} \end{aligned}$$

Definisi 2.4 (Bain dan Engelhardt, 1992) *Variabel random X_1, \dots, X_n dikatakan independen jika*

$$p[a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n] = \prod_{i=1}^n P[a_i \leq x_i \leq b_i], \text{ untuk setiap } a_i \leq b_i.$$

Definisi 2.5 (Bain dan Engelhardt, 1992) *Jika himpunan semua harga yang mungkin dari variabel random X terletak di sepanjang interval maka X disebut variabel random kontinu.*

Definisi 2.6 (Bain dan Engelhardt, 1992) *Himpunan dari variabel random X_1, \dots, X_n dikatakan sebagai sampel random berukuran n dari suatu populasi dengan fungsi densitas $f(x)$ jika fdp bersamanya memiliki bentuk*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n).$$

2.1.2 Distribusi Normal

Definisi 2.7 (Bain dan Engelhardt, 1992) *Distribusi normal dengan rata-rata μ dan variansi σ^2 dinotasikan dengan $N(\mu, \sigma^2)$ mempunyai fungsi densitas probabilitas*

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ untuk } -\infty < x < \infty.$$

Distribusi normal dengan rata-rata $\mu = 0$ dan variansi $\sigma^2 = 1$ disebut distribusi normal standar yang dinotasikan dengan $N(0,1)$ dan mempunyai fungsi densitas probabilitas

$$f(x; 0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ untuk } -\infty < x < \infty.$$

2.1.3 Model Regresi Linear

Menurut Sembiring (1995), model regresi adalah model yang memberikan gambaran mengenai hubungan antara variabel bebas X dengan variabel tak bebas Y yang dipengaruhi oleh beberapa parameter regresi yang belum diketahui nilainya. Jika analisis regresi dilakukan untuk satu variabel bebas dengan satu variabel tak bebas, maka regresi ini dinamakan regresi linear sederhana dengan

model $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon$. Jika X_1, X_2, \dots, X_k adalah variabel bebas dan Y adalah variabel tak bebas, maka regresi ini dinamakan regresi linear ganda dan model regresinya adalah $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$ dengan $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$.

2.1.4 Uji Hipotesis

Definisi 2.8 (Walpole dan Myers, 1995) *Hipotesis statistik adalah suatu anggapan atau pernyataan yang mungkin benar atau tidak, mengenai satu populasi atau lebih.*

Hipotesis ada dua macam yaitu hipotesis nol dan hipotesis alternatif. Pengujian hipotesis terhadap suatu nilai parameter tergantung kasus yang diselidiki, akibatnya definisi terhadap kedua hipotesis tersebut relatif terhadap kasus yang ada.

2.1.5 Matriks dan Operasi Matriks

Menurut Anton (1992), matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan yang secara umum dituliskan sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{11} sampai a_{mn} disebut entri dari matriks A dan dinyatakan secara umum dengan a_{ij} , $i=1,2,\dots,m$ dan $j=1,2,\dots,n$. Matriks yang mempunyai m baris dan n kolom disebut matriks berorde (berukuran) $m \times n$.

Definisi 2.9 (Hadley, 1992) *Matriks bujur sangkar adalah matriks yang mempunyai jumlah baris dan kolom yang sama.*

Definisi 2.10 (Hadley, 1992) *Matriks identitas orde- n yang dinotasikan dengan I atau I_n adalah matriks bujur sangkar dengan entri-entri pada diagonal utamanya*

adalah 1 dan untuk yang lainnya adalah 0. Jika A adalah matriks bujur sangkar dan I adalah matriks identitas orde- n maka perkaliannya adalah $IA = AI = A$.

Definisi 2.11 (Hadley, 1992) Invers dari matriks bujur sangkar A adalah suatu matriks yang dinotasikan dengan A^{-1} dan $A^{-1}A = A A^{-1} = I$.

Definisi 2.12 (Hadley, 1992) Jika A adalah suatu matriks dan c adalah sembarang skalar maka hasil kali (product) cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A dengan c .

Definisi 2.13 (Hadley, 1992) Jika A adalah sembarang matriks berorde $m \times n$ ($A_{m \times n}$) maka tranpos ($A_{m \times n}$) dinyatakan dengan A' berorde $n \times m$ yang barisnya merupakan kolom dari $A_{m \times n}$ dan kolomnya merupakan baris dari $A_{m \times n}$. Jadi, jika

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

maka tranpos dari $A_{m \times n}$ adalah

$$(A_{m \times n})' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

2.1.6 Metode Kuadrat Terkecil dengan Matriks

Vektor $b = (b_0, b_1, \dots, b_k)'$ merupakan estimasi vektor parameter regresi $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)'$. Menurut Sembiring (1995), dalam estimasi parameter regresi $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ pada n data pengamatan,

$$J = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2} - \cdots - \beta_p x_{ik})^2 \quad (2.1)$$

haruslah minimum. Pada persamaan (2.1), $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}$ dan y_i merupakan data pengamatan. Estimasi parameter regresi diperoleh dengan menurunkan J secara

parsial terhadap parameter regresi $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ kemudian menyamakannya dengan nol. Dengan mengganti parameter regresi $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ dengan estimasinya yaitu b_0, b_1, \dots, b_k maka diperoleh suatu sistem persamaan linear

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n y_i &= nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_{i1} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{i2} + \dots + b_k \sum_{i=1}^n x_{ik} \\
 \sum_{i=1}^n y_i x_{i1} &= b_0 \sum_{i=1}^n x_{i1} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{i2} x_{i1} + \dots + b_k \sum_{i=1}^n x_{ik} x_{i1} \\
 \sum_{i=1}^n y_i x_{i2} &= b_0 \sum_{i=1}^n x_{i2} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{i1} x_{i2} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{i2}^2 + \dots + b_k \sum_{i=1}^n x_{ik} x_{i2} \\
 &\dots\dots\dots \\
 \sum_{i=1}^n y_i x_{ik} &= b_0 \sum_{i=1}^n x_{ik} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{i1} x_{ik} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{i2} x_{ik} + \dots + b_k \sum_{i=1}^n x_{ik}^2 .
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Jika ditulis dalam lambang matriks maka persamaan (2.2) akan menjadi

$$(X'X)b = X'Y \tag{2.3}$$

dengan $X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ dan $b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$.

Jika $X'X$ mempunyai invers (*nonsingular*) maka persamaan (2.3) menjadi

$$b = (X'X)^{-1} X'Y$$

dan vektor b merupakan estimasi parameter regresi $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$.

2.1.7 Rank

Menurut Gibbons (1971), misalkan X_1, X_2, \dots, X_n merupakan sampel random berukuran n , rank observasi ke- i yaitu G_i dari sampel random yang tidak terurut adalah banyaknya observasi X_p , $p = 1, 2, \dots, n$ sedemikian hingga $X_p \leq X_i$. Misalkan $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ merupakan statistik terurut dari sampel random X_1, X_2, \dots, X_n , rank dari statistik terurut ke- i yaitu $G_{(i)} = i$.

2.1.8 Metode Rank Nonparametrik

Menurut Birkes dan Dodge (1993), metode rank nonparametrik merupakan metode estimasi parameter regresi yang tidak tergantung asumsi kenormalan pada sesatan. Pada model regresi linear, estimasi parameter regresi dengan metode rank nonparametrik diperoleh dengan meminimumkan jumlah rank sisaan berbobot

$$\sum \left[\text{rank}(e_i) - \frac{n+1}{2} \right] e_i . \quad (2.4)$$

2.2 Kerangka Pemikiran

Kerangka pemikiran dalam penulisan skripsi ini dapat dijelaskan sebagai berikut. Jika suatu data yang akan dianalisis dengan model regresi mempunyai sesatan yang tidak berdistribusi normal maka data ini dapat dianalisis dengan metode rank nonparametrik. Sesatan yang tidak berdistribusi normal dapat diindikasikan dengan adanya pencilan. Selanjutnya, estimasi parameter regresi diperoleh dengan meminimumkan jumlah rank sisaan berbobot

$$\sum \left[\text{rank}(e_i) - \frac{n+1}{2} \right] e_i .$$

Pada regresi linear ganda, estimasi parameter regresi diperoleh dengan menggunakan algoritma yang bersifat iteratif. Setelah diperoleh estimasi persamaan regresi, dilakukan uji signifikansi parameter regresi untuk mengetahui hubungan antara variabel bebas X dengan variabel tak bebas Y .

BAB III

METODE PENULISAN

Dalam penulisan skripsi, penulis menggunakan metode studi literatur yaitu dengan mengumpulkan referensi berupa buku-buku yang dapat mendukung pembahasan mengenai estimasi parameter regresi dan uji signifikansi parameter regresi dengan metode rank nonparametrik sedangkan untuk melakukan perhitungan pada contoh kasus digunakan *software SPSS 10 for Windows*, *Minitab 13 for Windows* dan *Microsoft Excel*.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penulisan skripsi ini adalah

1. menentukan estimasi parameter regresi,
2. menguji signifikansi parameter regresi,
3. memberikan contoh kasus.

4.5 Contoh Kasus Regresi Linear Sederhana

Pada bagian ini diberikan contoh kasus untuk mempermudah pemahaman mengenai estimasi parameter regresi dan uji signifikansi parameter regresi dengan metode rank nonparametrik pada regresi linear sederhana.

Diberikan data sekunder dari 14 negara di Amerika Tengah dan Amerika Utara yang jumlah penduduknya telah mencapai satu juta orang lebih pada tahun 1985. Dari 14 negara tersebut diberikan data mengenai tingkat kelahiran yaitu jumlah kelahiran yang terjadi tiap seribu orang penduduk dan persentase urban yang merupakan persentase penduduk yang tinggal di kota. Data tingkat kelahiran dari masing-masing negara dalam selang waktu lima tahun yaitu pada tahun 1980-1985 serta data persentase urban yang dicapai pada tahun 1980 ditunjukkan pada Tabel 4.1. Data tersebut diambil dari Birkes dan Dodge (1993). Dari data tersebut akan ditentukan estimasi persamaan regresi dan uji hipotesis untuk mengetahui hubungan antara besarnya persentase urban dengan tingkat kelahiran yang terjadi.

Tabel 4.1 Data Tingkat Kelahiran

No	Negara	Tingkat Kelahiran Y	Persentase Urban X
1	Kanada	16,2	55,0
2	Kostarika	30,5	27,3
3	Kuba	16,9	33,3
4	Republik Dominika	33,1	37,1
5	El Savador	40,2	11,5
6	Guatemala	38,4	14,2
7	Haiti	41,3	13,9
8	Honduras	43,9	19,0
9	Jamaika	28,3	33,1
10	Meksiko	33,9	43,2
11	Nikaragua	44,2	28,5
12	Panama	28,0	37,7
13	Trinidad/Tobago	24,6	6,8
14	USA	16,0	56,5

Penyelesaian.

Dilakukan analisis regresi terhadap data pada Tabel 4.1 dengan persentase urban sebagai variabel bebas X dan tingkat kelahiran sebagai variabel tak bebas Y menggunakan *software Minitab 13 for Windows*.

Regression Analysis

The regression equation is
 $Y = 43.0 - 0.399 X$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	42.991	4.845	8.87	0.000
X	-0.3989	0.1453	-2.75	0.018

$S = 8.154$ $R\text{-Sq} = 38.6\%$ $R\text{-Sq}(\text{adj}) = 33.5\%$

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	1	501.30	501.30	7.54	0.018
Residual Error	12	797.84	66.49		
Total	13	1299.15			

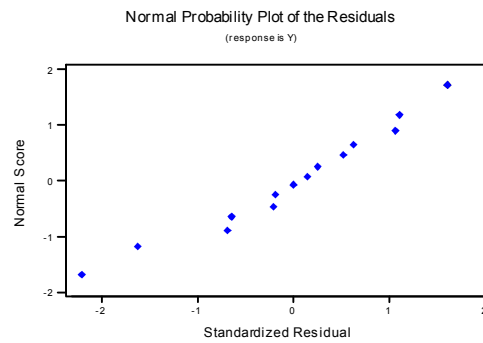
Unusual Observations

Obs	X	Y	Fit	SE Fit	Residual	St Resid
13	6.8	24.60	40.28	3.99	-15.68	-2.20R

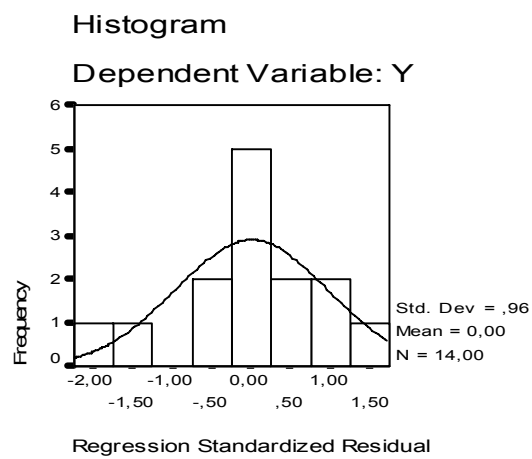
R denotes an observation with a large standardized residual

Gambar 4.1 Output Analisis Regresi untuk Data Penuh
pada Data Tingkat Kelahiran

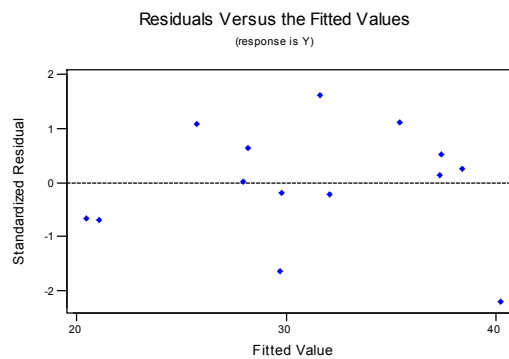
Berdasarkan output di atas, diperoleh estimasi persamaan regresinya adalah $\hat{y} = 43,0 - 0,399x$, kemudian dilakukan pemeriksaan sisaan untuk mengetahui apakah sisaan-sisaan dari data pada Tabel 4.1 memenuhi asumsi kenormalan.



(a) Plot Probabilitas Normal



(b) Diagram Kenormalan Sisaan

(c) Plot Sisaan vs \hat{y}_i

Gambar 4.2 Plot Sisaan dengan Metode Kuadrat Terkecil untuk Data Penuh pada Data Tingkat Kelahiran

Pada Gambar 4.2 a dan b sepertinya terlihat bahwa asumsi kenormalan dipenuhi, tetapi pada gambar 4.2 c diketahui terdapat titik data yang berada di luar interval ± 2 pada sumbu y maka dapat diartikan terdapat data pencilan. Pengambilan batas ± 2 tersebut berdasarkan pada Birkes dan Dodge (1993), yang menyatakan agar pencilan lebih mudah dideteksi yaitu dengan membuat plot sisaan terbaku (*standardized residuals*). Sisaan-sisaan terbaku dianggap sebagai pencilan jika mempunyai nilai absolut lebih besar dari 2. Selain itu, juga didukung oleh hasil analisis regresi bahwa data observasi 13 merupakan pencilan (*unusual observations*) maka data tersebut dikeluarkan agar memenuhi asumsi kenormalan, kemudian dilakukan analisis regresi tanpa data observasi 13.

Regression Analysis

The regression equation is

$$Y1 = 48.9 - 0.549 X1$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	48.943	4.469	10.95	0.000
X1	-0.5492	0.1293	-4.25	0.001

S = 6.570

R-Sq = 62.1%

R-Sq(adj) = 58.7%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	1	778.80	778.80	18.04	0.001
Residual Error	11	474.75	43.16		
Total	12	1253.55			

Unusual Observations

Obs	X1	Y1	Fit	SE Fit	Residual	St Resid
3	33.3	16.90	30.65	1.84	-13.75	-2.18R

R denotes an observation with a large standardized residual

Gambar 4.3 Output Analisis Regresi Tanpa Data Observasi 13
pada Data Tingkat Kelahiran

Berdasarkan output di atas, diperoleh estimasi persamaan regresinya adalah $\hat{y} = 48,9 - 0,549x$. Hasil analisis regresi yang diperoleh tanpa data observasi 13 mempunyai perubahan yang cukup besar pada estimasi parameternya. Dari output

tersebut, dapat diketahui bahwa data observasi 3 merupakan pencilan maka data tersebut dikeluarkan agar memenuhi asumsi kenormalan, kemudian dilakukan analisis regresi tanpa data observasi 13 dan 3.

Regression Analysis					
The regression equation is Y2 = 49.8 - 0.539 X2					
Predictor	Coef	SE Coef	T	P	
Constant	49.773	3.545	14.04	0.000	
X2	-0.5392	0.1023	-5.27	0.000	
S = 5.192 R-Sq = 73.5% R-Sq(adj) = 70.9%					
Analysis of Variance					
Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	1	749.62	749.62	27.81	0.000
Residual Error	10	269.59	26.96		
Total	11	1019.21			

Gambar 4.4 Output Analisis Regresi Tanpa Data Observasi 13 dan 3
pada Data Tingkat Kelahiran

Berdasarkan output di atas, dapat diambil kesimpulan bahwa terdapat pencilan pada Tabel 4.1 yaitu data observasi 13 dan 3. Tindakan menghilangkan data pencilan tidak selalu merupakan tindakan yang bijaksana karena seringkali data pencilan memberikan informasi yang cukup berarti. Estimasi parameter regresi, dalam hal ini dilakukan secara berulang dengan menghilangkan data pencilan agar memenuhi asumsi kenormalan. Oleh karena itu, ada kemungkinan estimasi parameter regresi yang diperoleh dengan metode kuadrat terkecil menjadi kurang tepat. Selanjutnya, dilakukan estimasi parameter regresi untuk data pada Tabel 4.1 dengan metode rank nonparametrik.

Estimasi parameter regresi β dengan metode rank nonparametrik adalah dengan menentukan nilai b yang meminimumkan persamaan (4.2).

Langkah pertama, dihitung *slope* garis b_{ij} untuk setiap pasangan titik data dan disusun dengan urutan dari kecil ke besar. Misalkan *slope* garis untuk pasangan titik data Kanada dengan Kostarika adalah $\frac{(16,2 - 30,5)}{(55,0 - 27,3)} = -0,5162$. Hasil

perhitungan *slope* garis b_{ij} untuk setiap pasangan titik data dengan urutan dari kecil ke besar ditunjukkan pada tabel kolom kedua pada lampiran 7. Selanjutnya, dihitung nilai $|x_i - x_j|$ untuk setiap *slope* garis b_{ij} . Misalkan, nilai $|x_i - x_j|$ untuk pasangan titik data Kanada dengan Kostarika adalah $|27,3 - 55,0| = |-27,7| = 27,7$. Hasil perhitungan $|x_i - x_j|$ untuk setiap *slope* garis b_{ij} ditunjukkan pada tabel kolom ketiga pada lampiran 7, kemudian dihitung jumlah kumulatif untuk $|x_i - x_j|$ sehingga diperoleh nilai $T = \sum |x_i - x_j| = 1.665,9$. Untuk menerapkan pertidaksamaan (4.3), maka jumlah kumulatif totalnya $T = 1.665,9$ dibagi dengan negatif dua sehingga diperoleh nilai

$$-\frac{1}{2}T = \frac{-1665,9}{2} = -832,95.$$

Langkah kedua, untuk memperoleh nilai b yang meminimumkan persamaan (4.2) maka dari tabel pada lampiran 7 dapat diperoleh nilai b_{km} dengan,

$$-\frac{1}{2}T + T_{km} < 0 \quad \text{dan} \quad -\frac{1}{2}T + T_{km} + |x_k - x_m| > 0.$$

Diperoleh nilai *slope* garis b_{ij} pada urutan ke-43 karena

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}T + T_{km} &< 0 & \text{dan} & & -\frac{1}{2}T + T_{km} + |x_k - x_m| &> 0 \\ -832,95 + 815 &= -17,95 < 0 & & & -832,95 + 815 + 23,4 &= 5,45 > 0 \end{aligned}$$

sehingga nilai b yang meminimumkan persamaan (4.2) adalah nilai *slope* garis pada urutan ke-43 yang merupakan pasangan titik data USA dengan Jamaika yaitu $-0,5256$. Jadi, estimasi parameter regresi β adalah $-0,5256$.

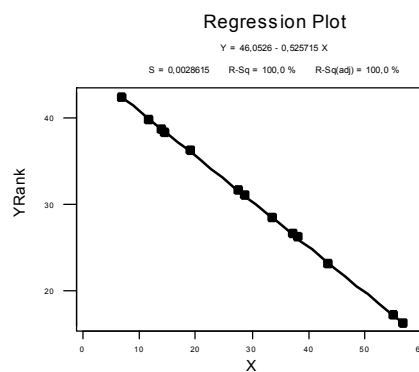
Estimasi parameter regresi α diperoleh dengan median dari selisih $y_i - bx_i$. Nilai dari $y_i - bx_i$ ditunjukkan pada Tabel 4.2. Diperoleh estimasi parameter regresi α adalah 46,05. Selanjutnya, dapat ditentukan estimasi persamaan regresi untuk data pada Tabel 4.1 yaitu $\hat{y} = 46,05 - 0,5256x$. Untuk mengetahui apakah estimasi persamaan regresi yang diperoleh dengan metode rank nonparametrik,

data pada Tabel 4.1 memenuhi asumsi kenormalan maka dilakukan pemeriksaan sisaan yang ditunjukkan pada Gambar 4.5.

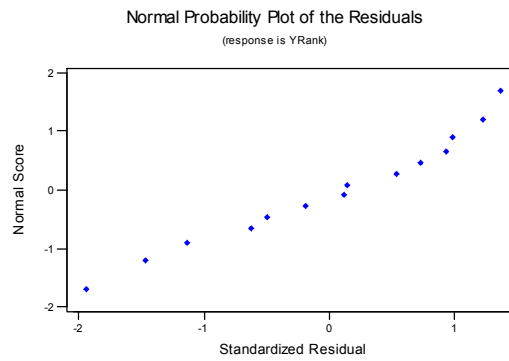
Berdasarkan Gambar 4.5 a dan b, dapat diketahui bahwa asumsi kenormalan telah terpenuhi dan pada Gambar 4.5 c, tidak terdapat titik data yang berada diluar interval ± 2 pada sumbu y . Jadi, dapat diartikan tidak terdapat data yang merupakan pencilan. Estimasi garis regresi yang diperoleh dengan metode rank nonparametrik ditunjukkan pada Gambar 4.6.

Tabel 4.2 Hasil Perhitungan $y_i - b x_i$

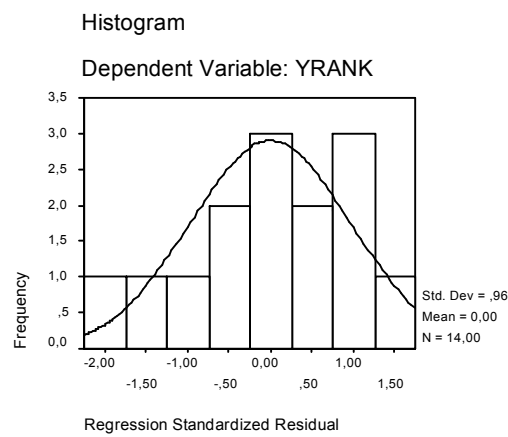
y_i	x_i	$y_i - b x_i$
16,2	55,0	45,11
30,5	27,3	44,85
16,9	33,3	34,40
33,1	37,1	52,60
40,2	11,5	46,24
38,4	14,2	45,86
41,3	13,9	48,61
43,9	19,0	53,89
28,3	33,1	45,70
33,9	43,2	56,61
44,2	28,5	59,18
28,0	37,7	47,82
24,6	6,8	28,17
16,0	56,5	45,70



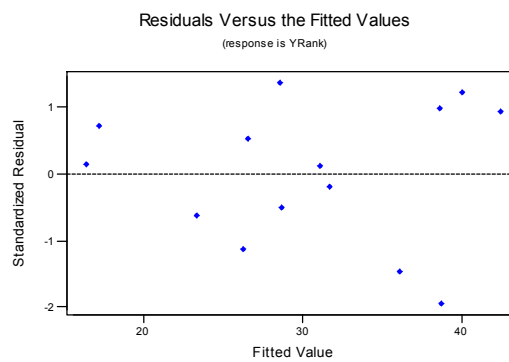
Gambar 4.6 Estimasi Garis regresi dengan Metode Rank Nonparametrik.



(a) Plot Probabilitas Normal



(b) Diagram Kenormalan Sisaan

(c) Plot Sisaan vs \hat{y}_i

Gambar 4.5 Plot Sisaan dengan Metode Rank Nonparametrik

Pengaruh besarnya persentase urban terhadap tingkat kelahiran yang terjadi dapat diketahui dengan melakukan uji signifikansi terhadap parameter regresinya. Uji signifikansi atau uji hipotesis parameter regresinya adalah sebagai berikut.

1. $H_0 : \beta = 0$ (besarnya persentase urban tidak mempengaruhi tingkat kelahiran secara signifikan).
 $H_1 : \beta \neq 0$ (besarnya persentase urban mempengaruhi tingkat kelahiran secara signifikan).
2. Menentukan tingkat signifikansi $\alpha = 0,05$.
3. Daerah kritis : H_0 ditolak jika $p < 0,05$ dengan $p = Prob [|T| \geq |t|]$.
4. Menghitung statistik uji :

$$|t| = \frac{|U|}{SD(U)}.$$

Nilai $U = \sum \left[\text{rank}(y_i) - \frac{n+1}{2} \right] x_i$. Pada Tabel 4.3, diberikan perhitungan

$\left[\text{rank}(y_i) - \frac{n+1}{2} \right] x_i$ untuk memperoleh nilai U .

Tabel 4.3 Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Nilai U

y_i	x_i	$\text{rank}(x_i)$	$\left[\text{rank}(y_i) - \frac{n+1}{2} \right] x_i$
16,2	55,0	2	-302,5
30,5	27,3	7	-13,65
16,9	33,3	3	-149,85
33,1	37,1	8	18,55
40,2	11,5	11	40,25
38,4	14,2	10	35,5
41,3	13,9	12	62,55
43,9	19,0	13	104,5
28,3	33,1	6	-49,65
33,9	43,2	9	64,8
44,2	28,5	14	185,25
28,0	37,7	5	-94,25
24,6	6,8	4	-23,8
16,0	56,5	1	-367,25

Diperoleh nilai $U = \sum \left[\text{rank}(y_i) - \frac{n+1}{2} \right] x_i = -489,55$ dan nilai

$$|-489,55| = 489,55, \text{ kemudian dihitung nilai } SD(U) = \sqrt{\frac{n(n+1)}{12} \sum (x_i - \bar{x})^2}.$$

Nilai $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 3.151$ maka diperoleh nilai

$$SD(U) = \sqrt{\frac{n(n+1)}{12} \sum (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{14(15)}{12} (3.151)} = \sqrt{55.142.5} = 234,8.$$

Jadi, dapat diperoleh nilai $|t| = \frac{|U|}{SD(U)} = \frac{489,55}{234,8} = 2,08.$

Untuk nilai p diperoleh menggunakan tabel distribusi t dengan derajat bebas $n - 2 = 12$ maka nilai $p = Prob [|T| \geq 2,08]$. Dari tabel distribusi t diperoleh nilai p antara 0,1 dan 0,05 yaitu 0,0625.

5. Pengambilan Keputusan.

Dari langkah keempat diperoleh nilai $p > 0,05$ maka H_0 tidak ditolak (menerima H_0). Jadi, dapat disimpulkan bahwa persentase urban tidak mempengaruhi tingkat kelahiran secara signifikan dengan tingkat signifikansi $\alpha = 5\%$.

4.6 Contoh Kasus Regresi Linear Ganda

Pada bagian ini diberikan penerapan dari metode rank nonparametrik untuk estimasi parameter regresi dan uji signifikansi parameter regresi pada regresi linear ganda.

Diberikan data sekunder pada Tabel 4.4 yang diambil dari Birkes dan Dodge (1993) yaitu mengenai oksidasi amonia NH_3 menjadi asam nitrat HNO_3 pada tanaman. Pengamatan dilakukan selama 21 hari dengan variabel yang digunakan adalah aliran udara, suhu air pendingin, konsentrasi asam dan persentase hilangnya amonia NH_3 yang tak terikat. Dari data tersebut akan ditentukan hubungan antara persentase hilangnya amonia NH_3 yang tak terikat dengan ketiga variabel yaitu aliran udara, suhu air pendingin dan konsentrasi asam.

Tabel 4.4 Data Oksidasi Amonia NH_3 menjadi Asam Nitrat HNO_3

No.	Persentase Hilangnya Amonia NH_3 Y	Aliran Udara X_1	Suhu Air Pendingin X_2	Konsentrasi Asam X_3
1	42	80	27	89
2	37	80	27	88
3	37	75	25	90
4	28	62	24	87
5	18	62	22	87
6	18	62	23	87
7	19	62	24	93
8	20	62	24	93
9	15	58	23	87
10	14	58	18	80
11	14	58	18	89
12	13	59	17	88
13	11	58	18	82
14	12	58	19	93
15	8	50	18	89
16	7	50	18	86
17	8	50	19	72
18	8	50	19	79
19	9	50	20	80
20	15	56	20	82
21	15	70	20	91

Penyelesaian.

Didefinisikan suatu model regresi linear ganda untuk data pada Tabel 4.4 yaitu $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$ dengan aliran udara sebagai variabel bebas X_1 , suhu air pendingin sebagai variabel bebas X_2 , konsentrasi asam sebagai variabel bebas X_3 dan persentase hilangnya amonia NH_3 yang tak terikat sebagai variabel tak bebas Y , kemudian dilakukan analisis regresi menggunakan *software Minitab 13 for Windows*.

Regression Analysis

The regression equation is

$$Y = -39.8 + 0.713 X_1 + 1.32 X_2 - 0.158 X_3$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	-39.83	11.78	-3.38	0.004
X1	0.7131	0.1323	5.39	0.000
X2	1.3192	0.3599	3.67	0.002
X3	-0.1576	0.1550	-1.02	0.323

S = 3.211 R-Sq = 91.5% R-Sq(adj) = 90.0%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	1893.97	631.32	61.23	0.000
Residual Error	17	175.27	10.31		
Total	20	2069.24			

Source	DF	Seq SS
X1	1	1744.96
X2	1	138.34
X3	1	10.67

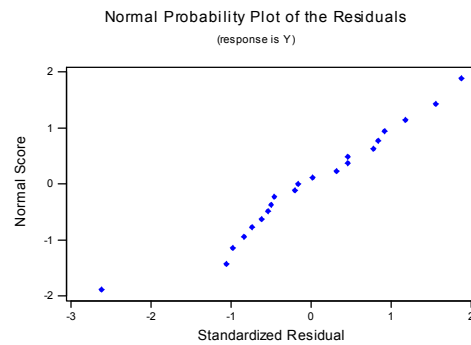
Unusual Observations

Obs	X1	Y	Fit	SE Fit	Residual	St Resid
21	70.0	15.000	22.128	1.691	-7.128	-2.61R

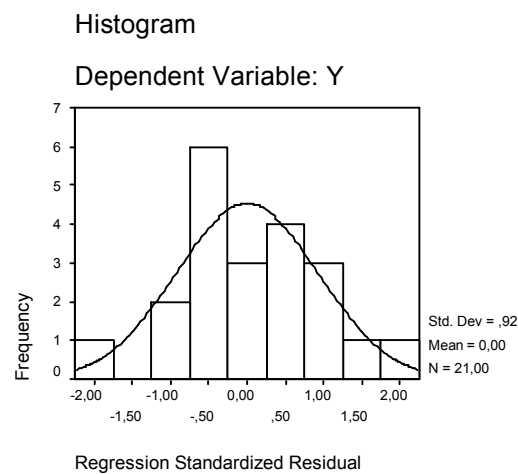
R denotes an observation with a large standardized residual

Gambar 4.7 Output Analisis Regresi untuk Data Penuh
pada Data Oksidasi Amonia NH_3 menjadi Asam Nitrat HNO_3

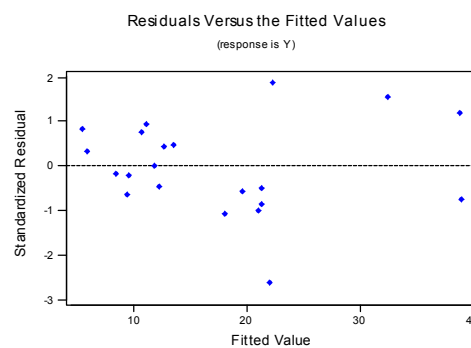
Berdasarkan output di atas, diperoleh estimasi persamaan regresinya adalah $\hat{y} = -39,8 + 0,713x_1 + 1,32x_2 - 0,158x_3$, kemudian dilakukan pemeriksaan sisaan untuk mengetahui apakah sisaan-sisaan dari data Tabel 4.4 memenuhi asumsi kenormalan.



(a) Plot Probabilitas Normal



(b) Diagram Kenormalan Sisaan

(c) Plot sisaan vs \hat{y}_i

Gambar 4.8 Plot Sisaan dengan Metode Kuadrat Terkecil untuk Data Penuh pada Data Oksidasi Amonia NH_3 menjadi Asam Nitrat HNO_3

Pada Gambar 4.8 a dan b sepertinya terlihat bahwa asumsi kenormalan dipenuhi, tetapi pada gambar 4.8 c diketahui terdapat titik data yang berada di luar interval ± 2 pada sumbu y maka dapat diartikan terdapat data pencilan. Selain itu, juga didukung oleh hasil analisis regresi bahwa data observasi 21 merupakan pencilan (*unusual observations*) maka data tersebut dikeluarkan agar memenuhi asumsi kenormalan, kemudian dilakukan analisis regresi tanpa data observasi 21.

Regression Analysis

The regression equation is

$$Y1 = - 43.6 + 0.877 X11 + 0.867 X21 - 0.113 X31$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	-43.575	9.465	-4.60	0.000
X11	0.8771	0.1168	7.51	0.000
X21	0.8673	0.3186	2.72	0.015
X31	-0.1132	0.1244	-0.91	0.376

S = 2.561 R-Sq = 94.9% R-Sq(adj) = 94.0%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	1957.58	652.53	99.46	0.000
Residual Error	16	104.97	6.56		
Total	19	2062.55			

Source	DF	Seq SS
X11	1	1904.99
X21	1	47.15
X31	1	5.44

Unusual Observations

Obs	X11	Y1	Fit	SE Fit	Residual	St Resid
4	62.0	28.000	21.768	0.930	6.232	2.61R

R denotes an observation with a large standardized residual

Gambar 4.9 Output Analisis Regresi Tanpa Data Observasi 21
pada Data Oksidasi Amonia NH_3 menjadi Asam Nitrat HNO_3

Berdasarkan output di atas, diperoleh estimasi persamaan regresinya adalah $\hat{y} = -43,6 + 0,877x_1 + 0,867x_2 - 0,113x_3$. Dari output tersebut, dapat diketahui bahwa data observasi 4 merupakan pencilan maka data tersebut dikeluarkan agar memenuhi asumsi kenormalan, kemudian dilakukan analisis regresi tanpa data

observasi 21 dan 4. Berdasarkan hasil output, diperoleh estimasi persamaan regresinya adalah $\hat{y} = -42,3 + 0,942x_1 + 0,616x_2 - 0,115x_3$. Dari output tersebut, dapat ditentukan bahwa data observasi 3 merupakan pencilan maka data tersebut dikeluarkan agar memenuhi asumsi kenormalan, kemudian dilakukan analisis regresi kembali terhadap data Tabel 4.4 tanpa data observasi 21, 4 dan 3. Diperoleh estimasi persamaan regresi tanpa data-data tersebut adalah $\hat{y} = -40,2 + 0,889x_1 + 0,643x_2 - 0,113x_3$. Dari hasil output, diketahui masih terdapat data pencilan dalam analisis regresinya yaitu data observasi 1. Oleh karena itu, dilakukan analisis regresi kembali terhadap data Tabel 4.4 tanpa data observasi 21, 4, 3 dan 1. Diperoleh estimasi persamaan regresinya adalah $\hat{y} = -37,5 + 0,785x_1 + 0,626x_2 - 0,0722x_3$. Pada metode kuadrat terkecil data pencilan dihilangkan dengan tujuan asumsi kenormalan dipenuhi. Dari hasil output analisis regresi diperoleh bahwa data observasi 10 merupakan pencilan sehingga data tersebut dikeluarkan pada analisis selanjutnya agar tetap memenuhi asumsi kenormalan. Berdasarkan output, diperoleh estimasi persamaan regresinya adalah $\hat{y} = -35,4 + 0,828x_1 + 0,508x_2 - 0,0957x_3$. Dari hasil output ini, tidak ditemukan kembali adanya data pencilan sehingga hasil analisis terakhir ini merupakan hasil estimasi persamaan regresi dengan metode kuadrat terkecil yang telah memenuhi asumsi kenormalan dengan tidak adanya data pencilan sebagai indikasinya. Selanjutnya, dilakukan estimasi parameter regresi dan uji signifikansi parameter regresi terhadap data Tabel 4.4 dengan metode rank nonparametrik.

Estimasi parameter regresi pada regresi linear ganda diperoleh dengan menggunakan algoritma untuk meminimumkan $g(b)$. Algoritma diiterasikan sampai diperoleh estimasi vektor $\hat{\beta}$ yang lebih baik. Adapun hasil perhitungan estimasi parameter regresi untuk data pada Tabel 4.4 dengan metode rank nonparametrik adalah sebagai berikut.

Pada iterasi pertama, vektor awal b^0 diperoleh dengan metode kuadrat terkecil yaitu $b^0 = (0,7131, 1,3192, -0,1576)$. Ditentukan vektor d untuk

memperoleh vektor $b^* = b^0 + td$. Dihitung nilai selisih $y_i - (b^0)'x_i$ untuk 21 data pada Tabel 4.4. Misalkan nilai $y_i - (b^0)'x_i$ untuk data pertama yaitu

$$42 - [(0,7131)(80) + (1,3192)(27) + (-0,1576)(89)] = -36,64$$

kemudian dihitung nilai dari $\text{rank}[y_i - (b^0)'x_i] - \frac{n+1}{2}$ untuk memperoleh entri dari vektor u^0 .

Tabel 4.5 Hasil Perhitungan Vektor u^0 pada Iterasi Pertama

$y_i - (b^0)'x_i$	$\text{rank}[y_i - (b^0)'x_i]$	$\text{rank}[y_i - (b^0)'x_i] - \frac{n+1}{2}$
-36,6400	19	8
-41,7976	5	-6
-35,2785	20	9
-34,1618	21	10
-41,5234	6	-5
-42,8426	3	-8
-42,2162	4	-7
-41,2162	8	-3
-42,9902	2	-9
-38,4974	14	3
-37,0790	18	7
-37,6305	16	5
-41,1822	9	-2
-39,7678	12	1
-37,3742	17	6
-38,8470	13	2
-41,3726	7	-4
-40,2694	11	0
-40,4310	10	-1
-38,3944	15	4
-46,9594	1	-10

Setelah vektor u^0 diperoleh, dihitung nilai $d = (X_c' X_c)^{-1} X_c' u^0$ dengan X_c merupakan matriks berorde $n \times k$ dengan entri $x_{ij} - \bar{x}_j$, diperoleh vektor $d = (0,14574, -0,57137, 0,02054)$.

Selanjutnya, ditentukan nilai t yang meminimumkan $g(b^0 + td)$. Dihitung nilai $z_i = y_i - (b^0)'x_i$ dan $w_i = d'x_i$, misalkan nilai $w_i = d'x_i$ untuk data pertama yaitu

$$w_1 = (0,14574)(80) + (-0,57137)(27) + (0,02054)(89) = -1,93973.$$

Nilai t merupakan estimasi parameter regresi β untuk model regresi linear sederhana $Z = \alpha + \beta W + \varepsilon$, diperoleh dengan meminimumkan (4.10). Untuk memperoleh estimasi parameter regresi β yaitu t , dihitung sesuai dengan pertidaksamaan (4.3). Pada tabel lampiran 8, dapat diperoleh nilai t_{km} sebagai nilai yang meminimumkan (4.10) dengan menghitung,

$$-\frac{1}{2}T + T_{km} < 0 \text{ dan } -\frac{1}{2}T + T_{km} + |w_k - w_m| > 0.$$

Diperoleh nilai *slope* garis t_{km} pada urutan ke-96 karena

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}T + T_{km} &< 0 \\ -138,2777 + 136,795 &= -1,4827 < 0 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}T + T_{km} + |w_k - w_m| &> 0 \\ -38,2777 + 136,795 + 2,75415 &= 1,2715 > 0. \end{aligned}$$

sehingga nilai t yang meminimumkan persamaan yaitu nilai *slope* garis pada urutan ke-96 yang merupakan pasangan titik data ke 13 dan 9 yaitu 0,656.

Selanjutnya, ditentukan vektor b^* untuk iterasi pertama yaitu

$$\begin{aligned} b^* &= b^0 + td \\ &= \begin{pmatrix} 0,7131 + (0,656)(0,14574), 1,3192 + (0,656)(-0,57137), \\ -0,1576 + (0,656)(0,02054) \end{pmatrix} \\ &= (0,80871, 0,94438, -0,14413). \end{aligned}$$

Dilanjutkan iterasi kedua dengan vektor b^* yang diperoleh pada iterasi pertama sebagai vektor awal $b^0 = (0,80871, 0,94438, -0,14413)$. Ditentukan vektor d untuk memperoleh vektor $b^* = b^0 + td$ pada iterasi kedua. Dihitung nilai

selisih $y_i - (b^0)'x_i$ untuk 21 data pada Tabel 4.4. Misalkan nilai $y_i - (b^0)'x_i$ untuk data pertama yaitu

$$42 - [(0,80936)(80) + (0,94314)(27) + (-0,14413)(89)] = -35,3675$$

kemudian dihitung nilai dari $\text{rank}\left[y_i - (b^0)'x_i\right] - \frac{n+1}{2}$ untuk memperoleh entri dari vektor u^0 .

Tabel 4.6 Hasil Perhitungan Vektor u^0 pada Iterasi Kedua

$y_i - (b^0)'x_i$	$\text{rank}\left[y_i - (b^0)'x_i\right]$	$\text{rank}\left[y_i - (b^0)'x_i\right] - \frac{n+1}{2}$
-35,3675	19	8
-40,5116	5	-6
-34,2911	20	9
-32,2658	21	10
-40,3771	7	-4
-41,3215	2	-9
-40,4011	6	-5
-39,4011	10	-1
-41,0866	3	-8
-38,3736	13	2
-37,0765	17	6
-38,0849	14	3
-41,0854	4	-7
-39,4443	9	-2
-36,6068	18	7
-38,0392	15	4
-40,0014	8	-3
-38,9925	11	0
-38,7927	12	1
-37,3567	16	5
-47,3815	1	-10

Dari vektor u^0 yang diperoleh, dihitung nilai $d = (X_c' X_c)^{-1} X_c' u^0$ dengan X_c merupakan matriks berorde $n \times k$ dengan entri $x_{ij} - \bar{x}_j$, diperoleh vektor $d = (-0,04980, 0,03959, 0,05627)$.

Setelah vektor d ditentukan kemudian dicari nilai t yang meminimumkan $g(b^0 + td)$. Dihitung nilai $z_i = y_i - (b^0)'x_i$ dan $w_i = d'x_i$, misalkan nilai $w_i = d'x_i$ untuk data pertama yaitu

$$w_1 = (-0,04980)(80) + (0,03959)(27) + (0,05627)(89) = 0,98373.$$

Selanjutnya, ditentukan nilai t yang merupakan estimasi parameter regresi β untuk model regresi linear sederhana $Z = \alpha + \beta W + \varepsilon$. Untuk memperoleh nilai t yang meminimumkan (4.10), dihitung sesuai dengan pertidaksamaan (4.3). Pada tabel lampiran 9, dapat diperoleh nilai t_{km} sebagai nilai yang meminimumkan (4.10) dengan menghitung,

$$-\frac{1}{2}T + T_{km} < 0 \text{ dan } -\frac{1}{2}T + T_{km} + |w_k - w_m| > 0.$$

Diperoleh nilai *slope* garis t_{km} pada urutan ke-99 karena

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}T + T_{km} &< 0 \\ -35,16907 + 34,99227 &= -0,1768 < 0 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}T + T_{km} + |w_k - w_m| &> 0 \\ -35,16907 + 34,99227 + 0,5048 &= 0,328 > 0 \end{aligned}$$

sehingga nilai t yang meminimumkan persamaan yaitu nilai *slope* garis pada urutan ke-99 yang merupakan pasangan titik data ke 16 dan 10 yaitu 0,66.

Selanjutnya, ditentukan vektor b^* untuk iterasi kedua yaitu

$$\begin{aligned} b^* &= b^0 + td \\ &= \begin{pmatrix} 0,80871 + (0,66)(-0,04980), & 0,94438 + (0,66)(0,03959), \\ -0,14414 + (0,66)(0,05627) \end{pmatrix} \\ &= (0,78918, 0,92909, -0,11464). \end{aligned}$$

Iterasi dilanjutkan hingga diperoleh selisih vektor b^* dengan vektor b^* sebelumnya kurang dari 10^{-4} . Hal ini menunjukkan bahwa estimasi parameter regresi yang diperoleh telah konvergen. Pada iterasi ketujuh diperoleh vektor

$b^* = (0,79364, 0,91178, -0,11186)$ dengan vektor b^* yang diperoleh pada iterasi keenam adalah $(0,79364, 0,91178, -0,11186)$ sehingga telah diperoleh estimasi parameter regresi dengan metode rank nonparametrik yaitu $\hat{\beta}_1 = 0,7936$, $\hat{\beta}_2 = 0,9118$ dan $\hat{\beta}_3 = -0,1119$.

Selanjutnya, ditentukan estimasi parameter regresi β_0 dengan median dari selisih $y_i - (b_1x_{i1} + b_2x_{i2} + b_3x_{i3})$. Nilai dari $y_i - (b_1x_{i1} + b_2x_{i2} + b_3x_{i3})$ diberikan pada Tabel 4.7.

Tabel 4.7 Hasil Perhitungan $y_i - b'x_i$

y_i	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	$y_i - b'x_i$
42	80	27	89	-36,1532
37	80	27	88	-41,265
37	75	25	90	-35,2496
28	62	24	87	-33,3561
18	62	22	87	-41,5326
18	62	23	87	-42,4443
19	62	24	93	-41,6849
20	62	24	93	-40,6849
15	58	23	87	-42,2698
14	58	18	80	-39,494
14	58	18	89	-38,4873
13	59	17	88	-39,481
11	58	18	82	-42,2703
12	58	19	93	-40,9516
8	50	18	89	-38,1381
7	50	18	86	-39,4737
8	50	19	72	-40,9515
8	50	19	79	-40,1685
9	50	20	80	-39,9684
15	56	20	82	-38,5065
15	70	20	91	-48,6107

Nilai median dari selisih $y_i - b'x_i$ adalah - 40,1685. Jadi, estimasi parameter regresi β_0 yaitu - 40,1685. Estimasi persamaan regresi yang diperoleh dari data oksidasi amonia NH_3 menjadi asam nitrat HNO_3 pada Tabel 4.4 dengan metode rank nonparametrik adalah

$$\hat{y} = -40,1685 + 0,7936x_1 + 0,9118x_2 - 0,1119x_3.$$

Kemudian dilakukan uji hipotesis untuk mengetahui ada tidaknya hubungan yang signifikan antara aliran udara, suhu air pendingin, konsentrasi asam terhadap persentase amonia NH_3 yang hilang tak terikat atau dengan kata lain apakah $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.

Nilai sisaan untuk model penuh yaitu $e_i = y_i - \hat{y}_i$ dengan

$$\hat{y}_i = -40,1685 + 0,7936x_{i1} + 0,9118x_{i2} - 0,1119x_{i3}.$$

Misalkan nilai sisaan untuk data pertama yaitu

$$\begin{aligned} e_1 = y_1 - \hat{y}_1 &= 42 - (-40,1685 + 0,7936(70) + 0,9118(20) - 0,1119(91)) \\ &= 4,01532 \end{aligned}$$

kemudian dihitung rank dari sisaan $\text{rank}(e_i)$ dan dihitung jumlah rank sisaan

berbobot untuk model penuh yaitu $JRSB_{\text{penuh}} = \sum \left[\text{rank}(e_i) - \frac{n+1}{2} \right] e_i = 344,6823$.

Tabel 4.8 Hasil Perhitungan untuk $JRSB_{\text{penuh}}$

e_i	$\text{rank}(e_i)$	$\left[\text{rank}(e_i) - \frac{n+1}{2} \right] e_i$
4,0153	19	32,1226
-1,0965	7	4,3862
4,9189	20	44,2701
6,8124	21	68,1240
-1,3641	6	6,8204
-2,2758	2	20,4826
-1,5164	5	9,0986
-0,5164	10	0,5164
-2,1013	4	14,7090
0,6745	13	1,3490
1,6812	17	10,0874
0,6875	14	2,0625
-2,1018	3	16,8142
-0,7831	8	2,3492
2,0304	18	14,2125
0,6948	15	2,7791
-0,7830	9	1,5660
0,0000	11	0,0000
0,2001	12	0,2001
1,6620	16	8,3099
-8,4422	1	84,4224

Untuk model tereduksi tanpa variabel bebas X_1 , X_2 dan X_3 yaitu $Y = \beta_0 + \varepsilon$. Estimasi parameter regresi β_0 untuk model tereduksi diperoleh dengan median dari sampel y_i yaitu 15. Dihitung nilai sisaan untuk model tereduksi yaitu $e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - 15$. Misalkan nilai sisaan untuk data pertama yaitu $e_1 = 42 - 15 = 27$, kemudian dihitung nilai rank sisaan, $\text{rank}(e_i)$ dan dihitung jumlah rank sisaan berbobot untuk model tereduksi yaitu

$$JRSB_{tereduksi} = \sum \left[\text{rank}(e_i) - \frac{n+1}{2} \right] e_i = 1131.$$

Tabel 4.9 Hasil Perhitungan untuk $JRSB_{tereduksi}$

e_i	$\text{rank}(e_i)$	$\left[\text{rank}(e_i) - \frac{n+1}{2} \right] e_i$
27	21	270
22	19,5	187
22	19,5	187
13	18	91
3	14,5	10,5
3	14,5	10,5
4	16	20
5	17	30
0	12	0
-1	9,5	1,5
-1	9,5	1,5
-2	8	6
-4	6	20
-3	7	12
-7	3	56
-8	1	80
-7	3	56
-7	3	56
-6	5	36
0	12	0
0	12	0

Dengan menggunakan nilai sisaan untuk model penuh, dapat ditentukan nilai $\hat{\tau}$. Untuk 21 sisaan maka terdapat 231 rata-rata pasangan sisaan A_{ij} . Misalkan rata-rata untuk pasangan sisaan pertama dan kedua yaitu $A_{12} = \frac{e_1 + e_2}{2} = \frac{4,0153 + (-1,0965)}{2} = 1,4594$ kemudian rata-rata untuk pasangan sisaan A_{ij} disusun dengan urutan dari kecil ke besar yaitu pada lampiran 10.

Selanjutnya, dihitung nilai $a = \frac{n(n+1)}{4} = \frac{21(22)}{4} = 115,5$ dan $b = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}} = \sqrt{\frac{21(22)(43)}{24}} = 28,7706$ maka dapat ditentukan nilai q_1 yaitu bilangan bulat terdekat dengan

$$\frac{1}{2} + a - (1,645)b = \frac{1}{2} + 115,5 - (1,645) 28,7706 = 68,6724$$

yaitu 69 dan nilai q_2 yaitu bilangan bulat terdekat dengan

$$\frac{1}{2} + a + (1,645)b = \frac{1}{2} + 115,5 + (1,645) 28,7706 = 163,328$$

yaitu 163 dan dapat ditentukan nilai

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= \sqrt{\frac{n}{[n-(k+1)]}} \frac{\sqrt{n}[A_{(q_2)} - A_{(q_1)}]}{2(1,645)} \\ &= \sqrt{\frac{21}{[21-(3+1)]}} \frac{\sqrt{21}[A_{163} - A_{69}]}{3,29} \\ &= \sqrt{\frac{21}{17}} \frac{\sqrt{21}[1,1683 - (-0,7905)]}{3,29} \\ &= 3,0323 . \end{aligned}$$

Nilai statistik uji F_{rank} yaitu

$$\begin{aligned} F_{rank} &= \frac{JRSB_{tereduksi} - JRSB_{penuh}}{(k-l)c\hat{\tau}} = \frac{1.131 - (344,6823)}{(3-0)\left(\frac{22}{\sqrt{48}}\right)(3,0323)} \\ &= 27,2280 \end{aligned}$$

Adapun langkah-langkah dalam uji signifikansi parameter regresi tersebut adalah sebagai berikut.

1. Menentukan Hipotesis

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ (aliran udara, suhu pendingin dan konsentrasi asam tidak mempunyai pengaruh yang signifikan terhadap hilangnya persentase amonia NH_3).

$H_1: \beta_{i,i=1,2,3} \neq 0$ (paling tidak terdapat satu variabel bebas X_1 , X_2 dan X_3 yang mempunyai pengaruh signifikan terhadap hilangnya persentase amonia NH_3).

2. Menentukan tingkat signifikansi $\alpha = 0,05$.

3. Menentukan daerah kritis : H_0 ditolak jika $p < \alpha$ dengan $p = Prob[F \geq F_{rank}]$.

4. Menghitung statistik uji:

$$F_{rank} = \frac{JRSB_{tereduksi} - JRSB_{penuh}}{(k-l) \hat{c} \tau}$$

$$= 27,2280$$

Untuk nilai p diperoleh dari tabel distribusi F dengan derajat bebas $k - l = 3$ dan $n - k - 1 = 17$ maka nilai $p = Prob[F \geq 27,2280]$. Dari tabel distribusi F diperoleh nilai p kurang dari 0,001.

5. Pengambilan Keputusan

Dari langkah keempat diperoleh nilai $p < 0,05$ maka H_0 ditolak. Jadi, dapat disimpulkan bahwa aliran udara, suhu air pendingin dan konsentrasi asam mempunyai pengaruh signifikan terhadap persentase hilangnya amonia NH_3 yang tak terikat dengan tingkat signifikansi $\alpha = 5\%$.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan hasil pembahasan adalah sebagai berikut.

1. Pada regresi linear sederhana, estimasi parameter regresi β diperoleh dengan meminimumkan

$$\sum \left[\text{rank}(y_i - bx_i) - \frac{n+1}{2} \right] y_i - bx_i$$

dan estimasi parameter regresi α diperoleh dengan median dari $y_i - bx_i$.

Pada regresi linear ganda, estimasi parameter regresi $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ diperoleh dengan meminimumkan

$$\sum \left[\text{rank} \left(y_i - (b_1 x_{i1} + \dots + b_k x_{ik}) \right) - \frac{n+1}{2} \right] (y_i - (b_1 x_{i1} + \dots + b_k x_{ik}))$$

yaitu menggunakan algoritma yang bersifat iteratif. Estimasi parameter regresi β_0 diperoleh dengan median dari $y_i - (b_1 x_{i1} + \dots + b_k x_{ik})$.

2. Pada regresi linear sederhana, uji signifikansi parameter regresi dilakukan dengan menggunakan hipotesis $H_0: \beta = 0$ dan $H_1: \beta \neq 0$. Statistik uji yang digunakan adalah

$$|t| = \frac{|U|}{SD(U)}$$

dengan $U = \sum \left[\text{rank}(y_i) - \frac{n+1}{2} \right] x_i$ dan $SD(U) = \sqrt{\frac{n(n+1)}{12} \sum (x_i - \bar{x})^2}$.

Daerah kritis : H_0 ditolak jika $p < \alpha$ dengan $p = \text{Prob}[|T| \geq |t|]$ dan nilai p diperoleh menggunakan tabel distribusi t dengan derajat bebas $n - 2$.

3. Pada regresi linear ganda, uji signifikansi parameter regresi dilakukan dengan menggunakan hipotesis $H_0: \beta_{l+1} = \dots = \beta_k = 0$ dan $H_1: \beta_{l+1}, \dots, \beta_k \neq 0$. Statistik uji yang digunakan adalah

$$F_{rank} = \frac{JRSB_{tereduksi} - JRSB_{penuh}}{(k-l)c\hat{\tau}}$$

$$\text{dengan } JRSB = \sum \left[\text{rank}(e_i) - \frac{n+1}{2} \right] e_i$$

$$\text{dan } \hat{\tau} = \sqrt{\frac{n}{[n-(k+1)]}} \frac{\sqrt{n} [A_{(q_2)} - A_{(q_1)}]}{2(1,645)}.$$

Daerah kritis : H_0 ditolak jika $p < \alpha$ dengan $p = \text{Prob} [F \geq F_{\text{rank}}]$.

Nilai p diperoleh menggunakan tabel distribusi F dengan derajat bebas $k-l$ dan $n-k-1$.

5.2 Saran

Pada penulisan skripsi ini, penulis menggunakan bentuk persamaan

$$\sum \left[\text{rank}(e_i) - \frac{n+1}{2} \right] e_i$$

untuk memperoleh estimasi parameter regresi. Bagi pembaca yang tertarik dengan regresi nonparametrik, dapat menggunakan bentuk persamaan

$$\sum \Phi^{-1} \left[\frac{\text{rank}(e_i)}{n+1} \right] e_i$$

untuk memperoleh estimasi parameter regresi.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. (1992). *Elementary Linear Algebra*. Fifth Edition. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Bain, L. J. and Engelhardt, M. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Second Edition. Duxbury Press, California.
- Birkes, D. and Dodge, Y. (1993). *Alternative Methods of Regression*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Gibbons, J.D. (1971). *Nonparametric Statistical Inference*. Mc Graw – Hill, Inc., Tokyo.
- Hadley, G. (1992). *Aljabar Linear*. Terjemahan Naipospos, N. Soemartoyo. Erlangga, Jakarta.
- Herzberg, P. A. (1983). *Principles of Statistics*. John Wiley & Sons, Inc., Canada.
- Sembiring, R. K. (1995). *Analisis Regresi*. ITB, Bandung.
- Walpole, R. E. and Myers, R. H. (1995). *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuan*. Edisi Kedua. Terjemahan R. K. Sembiring. ITB, Bandung.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Output Analisis Regresi dengan Metode Kuadrat Terkecil Tanpa Data Observasi 21 dan 4 pada Data Oksidasi Amonia NH_3 menjadi Asam Nitrat HNO_3 .

Regression Analysis

The regression equation is
 $Y2 = -42.3 + 0.942 X12 + 0.616 X22 - 0.115 X32$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	-42.342	7.414	-5.71	0.000
X12	0.94151	0.09338	10.08	0.000
X22	0.6162	0.2604	2.37	0.032
X32	-0.11493	0.09730	-1.18	0.256

S = 2.004 R-Sq = 96.9% R-Sq(adj) = 96.3%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	1889.55	629.85	156.85	0.000
Residual Error	15	60.24	4.02		
Total	18	1949.79			

Source	DF	Seq SS
X12	1	1862.43
X22	1	21.52
X32	1	5.60

Unusual Observations

Obs	X12	Y2	Fit	SE Fit	Residual	St Resid
3	75.0	37.000	33.332	0.895	3.668	2.05R

R denotes an observation with a large standardized residual

Lampiran 2. Output Analisis Regresi dengan Metode Kuadrat Terkecil Tanpa Data Observasi 21, 4 dan 3 pada Data Oksidasi Amonia NH_3 menjadi Asam Nitrat HNO_3 .

Regression Analysis

The regression equation is
 $Y3 = -40.2 + 0.889 X13 + 0.643 X23 - 0.113 X33$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	-40.211	6.580	-6.11	0.000
X13	0.88940	0.08508	10.45	0.000
X23	0.6426	0.2291	2.80	0.014

X33 -0.11268 0.08552 -1.32 0.209

S = 1.761 R-Sq = 97.2% R-Sq(adj) = 96.6%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	1488.57	496.19	159.95	0.000
Residual Error	14	43.43	3.10		
Total	17	1532.00			

Source	DF	Seq SS
X13	1	1459.75
X23	1	23.43
X33	1	5.38

Unusual Observations

Obs	X13	Y3	Fit	SE Fit	Residual	St Resid
1	80.0	42.000	38.263	1.116	3.737	2.74R

R denotes an observation with a large standardized residual

Lampiran 3. Output Analisis Regresi dengan Metode Kuadrat Terkecil Tanpa Data Observasi 21, 4, 3 dan 1 pada Data Oksidasi Amonia NH_3 menjadi Asam Nitrat HNO_3 .

Regression Analysis

The regression equation is

$$Y4 = -37.5 + 0.785 X14 + 0.626 X24 - 0.0722 X34$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	-37.513	4.697	-7.99	0.000
X1.4	0.78484	0.06581	11.93	0.000
X2.4	0.6263	0.1618	3.87	0.002
X3.4	-0.07222	0.06126	-1.18	0.260

S = 1.243 R-Sq = 97.5% R-Sq(adj) = 97.0%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	796.14	265.38	171.68	0.000
Residual Error	13	20.10	1.55		
Total	16	816.24			

Source	DF	Seq SS
X14	1	771.46
X24	1	22.53
X34	1	2.15

Unusual Observations

Obs	X14	Y4	Fit	SE Fit	Residual	St Resid
10	58.0	11.000	13.358	0.540	-2.358	-2.10R

R denotes an observation with a large standardized residual

Lampiran 4. Output Hasil Analisis Regresi dengan Metode Kuadrat Terkecil Tanpa Data Observasi 21, 4, 3, 1 dan 10 pada Data Oksidasi Amonia NH_3 menjadi Asam Nitrat HNO_3

Regression Analysis

The regression equation is

$$Y5 = -35.4 + 0.828 X15 + 0.508 X25 - 0.0957 X35$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	-35.409	4.058	-8.73	0.000
X15	0.82781	0.05823	14.22	0.000
X25	0.5084	0.1447	3.51	0.004
X35	-0.09574	0.05262	-1.82	0.094

S = 1.051 R-Sq = 98.4% R-Sq(adj) = 97.9%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	790.19	263.40	238.61	0.000
Residual Error	12	13.25	1.10		
Total	15	803.44			

Source	DF	Seq SS
X15	1	772.71
X25	1	13.82
X35	1	3.65

Lampiran 5. Matriks X_c dan Matriks X_c' Matriks X_c

19,52	5,9	2,71
19,52	5,9	1,71
14,52	3,9	3,71
1,52	2,9	0,71
1,52	0,9	0,71
1,52	1,9	0,71
1,52	2,9	6,71
1,52	2,9	6,71
-2,48	1,9	0,71
-2,48	-3,1	-6,29
-2,48	-3,1	2,71
-1,48	-4,1	1,71
-2,48	-3,1	-4,29
-2,48	-2,1	6,71
-10,48	-3,1	2,71
-10,48	-3,1	-0,29
-10,48	-2,1	-14,29
-10,48	-2,1	-7,29
-10,48	-1,1	-6,29
-4,48	-1,1	-4,29
9,52	-1,1	4,71

Matriks X_c'

19,52	19,52	14,52	1,52	1,52	1,52	1,52	1,52	-2,48	-2,48	-2,48	-1,48
5,9	5,9	3,9	2,9	0,9	1,9	2,9	2,9	1,9	-3,1	-3,1	-4,1
2,71	1,71	3,71	0,71	0,71	0,71	6,71	6,71	0,71	-6,29	2,71	1,71
-2,48	-2,48	-10,48	-10,48	-10,48	-10,48	-10,48	-10,48	-4,48	9,52		
-3,1	-2,1	-3,1	-3,1	-2,1	-2,1	-1,1	-1,1	-1,1	-1,1		
-4,29	6,71	2,71	-0,29	-14,29	-7,29	-6,29	-4,29	4,71			

Lampiran 6. Vektor u^0 pada Iterasi Pertama sampai Ketujuh

Iterasi I	Iterasi II	Iterasi III	Iterasi IV	Iterasi V	Iterasi VI	Iterasi VII
$\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 9 \\ 10 \\ -5 \\ -8 \\ -7 \\ -3 \\ -9 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 9 \\ 10 \\ -4 \\ -9 \\ -5 \\ -1 \\ -8 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \\ -7 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 9 \\ 10 \\ -5 \\ -9 \\ -6 \\ -1 \\ -8 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \\ -7 \\ -2 \\ 7 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 9 \\ 10 \\ -5 \\ -9 \\ -6 \\ -1 \\ -7 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \\ -8 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 9 \\ 10 \\ -5 \\ -9 \\ -6 \\ -1 \\ -8 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \\ -7 \\ -3 \\ 7 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 9 \\ 10 \\ -5 \\ -9 \\ -6 \\ -1 \\ -8 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \\ -7 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 9 \\ 10 \\ -5 \\ -9 \\ -6 \\ -1 \\ -7 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \\ -8 \\ -3 \\ 7 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}$

Lampiran 7. Tabel Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Estimasi Parameter Regresi β .

No	$Slope$ $\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$	$ x_i - x_j $	Kumulatif $ x_i - x_j $				
1	-57	0,2	0,2	41	-0,5344	18,9	772,7
2	-9,6667	0,3	0,5	42	-0,5296	42,3	815
3	-8,5	0,6	1,1	43	-0,5256	23,4	838,4
4	-5,6875	4,8	5,9	44	-0,5162	27,7	866,1
5	-3,4565	4,6	10,5	45	-0,4966	29,2	895,3
6	-2,2667	6	16,5	46	-0,4656	26,2	921,5
7	-1,8881	14,3	30,8	47	-0,4426	23,5	945
8	-1,7609	9,2	40	48	-0,4132	24,2	969,2
9	-1,6145	8,3	48,3	49	-0,3793	5,8	975
10	-1,5	11,8	60,1	50	-0,3534	23,2	998,2
11	-1,3459	13,3	73,4	51	-0,2906	26,5	1024,7
12	-1,2907	8,6	82	52	-0,2773	25,6	1050,3
13	-1,2577	19,4	101,4	53	-0,2526	29,3	1079,6
14	-1,1257	19,1	120,5	54	-0,2404	10,4	1090
15	-1,1064	14,1	134,6	55	-0,2314	22,9	1112,9
16	-1,0688	21,8	156,4	56	-0,1987	31,7	1144,6
17	-1,0566	26,5	182,9	57	-0,1743	48,2	1192,8
18	-1,0071	28	210,9	58	-0,173	49,7	1242,5
19	-0,9441	17,9	228,8	59	-0,1552	29	1271,5
20	-0,8814	19,4	248,2	60	-0,1333	1,5	1273
21	-0,8503	18,7	266,9	61	-0,0652	4,6	1277,6
22	-0,806	13,4	280,3	62	-0,0388	23,2	1300,8
23	-0,7694	36	316,3	63	-0,0323	21,7	1322,5
24	-0,744	37,5	353,8	64	0,0316	9,5	1332
25	-0,7007	14,7	368,5	65	0,11	30,9	1362,9
26	-0,6821	17,3	385,8	66	0,1311	6,1	1369
27	-0,6771	19,2	405	67	0,1407	26,3	1395,3
28	-0,6667	2,7	407,7	68	0,1986	14,6	1409,9
29	-0,6383	18,8	426,5	69	0,2138	15,9	1425,8
30	-0,6139	15,8	442,3	70	0,2353	17	1442,8
31	-0,6107	41,1	483,4	71	0,2555	36,4	1479,2
32	-0,6031	13,1	496,5	72	0,2653	9,8	1489
33	-0,5967	18,1	514,6	73	0,2805	30,3	1519,3
34	-0,5939	42,6	557,2	74	0,2878	20,5	1539,8
35	-0,5588	23,8	581	75	0,4056	14,3	1554,1
36	-0,5525	21,9	602,9	76	0,4583	2,4	1556,5
37	-0,5517	43,5	646,4	77	0,4933	7,5	1564
38	-0,5509	21,6	668	78	0,5098	5,1	1569,1
39	-0,5441	40,8	708,8	79	0,5545	10,1	1579,2
40	-0,5378	45	753,8	80	0,9032	21,7	1600,9
				81	1,0727	5,5	1606,4
				82	1,1458	4,8	1611,2
				83	1,2	4	1615,2
				84	1,582	12,2	1627,4

85	1,7172	9,9	1637,3
86	1,8649	7,4	1644,7
87	2,3521	7,1	1651,8
88	2,5227	4,4	1656,2

89	3,3191	4,7	1660,9
90	4,2632	3,8	1664,7
91	11,4167	1,2	1665,9

Lampiran 8. Tabel Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Nilai t pada Iterasi Pertama.

No	<i>Slope</i>	$ w_i - w_j $	Kumulatif $ w_i - w_j $
	$\frac{z_i - z_j}{w_i - w_j}$		
1	-65,355	0,12324	0,12324
2	-65,355	0,04108	0,16432
3	-57,241	0,12324	0,28756
4	-25,375	0,19245	0,48001
5	-15,959	0,39282	0,87283
6	-15,266	0,64722	1,52005
7	-15,193	0,57137	2,09142
8	-13,507	0,17855	2,26997
9	-13,027	0,27393	2,5439
10	-10,17	0,83208	3,37598
11	-9,015	0,79987	4,17585
12	-8,213	0,92975	5,1056
13	-7,304	0,791	5,8966
14	-6,472	0,94365	6,84025
15	-6,442	1,14274	7,98299
16	-6,328	1,13643	9,11942
17	-6,299	0,19909	9,31851
18	-6,246	0,33555	9,65406
19	-5,436	2,14869	11,80275
20	-5,287	1,81314	13,61589
21	-4,9	0,35805	13,97394
22	-4,435	1,01226	14,9862
23	-4,348	1,35769	16,34389
24	-4,327	1,87476	18,21865
25	-4,095	0,34543	18,56408
26	-3,995	2,58327	21,14735
27	-3,849	2,22522	23,37257
28	-3,726	1,02214	24,39471
29	-3,629	0,44813	24,84284
30	-3,622	3,53356	28,3764
31	-3,537	0,67671	29,05311
32	-3,272	0,12988	29,18299
33	-3,235	1,30834	30,49133
34	-3,115	0,70851	31,19984
35	-2,824	1,6588	32,85864
36	-2,608	0,95029	33,80893
37	-2,583	2,58991	36,39884
38	-2,56	2,74256	39,1414
39	-2,545	0,53693	39,67833
40	-2,534	1,79227	41,4706
41	-2,445	1,31661	42,78721
42	-2,339	2,39713	45,18434
43	-2,313	0,40705	45,59139
44	-2,274	2,39082	47,98221
45	-2,162	1,44684	49,42905
46	-2,155	1,08376	50,51281
47	-2,079	3,14074	53,65355
48	-2,044	2,73369	56,38724
49	-1,982	2,60381	58,99105
50	-1,944	1,43422	60,42527
51	-1,867	1,72042	62,14569
52	-1,684	3,41032	65,55601
53	-1,605	2,70148	68,25749
54	-1,457	0,74992	69,00741
55	-1,398	0,44813	69,45554
56	-1,391	3,41032	72,86586
57	-1,39	2,96219	75,82805
58	-1,291	0,35046	76,17851
59	-1,261	1,08879	77,2673
60	-1,247	0,73833	78,00563
61	-1,199	1,50147	79,5071
62	-1,145	0,98106	80,48816
63	-1,12	3,54515	84,03331
64	-1,07	2,19804	86,23135
65	-1,061	1,75119	87,98254
66	-1,011	2,88634	90,86888
67	-0,968	3,58291	94,45179
68	-0,953	0,77013	95,22192

69	-0,806	1,38487	96,60679	115	1,325	3,45967	173,5356
70	-0,792	0,69657	97,30336	116	1,338	2,40872	175,9443
71	-0,721	0,80651	98,10987	117	1,344	2,49352	178,4378
72	-0,507	1,79891	99,90878	118	1,345	2,78304	181,2208
73	-0,44	0,34287	100,2517	119	1,383	1,46738	182,6882
74	-0,376	2,63262	102,8843	120	1,4	1,25439	183,9426
75	-0,32	2,34974	105,234	121	1,44	1,22754	185,1702
76	-0,301	1,0195	106,2535	122	1,442	2,57824	187,7484
77	-0,231	0,67663	106,9301	123	1,491	3,5945	191,3429
78	-0,227	1,93605	108,8662	124	1,497	2,7631	194,106
79	-0,138	1,86249	110,7287	125	1,512	1,90161	196,0076
80	-0,074	1,39314	112,1218	126	1,543	1,53556	197,5432
81	0,013	2,61932	114,7411	127	1,571	2,65316	200,1963
82	0,098	1,94269	116,6838	128	1,595	2,44017	202,6365
83	0,213	1,59982	118,2837	129	1,642	1,94269	204,5792
84	0,253	0,58296	118,8666	130	1,656	2,71307	207,2923
85	0,253	1,16592	120,0325	131	1,684	1,82576	209,118
86	0,293	0,55083	120,5834	132	1,731	3,01154	212,1296
87	0,331	2,00431	122,5877	133	1,802	1,18578	213,3153
88	0,335	1,04268	123,6304	134	1,859	2,7631	216,0784
89	0,336	2,27457	125,9049	135	1,863	1,77173	217,8502
90	0,339	1,81281	127,7177	136	1,941	1,55874	219,4089
91	0,345	1,45348	129,1712	137	1,989	0,71515	220,1241
92	0,395	2,61932	131,7905	138	1,993	0,81146	220,9355
93	0,519	0,80651	132,597	139	2,04	2,13011	223,0656
94	0,632	1,92411	134,5212	140	2,04	2,89793	225,9636
95	0,637	2,27389	136,795	141	2,058	2,08647	228,05
96	0,656	2,75415	139,5492	142	2,194	1,53556	229,5856
97	0,68	1,0195	140,5687	143	2,225	0,91552	230,5011
98	0,765	2,17119	142,7399	144	2,303	1,3276	231,8287
99	0,834	1,578	144,3179	145	2,309	0,57137	232,4001
100	0,838	2,30866	146,6265	146	2,373	0,82041	233,2205
101	0,878	3,19009	149,8166	147	2,381	1,1851	234,4056
102	0,984	0,88143	150,6981	148	2,405	1,59718	236,0028
103	1	2,63926	153,3373	149	2,412	1,95659	237,9594
104	1,005	1,59726	154,9346	150	2,476	0,41208	238,3714
105	1,008	1,75783	156,6924	151	2,48	1,67039	240,0418
106	1,036	3,45967	160,1521	152	2,49	2,31497	242,3568
107	1,055	2,57824	162,7303	153	2,549	1,7436	244,1004
108	1,077	2,27389	165,0042	154	2,848	0,95524	245,0556
109	1,154	0,82041	165,8246	155	2,913	0,26958	245,3252
110	1,247	0,67663	166,5013	156	2,916	0,35838	245,6836
111	1,251	1,26598	167,7672	157	2,94	0,85893	246,5425
112	1,267	0,94134	168,7086	158	3,032	1,59718	248,1397
113	1,271	1,15433	169,8629	159	3,133	0,43458	248,5743
114	1,287	0,21299	170,0759	160	3,225	1,1851	249,7594

161	3,242	1,73201	251,4914	187	6,8	0,55747	271,1475
162	3,482	1,31993	252,8113	188	6,912	0,37228	271,5198
163	3,674	1,08743	253,8988	189	7,183	0,57768	272,0974
164	3,727	0,77677	254,6755	190	7,673	0,18486	272,2823
165	4,047	0,72905	255,4046	191	7,673	0,14378	272,4261
166	4,174	0,30435	255,7089	192	8,989	0,37859	272,8047
167	4,226	0,84035	256,5493	193	9,298	0,8135	273,6182
168	4,343	0,92055	257,4698	194	10,417	0,585	274,2032
169	4,706	1,26163	258,7315	195	11,312	0,44122	274,6444
170	4,759	1,14905	259,8805	196	13,157	0,13483	274,7792
171	5,141	0,36469	260,2452	197	14,324	0,45512	275,2343
172	5,186	0,51606	260,7613	198	16,369	0,37892	275,6133
173	5,194	0,99205	261,7533	199	18,895	0,1656	275,7789
174	5,496	0,48921	262,2425	200	23,901	0,06162	275,8405
175	5,499	1,26163	263,5041	201	25,792	0,24213	276,0826
176	5,522	1,39646	264,9006	202	28,538	0,14378	276,2264
177	5,533	0,82705	265,7277	203	31,463	0,15042	276,3768
178	5,594	0,79067	266,5183	204	40,715	0,07653	276,4533
179	5,741	0,13483	266,6532	205	109,942	0,0139	276,4672
180	5,857	0,50847	267,1616	206	189,035	0,04935	276,5166
181	6,036	0,73697	267,8986	207	251,1	0,02054	276,5371
182	6,328	0,40441	268,303	208	546,596	0,00664	276,5438
183	6,433	0,2285	268,5315	209	761,726	0,01159	276,5554
184	6,602	0,96188	269,4934	210	*	0	276,5554
185	6,622	0,26958	269,763				
186	6,742	0,82705	270,59				

Lampiran 9. Tabel Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Nilai t pada Iterasi Kedua.

No	$Slope$ $\frac{z_i - z_j}{w_i - w_j}$	$ w_i - w_j $	Kumulatif $ w_i - w_j $
1	-8994,4	0,0007	0,0007
2	-526,5	0,01151	0,01221
3	-435,86	0,03468	0,04689
4	-390,83	0,02317	0,07006
5	-351,29	0,00653	0,07659
6	-259,55	0,03398	0,11057
7	-175,04	0,04634	0,15691
8	-108,73	0,04682	0,20373
9	-100,02	0,09006	0,29379

10	-76,62	0,07453	0,36832
11	-74,68	0,02804	0,39636
12	-62,32	0,14153	0,53789
13	-59,27	0,11349	0,65138
14	-48,35	0,135	0,78638
15	-42,44	0,30848	1,09486
16	-39,38	0,09471	1,18957
17	-37,53	0,07855	1,26812
18	-31,55	0,23395	1,50207
19	-30,35	0,26808	1,77015
20	-30,35	0,08936	1,85951
21	-26,62	0,26808	2,12759
22	-26,58	0,05287	2,18046

23	-24,54	0,06667	2,24713	68	-4,58	0,45547	20,20653
24	-23,67	0,29697	2,54410	69	-4,57	0,13308	20,33961
25	-22,08	0,30778	2,85188	70	-4,49	0,62054	20,96015
26	-21,95	0,54745	3,39933	71	-4,02	1,01506	21,97521
27	-19,7	0,10172	3,50105	72	-3,66	0,16887	22,14408
28	-19,68	0,29564	3,79669	73	-3,55	0,55959	22,70367
29	-19,01	0,32014	4,11683	74	-3,36	0,80841	23,51208
30	-18,69	0,21842	4,33525	75	-3,18	0,32346	23,83554
31	-16,36	0,41533	4,75058	76	-3,18	0,3408	24,17634
32	-16,28	0,08818	4,83876	77	-2,93	0,24882	24,42516
33	-15,22	0,15555	4,99431	78	-2,78	0,96219	25,38735
34	-14,78	0,3135	5,30781	79	-2,7	0,85726	26,24461
35	-14,29	0,50229	5,81010	80	-2,64	0,15459	26,39920
36	-13,87	0,34674	6,15684	81	-2,2	0,19038	26,58958
37	-13,78	0,19691	6,35375	82	-1,99	0,85951	27,44909
38	-13,76	0,22126	6,57501	83	-1,92	0,55767	28,00676
39	-12,85	0,44942	7,02443	84	-1,77	0,36729	28,37405
40	-12,14	0,38729	7,41172	85	-1,7	0,4026	28,77665
41	-12,09	0,13308	7,54480	86	-1,53	0,24561	29,02226
42	-11,6	0,59213	8,13693	87	-1,39	0,58062	29,60288
43	-11,28	0,54188	8,67881	88	-1,16	0,3888	29,99168
44	-11,11	0,53594	9,21475	89	-1,13	1,09623	31,08791
45	-11,01	0,4088	9,62355	90	-0,97	0,59143	31,67934
46	-10,46	0,54675	10,17030	91	-0,86	0,46735	32,14669
47	-9,56	0,32062	10,49092	92	-0,82	0,69898	32,84567
48	-9,43	0,54188	11,03280	93	-0,18	0,23421	33,07988
49	-9,38	0,10268	11,13548	94	-0,11	0,22174	33,30162
50	-9,24	0,22126	11,35674	95	-0,01	0,10755	33,40917
51	-9,11	0,15459	11,51133	96	0,13	0,82553	34,23470
52	-8,96	0,55911	12,07044	97	0,22	0,60379	34,83849
53	-8,74	0,6543	12,72474	98	0,3	0,15378	34,99227
54	-7,45	0,09519	12,81993	99	0,66	0,5048	35,49707
55	-7,44	0,58346	13,40339	100	0,79	0,70156	36,19863
56	-6,66	0,56944	13,97283	101	0,82	0,35102	36,54965
57	-6,64	0,77609	14,74892	102	0,93	0,29992	36,84957
58	-6,58	0,20665	14,95557	103	1,01	1,05974	37,90931
59	-6,57	0,45739	15,41296	104	1,28	0,46735	38,37666
60	-6,45	0,78085	16,19381	105	1,35	0,82553	39,20219
61	-6,27	0,32346	16,51727	106	1,4	0,53664	39,73883
62	-5,93	0,22244	16,73971	107	1,42	0,35818	40,09701
63	-5,79	0,62626	17,36597	108	1,98	0,11836	40,21537
64	-5,29	0,64777	18,01374	109	1,98	0,23672	40,45209
65	-5,18	0,72322	18,73696	110	2,05	0,45595	40,90804
66	-5,17	0,78085	19,51781	111	2,26	0,67094	41,57898
67	-4,65	0,23325	19,75106	112	2,4	0,31442	41,89340

113	2,46	1,00687	42,90027	159	9,9	0,30789	61,92887
114	2,48	0,69245	43,59272	160	9,95	0,1022	62,03107
115	2,77	0,63884	44,23156	161	10,14	0,44193	62,47300
116	2,84	0,85309	45,08465	162	10,69	0,13404	62,60704
117	2,84	0,33593	45,42058	163	10,75	0,24609	62,85313
118	2,92	0,2341	45,65468	164	10,99	0,3004	63,15353
119	3,02	0,64869	46,30337	165	11,31	0,14389	63,29742
120	3,23	0,40212	46,70549	166	11,47	0,26166	63,55908
121	3,23	0,31276	47,01825	167	11,88	0,27247	63,83155
122	3,42	1,14091	48,15916	168	12,03	0,31538	64,14693
123	3,5	0,46831	48,62747	169	12,82	0,31276	64,45969
124	3,62	0,33427	48,96174	170	13,02	0,18134	64,64103
125	3,76	0,24491	49,20665	171	13,12	0,32357	64,96460
126	3,8	0,90419	50,11084	172	13,32	0,12655	65,09115
127	3,87	0,49491	50,60575	173	14,79	0,55745	65,64860
128	3,92	0,47912	51,08487	174	16,97	0,46761	66,11621
129	4,08	0,23421	51,31908	175	17,87	0,08866	66,20487
130	4,26	0,50207	51,82115	176	19,48	0,15411	66,35898
131	4,34	0,78273	52,60388	177	19,54	0,20521	66,56419
132	4,4	0,22174	52,82562	178	19,63	0,54878	67,11297
133	4,41	0,16064	52,98626	179	19,74	0,0511	67,16407
134	4,5	0,23897	53,22523	180	20,62	0,06715	67,23122
135	4,55	0,36076	53,58599	181	21,84	0,01081	67,24203
136	4,87	0,44846	54,03445	182	21,93	0,28365	67,52568
137	4,98	0,18215	54,21660	183	22,53	0,41474	67,94042
138	5,08	0,46997	54,68657	184	22,61	0,11183	68,05225
139	5,14	0,28782	54,97439	185	22,7	0,10102	68,15327
140	5,22	0,60427	55,57866	186	25,79	0,09032	68,24359
141	5,36	0,54601	56,12467	187	26,32	0,07951	68,32310
142	5,42	0,12655	56,25122	188	29,55	0,07866	68,40176
143	5,8	0,40308	56,65430	189	29,91	0,2334	68,63516
144	6,05	0,51277	57,16707	190	33,02	0,31206	68,94722
145	7,02	0,53712	57,70419	191	34,19	0,2334	69,18062
146	7,19	0,2341	57,93829	192	34,96	0,08117	69,26179
147	7,33	0,41544	58,35373	193	35,62	0,26096	69,52275
148	7,4	0,2738	58,62753	194	38,82	0,19927	69,72202
149	7,51	0,18134	58,80887	195	40,76	0,02317	69,74519
150	7,7	0,42625	59,23512	196	42,27	0,07866	69,82385
151	7,84	0,24491	59,48003	197	47,76	0,02756	69,85141
152	8,11	0,21174	59,69177	198	57,31	0,01236	69,86377
153	8,15	0,54948	60,24125	199	58,91	0,10685	69,97062
154	8,21	0,23325	60,47450	200	84,04	0,02756	69,99818
155	8,41	0,56029	61,03479	201	85,61	0,10032	70,09850
156	8,86	0,31538	61,35017	202	106,45	0,07881	70,17731
157	9,19	0,2493	61,59947	203	110,29	0,05538	70,23269
158	9,29	0,02151	61,62098	204	115,13	0,04468	70,27737

205	167,64	0,02365	70,30102	209	6292,44	0,00048	70,33814
206	290,39	0,01284	70,31386	210	*	0	70,33814
207	600,72	0,01166	70,32552				
208	825,76	0,01214	70,33766				

Lampiran 10. Tabel Hasil Perhitungan untuk Rata-Rata Pasangan Sisaan dengan Urutan dari Kecil ke Besar.

No	A_{ij}				
1	-8,4422	34	-1,5992	70	-0,7831
2	-5,3590	35	-1,5989	71	-0,7831
3	-5,2720	36	-1,5295	72	-0,7830
4	-5,2718	37	-1,5294	73	-0,7582
5	-4,9793	38	-1,5164	74	-0,7137
6	-4,9032	39	-1,4425	75	-0,7134
7	-4,7694	40	-1,4424	76	-0,7072
8	-4,6127	41	-1,4422	77	-0,7069
9	-4,6126	42	-1,4422	78	-0,7035
10	-4,4793	43	-1,4403	79	-0,7033
11	-4,2211	44	-1,3961	80	-0,6821
12	-4,1211	45	-1,3641	81	-0,6582
13	-3,8839	46	-1,3091	82	-0,6498
14	-3,8774	47	-1,3089	83	-0,6497
15	-3,8737	48	-1,3065	84	-0,5820
16	-3,3901	49	-1,2303	85	-0,5483
17	-3,3805	50	-1,1498	86	-0,5164
18	-3,2059	51	-1,1497	87	-0,4482
19	-2,2758	52	-1,1379	88	-0,4210
20	-2,2135	53	-1,0965	89	-0,4145
21	-2,1888	54	-1,0736	90	-0,4108
22	-2,1886	55	-1,0736	91	-0,3916
23	-2,1018	56	-1,0509	92	-0,3915
24	-2,1016	57	-1,0507	93	-0,3448
25	-2,1013	58	-1,0379	94	-0,3383
26	-1,8961	59	-1,0164	95	-0,3347
27	-1,8200	60	-0,9509	96	-0,3069
28	-1,8091	61	-0,9506	97	-0,2973
29	-1,8089	62	-0,9403	98	-0,2915
30	-1,7617	63	-0,9398	99	-0,2915
31	-1,7330	64	-0,9398	100	-0,2582
32	-1,7327	65	-0,8149	101	-0,2199
33	-1,6862	66	-0,8065	102	-0,2197
		67	-0,8007	103	-0,2110
		68	-0,7942	104	-0,2103
		69	-0,7905	105	-0,2101

106	-0,2045
107	-0,2009
108	-0,1582
109	-0,1227
110	-0,0543
111	-0,0543
112	-0,0478
113	-0,0478
114	-0,0442
115	-0,0441
116	-0,0357
117	-0,0355
118	0,0000
119	0,0728
120	0,0791
121	0,0824
122	0,0856
123	0,0892
124	0,1001
125	0,1490
126	0,1586
127	0,2001
128	0,2570
129	0,2828
130	0,2924
131	0,3332
132	0,3373
133	0,3438
134	0,3474
135	0,4373
136	0,4395
137	0,4395
138	0,4438
139	0,4475
140	0,4491
141	0,4491
142	0,4670
143	0,5728
144	0,5824
145	0,6237
146	0,6237
147	0,6745
148	0,6810

149	0,6847
150	0,6875
151	0,6912
152	0,6948
153	0,7570
154	0,8310
155	0,8406
156	0,8698
157	0,9311
158	0,9407
159	0,9568
160	0,9570
161	1,0152
162	1,1153
163	1,1683
164	1,1748
165	1,1779
166	1,1784
167	1,1844
168	1,1880
169	1,2495
170	1,3216
171	1,3256
172	1,3525
173	1,3590
174	1,3626
175	1,4086
176	1,4088
177	1,4594
178	1,6161
179	1,6162
180	1,6620
181	1,6716
182	1,6812
183	1,7013
184	1,7495
185	1,7774
186	1,8462
187	1,8558
188	1,9112
189	2,0077
190	2,0304

191	2,0679
192	2,0680
193	2,1077
194	2,2013
195	2,2683
196	2,3449
197	2,3514
198	2,3551
199	2,3553
200	2,3556
201	2,4595
202	2,5595
203	2,6480
204	2,7242
205	2,7967
206	2,8032
207	2,8069
208	2,8387
209	2,8483
210	2,8580
211	3,0147
212	3,0147
213	3,0229
214	3,1480
215	3,2905
216	3,3001
217	3,4062
218	3,4747
219	3,5063
220	3,7435
221	3,7500
222	3,7536
223	4,0153
224	4,2372
225	4,2468
226	4,4214
227	4,4671
228	4,9189
229	5,4139
230	5,8657
231	6,8124

Lampiran 11. Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Vektor u^0 , Vektor d , Nilai t dan Vektor b^* pada Iterasi Ketiga.

Tabel 11 a. Hasil Perhitungan Vektor u^0 pada Iterasi Ketiga.

$y_i - (b^0)' x_i$	$\text{rank}[y_i - (b^0)' x_i]$	$\text{rank}[y_i - (b^0)' x_i] - 11$
-36,0169	19	8
-41,1315	7	-4
-35,0982	20	9
-33,2536	21	10
-41,3955	6	-5
-42,3246	2	-9
-41,5658	5	-6
-40,5658	10	-1
-42,1678	3	-8
-39,3249	13	2
-38,2931	17	6
-39,2678	15	4
-42,0956	4	-7
-40,7636	9	-2
-37,9797	18	7
-39,3236	14	3
-40,8576	8	-3
-40,0552	11	0
-39,8696	12	1
-38,3754	16	5
-48,3922	1	-10

Setelah vektor u^0 diperoleh, dihitung vektor $d = (X_c' X_c)^{-1} X_c' u^0$ dengan X_c merupakan matriks berorde $n \times k$ dengan entri $x_{ij} - \bar{x}_j$, diperoleh vektor $d = (0,02459, -0,08642, 0,00926)$.

Pada tabel 11 b dapat diperoleh nilai t yang meminimumkan (4.10) dengan menghitung,

$$-\frac{1}{2}T + T_{km} < 0 \text{ dan } -\frac{1}{2}T + T_{km} + |w_k - w_m| > 0.$$

Diperoleh nilai *slope* garis pada urutan ke-98 karena

$$-\frac{1}{2}T + T_{km} < 0$$

$$-21,9789 + 21,6454 = -0,33353 < 0$$

dan

$$-\frac{1}{2}T + T_{km} + |w_k - w_m| > 0$$

$$-21,9789 + 21,6454 + 0,3858 = 0,05227 > 0.$$

Diperoleh nilai t yang meminimumkan (4.10) yaitu nilai *slope* garis pada urutan ke-98 yang merupakan pasangan titik data ke 13 dan 9 yaitu 0,19, kemudian ditentukan vektor b^* untuk iterasi ketiga yaitu

$$b^* = b^0 + td$$

$$= \begin{pmatrix} 0,78918 + (0,19)(0,02459), 0,92909 + (0,19)(-0,08642), \\ -0,11464 + (0,19)(0,00926) \end{pmatrix}$$

$$= (0,79385, 0,91267, -0,11288).$$

Tabel 11 b. Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Nilai t pada Iterasi Ketiga

No	<i>Slope</i> $\frac{z_i - z_j}{w_i - w_j}$	$ w_i - w_j $	Kumulatif $ w_i - w_j $				
1	-1008	0,00228	0,00228	17	-47,11	0,17284	0,92756
2	-268,84	0,0123	0,01458	18	-44,82	0,09431	1,02187
3	-233,9	0,03901	0,05359	19	-44,17	0,12827	1,15014
4	-149,61	0,05556	0,10915	20	-42,37	0,03396	1,1841
5	-149,61	0,01852	0,12767	21	-41,75	0,31841	1,50251
6	-143,81	0,021	0,14867	22	-40,9	0,19262	1,69513
7	-131,61	0,05556	0,20423	23	-40,46	0,2241	1,91923
8	-108,06	0,06294	0,26717	24	-40,12	0,19014	2,10937
9	-104,96	0,08642	0,35359	25	-35,35	0,17198	2,28135
10	-96,65	0,02348	0,37707	26	-33,73	0,15184	2,43319
11	-80,07	0,01234	0,38941	27	-32,78	0,37756	2,81075
12	-71,75	0,14076	0,53017	28	-31,2	0,1319	2,94265
13	-67,58	0,04078	0,57095	29	-30,85	0,33748	3,28013
14	-62,02	0,11283	0,68378	30	-30,63	0,20558	3,48571
15	-56,99	0,03086	0,71464	31	-28,34	0,21418	3,69989
16	-48,97	0,04008	0,75472	32	-26,13	0,57944	4,27933
				33	-25,33	0,18742	4,46675
				34	-24,83	0,36526	4,83201
				35	-24,59	0,03086	4,86287
				36	-24,39	0,10064	4,96351

37	-24,31	0,06978	5,03329
38	-23,65	0,37386	5,40715
39	-23,43	0,4276	5,83475
40	-21,56	0,15346	5,98821
41	-19,53	0,24196	6,23017
42	-19,29	0,3893	6,61947
43	-18,89	0,14734	6,76681
44	-18,77	0,38682	7,15363
45	-17,98	0,17765	7,33128
46	-17,36	0,15968	7,49096
47	-17,21	0,4066	7,89756
48	-17,09	0,35534	8,2529
49	-16,76	0,22202	8,47492
50	-16,61	0,0883	8,56322
51	-16,14	0,5165	9,07972
52	-15,21	0,06234	9,14206
53	-14,94	0,52388	9,66594
54	-14,92	0,2794	9,94534
55	-14,36	0,59366	10,539
56	-13,69	0,20188	10,74088
57	-13,03	0,52388	11,26476
58	-12,96	0,58132	11,84608
59	-12,33	0,05744	11,90352
60	-12,31	0,49302	12,39654
61	-12,2	0,1099	12,50644
62	-11,86	0,11338	12,61982
63	-11,49	0,43868	13,0585
64	-11,13	0,54043	13,59893
65	-10,53	0,59138	14,19031
66	-10,06	0,23746	14,42777
67	-9,98	0,06978	14,49755
68	-9,61	0,2368	14,73435
69	-9,6	0,33855	15,0729
70	-9,58	0,10175	15,17465
71	-8,3	0,12968	15,30433
72	-8,22	0,17512	15,47945
73	-8,16	0,18706	15,66651
74	-7,07	0,26103	15,92754
75	-7,07	0,11728	16,04482
76	-6,56	0,31092	16,35574
77	-6,1	0,20684	16,56258
78	-5,74	0,38808	16,95066
79	-5,32	0,18124	17,1319
80	-4,81	0,3183	17,4502

81	-4,67	0,2035	17,6537
82	-4,32	0,29847	17,95217
83	-4,13	0,13706	18,08923
84	-3,48	0,20102	18,29025
85	-3,29	0,37574	18,66599
86	-3,08	0,17472	18,84071
87	-2,4	0,07716	18,91787
88	-2,3	0,38859	19,30646
89	-2,22	0,40352	19,70998
90	-2,17	0,32636	20,03634
91	-1,66	0,3183	20,35464
92	-1,59	0,09836	20,453
93	-1,59	0,19672	20,64972
94	-1,41	0,1945	20,84422
95	-0,59	0,33374	21,17796
96	-0,01	0,14116	21,31912
97	0,17	0,32625	21,64537
98	0,19	0,3858	22,03117
99	0,24	0,39118	22,42235
100	0,29	0,28684	22,70919
101	0,31	0,18509	22,89428
102	0,8	0,28744	23,18172
103	1,08	0,55465	23,73637
104	1,45	0,11728	23,85365
105	1,47	0,36956	24,22321
106	1,65	0,47749	24,7007
107	1,87	0,19668	24,89738
108	2,39	0,2284	25,12578
109	2,4	0,33374	25,45952
110	2,5	0,2924	25,75192
111	2,68	0,48487	26,23679
112	2,92	0,21646	26,45325
113	2,93	0,54231	26,99556
114	3,17	0,13706	27,13262
115	3,48	0,4529	27,58552
116	3,5	0,40124	27,98676
117	4,14	0,29978	28,28654
118	4,18	0,18478	28,47132
119	4,29	0,35722	28,82854
120	4,39	0,09012	28,91866
121	4,59	0,2245	29,14316
122	4,69	0,37574	29,5189
123	4,74	0,48487	30,00377
124	4,84	0,15124	30,15501

125	5,07	0,20456	30,35957
126	5,08	0,05744	30,41701
127	5,15	0,30288	30,71989
128	5,25	0,55237	31,27226
129	5,36	0,34781	31,62007
130	5,79	0,36759	31,98766
131	5,82	0,44056	32,42822
132	5,93	0,38312	32,81134
133	6,73	0,45401	33,26535
134	7,1	0,21606	33,48141
135	7,38	0,25618	33,73759
136	7,48	0,29978	34,03737
137	7,74	0,36728	34,40465
138	7,83	0,15862	34,56327
139	8,54	0,38312	34,94639
140	8,6	0,45062	35,39701
141	8,92	0,0675	35,46451
142	9	0,16606	35,63057
143	9,9	0,15113	35,7817
144	10,75	0,08642	35,86812
145	11,1	0,16272	36,03084
146	11,15	0,26892	36,29976
147	11,23	0,1062	36,40596
148	11,35	0,1825	36,58846
149	11,44	0,35226	36,94072
150	11,54	0,24606	37,18678
151	11,59	0,17902	37,3658
152	11,67	0,26584	37,63164
153	11,8	0,24384	37,87548
154	12,38	0,08334	37,95882
155	12,38	0,06482	38,02364
156	12,58	0,22612	38,24976
157	13,34	0,01978	38,26954
158	13,87	0,1864	38,45594
159	14,14	0,15862	38,61456
160	15,53	0,05915	38,67371
161	16,15	0,15372	38,82743
162	16,5	0,2539	39,08133
163	16,98	0,16657	39,2479
164	17,33	0,27525	39,52315
165	17,83	0,2161	39,73925
166	18,89	0,0889	39,82815
167	19,24	0,1864	40,01455
168	21,91	0,26291	40,27746

169	22,75	0,09628	40,37374
170	23,16	0,16378	40,53752
171	23,49	0,12776	40,66528
172	23,73	0,0675	40,73278
173	23,76	0,20376	40,93654
174	25,02	0,19809	41,13463
175	25,9	0,27297	41,4076
176	26,61	0,20547	41,61307
177	27,93	0,15554	41,76861
178	28,21	0,07488	41,84349
179	28,77	0,21382	42,05731
180	29,06	0,13894	42,19625
181	30,01	0,10919	42,30544
182	31,09	0,14632	42,45176
183	31,48	0,20547	42,65723
184	33,14	0,09628	42,75351
185	37,92	0,14632	42,89983
186	41,39	0,17461	43,07444
187	47,13	0,05004	43,12448
188	48,38	0,02778	43,15226
189	49,42	0,06912	43,22138
190	50,03	0,04938	43,27076
191	50,12	0,04134	43,3121
192	54,63	0,11546	43,42756
193	58,66	0,06482	43,49238
194	60,37	0,06542	43,5578
195	63,88	0,04934	43,60714
196	69,19	0,00738	43,61452
197	71,41	0,08819	43,70271
198	83,86	0,02156	43,72427
199	86,27	0,01544	43,73971
200	88,19	0,06841	43,80812
201	90,19	0,04685	43,85497
202	130,24	0,01006	43,86503
203	151,1	0,01907	43,8841
204	185,21	0,02904	43,91314
205	204,7	0,00738	43,92052
206	465,26	0,01422	43,93474
207	552,34	0,00926	43,944
208	746,58	0,01194	43,95594
209	4044,68	0,00188	43,95782
210	*	0	43,95782

Lampiran 12. Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Vektor u^0 , Vektor d , Nilai t dan Vektor b^* pada Iterasi Keempat.

Tabel 12 a. Hasil Perhitungan Vektor u^0 pada Iterasi Keempat.

$y_i - (b^0)'x_i$	$\text{rank}[y_i - (b^0)'x_i]$	$\text{rank}[y_i - (b^0)'x_i] - 11$
-36,1038	19	8
-41,2167	7	-4
-35,1963	20	9
-33,3022	21	10
-41,4769	6	-5
-42,3896	2	-9
-41,6249	5	-6
-40,6249	10	-1
-42,2142	4	-7
-39,441	13	2
-38,425	17	6
-39,4191	14	3
-42,2152	3	-8
-40,8862	9	-2
-38,0742	18	7
-39,4129	15	4
-40,9059	8	-3
-40,1157	11	0
-39,9155	12	1
-38,4528	16	5
-48,5508	1	-10

Setelah vektor u^0 diperoleh, dihitung vektor $d = (X_c' X_c)^{-1} X_c' u^0$ dengan X_c merupakan matriks berorde $n \times k$ dengan entri $x_{ij} - \bar{x}_j$, diperoleh vektor $d = (-0,01289, 0,01918, 0,02232)$.

Pada Tabel 12 b dapat diperoleh nilai t yang meminimumkan (4.10) dengan menghitung,

$$-\frac{1}{2}T + T_{km} < 0 \text{ dan } -\frac{1}{2}T + T_{km} + |w_k - w_m| > 0.$$

Diperoleh nilai *slope* garis pada urutan ke-103 karena

$$-\frac{1}{2}T + T_{km} < 0$$

$$-13,5369 + 13,4986 = -0,03832 < 0$$

dan

$$-\frac{1}{2}T + T_{km} + |w_k - w_m| > 0$$

$$-13,5369 + 13,4986 + 0,14649 = 0,10817 > 0.$$

Diperoleh nilai t yang meminimumkan (4.10) yaitu nilai *slope* garis pada urutan ke-103 yang merupakan pasangan titik data ke 12 dan 10 yaitu 0,1, kemudian ditentukan vektor b^* untuk iterasi keempat yaitu

$$b^* = b^0 + td$$

$$= \begin{pmatrix} 0,79385 + (0,1)(-0,01289), & 0,91267 + (0,1)(0,01918), \\ -0,11288 + (0,1)(0,02232) \end{pmatrix}$$

$$= (0,79256, 0,91459, -0,11065).$$

Tabel 12 b. Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Nilai t pada Iterasi Keempat

No	<i>Slope</i> $\frac{z_i - z_j}{w_i - w_j}$	$ w_i - w_j $	Kumulatif $ w_i - w_j $				
1	-1498,2	0,00315	0,00315	19	-71,5	0,04968	0,69281
2	-526,6	0,00534	0,00849	20	-70,5	0,1292	0,82201
3	-517,5	0,00816	0,01665	21	-62,1	0,13392	0,95593
4	-494,5	0,02042	0,03707	22	-62,1	0,04464	1,00057
5	-398,8	0,01006	0,04713	23	-61,7	0,11381	1,11438
6	-353,6	0,01728	0,06441	24	-58,9	0,03491	1,14929
7	-316,9	0,03928	0,10369	25	-58,7	0,09148	1,24077
8	-288,7	0,02922	0,13291	26	-58,6	0,05657	1,29734
9	-275,2	0,03238	0,16529	27	-56,8	0,11066	1,408
10	-185,5	0,0151	0,18039	28	-56,6	0,08424	1,49224
11	-145,8	0,04307	0,22346	29	-54,9	0,05409	1,54633
12	-124,6	0,01886	0,24232	30	-54,7	0,13392	1,68025
13	-119,1	0,0616	0,30392	31	-51,6	0,06255	1,7428
14	-115,6	0,06225	0,36617	32	-51,3	0,04968	1,79248
15	-84,7	0,08958	0,45575	33	-47,6	0,01918	1,81166
16	-74,9	0,08456	0,54031	34	-44,7	0,0327	1,84436
17	-73,9	0,05126	0,59157	35	-42,9	0,0918	1,93616
18	-73,9	0,05156	0,64313	36	-42,7	0,09871	2,03487
				37	-41,9	0,0591	2,09397
				38	-41,6	0,07262	2,16659
				39	-41,2	0,18546	2,35205
				40	-39,1	0,03992	2,39197

41	-37,7	0,16222	2,55419
42	-33,3	0,17101	2,7252
43	-29,9	0,21535	2,94055
44	-27,3	0,03616	2,97671
45	-26,5	0,10565	3,08236
46	-26,3	0,0676	3,14996
47	-26,2	0,14336	3,29332
48	-25,6	0,03771	3,33103
49	-25,2	0,21535	3,54638
50	-22,7	0,10846	3,65484
51	-22,6	0,1006	3,75544
52	-22,5	0,14712	3,90256
53	-21,8	0,21942	4,12198
54	-20,9	0,26376	4,38574
55	-20,9	0,11096	4,4967
56	-20,9	0,1528	4,6495
57	-20,8	0,11066	4,76016
58	-20,4	0,0723	4,83246
59	-19	0,11664	4,9491
60	-17,4	0,16567	5,11477
61	-17,1	0,26376	5,37853
62	-16,7	0,04434	5,42287
63	-16,7	0,08142	5,50429
64	-14,7	0,20058	5,70487
65	-14,4	0,1528	5,85767
66	-13,8	0,15216	6,00983
67	-13	0,1009	6,11073
68	-13	0,2449	6,35563
69	-12,1	0,20056	6,55619
70	-11,2	0,1814	6,73759
71	-11	0,25214	6,98973
72	-10,6	0,20719	7,19692
73	-10,4	0,07074	7,26766
74	-10,4	0,11664	7,3843
75	-9,2	0,21408	7,59838
76	-9	0,16285	7,76123
77	-8,9	0,2449	8,00613
78	-8,8	0,13298	8,13911
79	-8,1	0,2122	8,35131
80	-7,5	0,12826	8,47957
81	-6,7	0,09998	8,57955
82	-6,2	0,35368	8,93323
83	-5,9	0,2537	9,18693
84	-5,8	0,20719	9,39412
85	-5,8	0,25684	9,65096
86	-5,8	0,16786	9,81882
87	-5,4	0,18454	10,00336
88	-4,7	0,30934	10,3127

89	-4,2	0,3084	10,6211
90	-3,7	0,20936	10,83046
91	-3,4	0,14148	10,97194
92	-3,3	0,35368	11,32562
93	-3,3	0,2122	11,53782
94	-2,5	0,12386	11,66168
95	-2,4	0,23766	11,89934
96	-2,3	0,1138	12,01314
97	-2	0,2537	12,26684
98	-1,8	0,40994	12,67678
99	-1,4	0,28608	12,96286
100	-1,1	0,15594	13,1188
101	-0,9	0,17228	13,29108
102	0	0,2075	13,49858
103	0,1	0,14649	13,64507
104	0,1	0,23704	13,88211
105	0,1	0,09055	13,97266
106	0,1	0,3656	14,33826
107	0,3	0,0921	14,43036
108	0,7	0,40994	14,8403
109	1,4	0,24174	15,08204
110	1,9	0,30904	15,39108
111	1,9	0,19522	15,5863
112	2,1	0,28608	15,87238
113	3,4	0,05156	15,92394
114	3,4	0,10312	16,02706
115	4,5	0,304	16,33106
116	4,6	0,12794	16,459
117	4,8	0,0415	16,5005
118	4,9	0,17228	16,67278
119	5	0,1531	16,82588
120	5	0,2647	17,09058
121	5	0,19774	17,28832
122	5,1	0,20088	17,4892
123	5,1	0,30904	17,79824
124	5,1	0,2933	18,09154
125	5,1	0,13706	18,2286
126	5,1	0,15624	18,38484
127	5,3	0,09556	18,4804
128	5,4	0,13676	18,61716
129	5,8	0,10154	18,7187
130	5,9	0,04434	18,76304
131	7,3	0,20275	18,96579
132	7,9	0,36026	19,32605
133	8,5	0,15751	19,48356
134	9,1	0,10878	19,59234
135	9,6	0,25714	19,84948
136	10	0,20402	20,0535

137	10,6	0,16944	20,22294
138	11,3	0,16252	20,38546
139	11,5	0,1531	20,53856
140	13,3	0,2364	20,77496
141	13,8	0,10876	20,88372
142	14,6	0,1924	21,07612
143	14,9	0,16504	21,24116
144	15	0,04651	21,28767
145	15,7	0,10154	21,38921
146	16	0,25936	21,64857
147	16,8	0,1009	21,74947
148	17,6	0,07388	21,82335
149	18,3	0,05439	21,87774
150	18,7	0,04841	21,92615
151	20	0,06696	21,99311
152	20,9	0,13328	22,12639
153	21,6	0,12984	22,25623
154	22,8	0,07889	22,33512
155	23,2	0,0572	22,39232
156	23,3	0,08143	22,47375
157	23,7	0,09684	22,57059
158	24,3	0,15624	22,72683
159	25,1	0,0594	22,78623
160	26	0,05626	22,84249
161	27,5	0,10185	22,94434
162	27,5	0,27602	23,22036
163	27,8	0,1226	23,34296
164	27,9	0,21976	23,56272
165	29,3	0,19459	23,75731
166	30,7	0,13833	23,89564
167	30,9	0,22448	24,12012
168	32,9	0,14618	24,2663
169	34	0,03238	24,29868
170	35,3	0,22448	24,52316
171	37,1	0,08992	24,61308
172	37,1	0,05564	24,66872
173	37,9	0,05534	24,72406

174	41,7	0,10342	24,82748
175	42,5	0,18014	25,00762
176	43,5	0,02296	25,03058
177	46,4	0,11098	25,14156
178	50,9	0,17512	25,31668
179	51,5	0,12294	25,43962
180	52	0,15216	25,59178
181	56,9	0,11978	25,71156
182	58,7	0,06414	25,7757
183	59,9	0,1748	25,9505
184	67,1	0,04118	25,99168
185	74,9	0,09369	26,08537
186	79,8	0,05186	26,13723
187	81,6	0,03646	26,17369
188	83,5	0,07327	26,24696
189	84,5	0,07828	26,32524
190	84,7	0,10784	26,43308
191	85,1	0,07073	26,50381
192	86,3	0,07138	26,57519
193	99,1	0,00501	26,5802
194	110,2	0,02955	26,60975
195	128,3	0,03835	26,6481
196	135	0,04528	26,69338
197	135,5	0,0522	26,74558
198	141,3	0,07168	26,81726
199	156,7	0,01948	26,83674
200	168,4	0,09056	26,9273
201	189	0,0088	26,9361
202	213,1	0,03836	26,97446
203	229,1	0,02232	26,99678
204	271,3	0,01888	27,01566
205	473,8	0,01918	27,03484
206	528,2	0,01729	27,05213
207	703,2	0,01228	27,06441
208	1462,7	0,00913	27,07354
209	13215	0,0003	27,07384
210	*	0	27,07384

Lampiran 13. Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Vektor u^0 , Vektor d , Nilai t dan Vektor b^* pada Iterasi Kelima.

Tabel 13 a. Hasil Perhitungan Vektor u^0 pada Iterasi Kelima

$y_i - (b^0)' x_i$	$\text{rank}[y_i - (b^0)' x_i]$	$\text{rank}[y_i - (b^0)' x_i] - 11$
-36,2509	19	8
-41,3615	7	-4
-35,3483	20	9
-33,4623	21	10
-41,6332	6	-5
-42,5477	2	-9
-41,7984	5	-6
-40,7984	10	-1
-42,3775	3	-8
-39,5791	13	2
-38,5833	17	6
-39,5719	15	4
-42,3578	4	-7
-41,0552	8	-3
-38,2428	18	7
-39,5747	14	3
-41,0384	9	-2
-40,2639	11	0
-40,0678	12	1
-38,6019	16	5
-48,7019	1	-10

Setelah vektor u^0 yang diperoleh, dihitung vektor $d = (X_c' X_c)^{-1} X_c' u^0$ dengan X_c merupakan matriks berorde $n \times k$ dengan entri $x_{ij} - \bar{x}_j$, diperoleh vektor $d = (0,02533, -0,05929, -0,0342)$.

Pada Tabel 13 b dapat diperoleh nilai t yang meminimumkan (4.10) dengan menghitung,

$$-\frac{1}{2}T + T_{km} < 0 \text{ dan } -\frac{1}{2}T + T_{km} + |w_k - w_m| > 0.$$

Diperoleh nilai *slope* garis pada urutan ke-109 karena

$$-\frac{1}{2}T + T_{km} < 0$$

$$-24,0588 + 24,0091 = -0,0497 < 0$$

dan

$$-\frac{1}{2}T + T_{km} + |w_k - w_m| > 0$$

$$-24,0588 + 24,0091 + 0,46745 = 0,41775 > 0.$$

Diperoleh nilai t yang meminimumkan (4.10) yaitu nilai *slope* garis pada urutan ke-109 yang merupakan pasangan titik data ke 13 dan 9 yaitu 0,04, kemudian ditentukan vektor b^* untuk iterasi kelima yaitu

$$b^* = b^0 + td$$

$$= \begin{pmatrix} 0,79256 + (0,04)(0,02533), 0,91459 + (0,04)(-0,05929), \\ -0,11065 + (0,04)(-0,0342) \end{pmatrix}$$

$$= (0,79357, 0,91222, -0,11197).$$

Tabel 13 b. Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Nilai t pada Iterasi Kelima

No	<i>Slope</i> $\frac{z_i - z_j}{w_i - w_j}$	$ w_i - w_j $	Kumulatif $ w_i - w_j $				
1	-907,61	0,0052	0,00520	19	-63,14	0,0326	1,13466
2	-429,38	0,00655	0,01175	20	-56,71	0,07591	1,21057
3	-228,61	0,03691	0,04866	21	-50,55	0,04651	1,25708
4	-215,72	0,04682	0,09548	22	-50,3	0,303	1,56008
5	-173,74	0,01862	0,11410	23	-49,81	0,09869	1,65877
6	-167,71	0,00991	0,12401	24	-48,03	0,05785	1,71662
7	-153,24	0,05929	0,18330	25	-42,06	0,21702	1,93364
8	-149,43	0,0342	0,21750	26	-38,33	0,18442	2,11806
9	-133,41	0,09333	0,31083	27	-38,27	0,1726	2,29066
10	-125,05	0,01167	0,32250	28	-36,65	0,08878	2,37944
11	-124,14	0,05913	0,38163	29	-34,9	0,09517	2,47461
12	-98,48	0,1356	0,51723	30	-32,72	0,31962	2,79423
13	-86,5	0,11698	0,63421	31	-32,39	0,24387	3,03810
14	-78,64	0,07647	0,71068	32	-30,73	0,13744	3,17554
15	-71,13	0,05642	0,76710	33	-28,31	0,21575	3,39129
16	-71,09	0,08598	0,85308	34	-27,53	0,18602	3,57731
17	-68,91	0,11858	0,97166	35	-27,17	0,25802	3,83533
18	-66,21	0,1304	1,10206	36	-25,56	0,26609	4,10142
				37	-25,25	0,24371	4,34513
				38	-25,08	0,1352	4,48033
				39	-24,42	0,31307	4,79340
				40	-23,1	0,12058	4,91398

41	-22,19	0,16924	5,08322	89	-2,92	0,33289	17,66183
42	-21,52	0,06936	5,15258	90	-2,83	0,26449	17,92632
43	-21,35	0,04227	5,19485	91	-2,62	0,51044	18,43676
44	-20,99	0,08007	5,27492	92	-2,58	0,32378	18,76054
45	-20,91	0,42542	5,70034	93	-2,47	0,63062	19,39116
46	-20,06	0,25618	5,95652	94	-2,36	0,30684	19,69800
47	-20,04	0,30484	6,26136	95	-2,1	0,09349	19,79149
48	-19,93	0,04866	6,31002	96	-1,68	0,10132	19,89281
49	-18,33	0,34503	6,65505	97	-1,68	0,20264	20,09545
50	-18,15	0,07127	6,72632	98	-1,32	0,19513	20,29058
51	-16,83	0,33809	7,06441	99	-1,32	0,2728	20,56338
52	-16,18	0,29582	7,36023	100	-1,25	0,44907	21,01245
53	-15,77	0,2394	7,59963	101	-1,21	0,25394	21,26639
54	-15,55	0,5082	8,10783	102	-0,89	0,63062	21,89701
55	-14,99	0,50549	8,61332	103	-0,34	0,71069	22,60770
56	-13,58	0,5082	9,12152	104	-0,27	0,07016	22,67786
57	-13,3	0,20967	9,33119	105	-0,04	0,18898	22,86684
58	-13,14	0,15933	9,49052	106	-0,01	0,40784	23,27468
59	-12,98	0,1026	9,59312	107	0,01	0,21886	23,49354
60	-12,96	0,32642	9,91954	108	0,03	0,51556	24,00910
61	-12,39	0,49382	10,41336	109	0,04	0,46745	24,47655
62	-11,97	0,26049	10,67385	110	0,51	0,32378	24,80033
63	-11,71	0,28415	10,95800	111	0,52	0,36613	25,16646
64	-11,32	0,15789	11,11589	112	0,97	0,44907	25,61553
65	-11,27	0,1674	11,28329	113	1,07	0,71069	26,32622
66	-9,77	0,24931	11,53260	114	1,13	0,47129	26,79751
67	-9,68	0,16317	11,69577	115	1,24	0,26162	27,05913
68	-9,65	0,18922	11,88499	116	1,52	0,32122	27,38035
69	-9,31	0,44204	12,32703	117	1,54	0,38691	27,76726
70	-9,06	0,25282	12,57985	118	1,74	0,69902	28,46628
71	-8,32	0,11882	12,69867	119	1,93	0,3778	28,84408
72	-8,2	0,33944	13,03811	120	2,17	0,12529	28,96937
73	-7,69	0,31947	13,35758	121	2,4	0,51004	29,47941
74	-7,31	0,20065	13,55823	122	2,45	0,54752	30,02693
75	-7,15	0,28271	13,84094	123	2,87	0,27616	30,30309
76	-6,61	0,26449	14,10543	124	2,93	0,50389	30,80698
77	-5,69	0,08662	14,19205	125	3,01	0,22773	31,03471
78	-5,49	0,18155	14,37360	126	3,17	0,69902	31,73373
79	-5,35	0,52211	14,89571	127	3,26	0,47129	32,20502
80	-4,49	0,12865	15,02436	128	3,38	0,4462	32,65122
81	-4,13	0,32146	15,34582	129	3,55	0,2859	32,93712
82	-4,11	0,23764	15,58346	130	3,75	0,13224	33,06936
83	-3,83	0,18011	15,76357	131	3,81	0,19513	33,26449
84	-3,55	0,16317	15,92674	132	4,2	0,29118	33,55567
85	-3,49	0,41951	16,34625	133	4,37	0,51004	34,06571
86	-3,24	0,3078	16,65405	134	4,58	0,3778	34,44351
87	-3,24	0,2394	16,89345	135	4,63	0,16061	34,60412
88	-2,99	0,43549	17,32894	136	4,71	0,31491	34,91903

137	4,76	0,46138	35,38041
138	5,22	0,53585	35,91626
139	5,41	0,18267	36,09893
140	5,47	0,37524	36,47417
141	5,66	0,39122	36,86539
142	5,72	0,1702	37,03559
143	6,43	0,18458	37,22017
144	6,83	0,43453	37,65470
145	6,86	0,30812	37,96282
146	6,93	0,46138	38,42420
147	7,13	0,24995	38,67415
148	7,64	0,29118	38,96533
149	8,09	0,34687	39,31220
150	8,22	0,39122	39,70342
151	8,8	0,22629	39,92971
152	9,21	0,26625	40,19596
153	9,28	0,14751	40,34347
154	9,91	0,10004	40,44351
155	10,76	0,21463	40,65814
156	10,96	0,41487	41,07301
157	11,04	0,2068	41,27981
158	11,07	0,18626	41,46607
159	12,12	0,24555	41,71162
160	12,61	0,19609	41,90771
161	12,66	0,29821	42,20592
162	13,37	0,41487	42,62079
163	13,55	0,18858	42,80937
164	14,63	0,3726	43,18197
165	15,41	0,09605	43,27802
166	15,43	0,05929	43,33731
167	15,73	0,18402	43,52133
168	16,48	0,08007	43,60140
169	16,64	0,22805	43,82945
170	17,31	0,3726	44,20205
171	17,54	0,08358	44,28563
172	17,86	0,03875	44,32438
173	18,85	0,18858	44,51296
174	20,04	0,19689	44,70985

175	21,86	0,21974	44,92959
176	21,89	0,11331	45,04290
177	21,9	0,12801	45,17091
178	22,03	0,1376	45,30851
179	24,34	0,2517	45,56021
180	26,87	0,12369	45,68390
181	28,98	0,05402	45,73792
182	29,35	0,06097	45,79889
183	31,28	0,12673	45,92562
184	32,16	0,17747	46,10309
185	33,56	0,20943	46,31252
186	35,75	0,2052	46,51772
187	37,85	0,20249	46,72021
188	40,62	0,2052	46,92541
189	40,62	0,0684	46,99381
190	41,37	0,03196	47,02577
191	41,87	0,15038	47,17615
192	45,22	0,06744	47,24359
193	47,81	0,19082	47,43441
194	49,4	0,02222	47,45663
195	51,82	0,12242	47,57905
196	51,91	0,08142	47,66047
197	59,09	0,09109	47,75156
198	66,59	0,10811	47,85967
199	98,62	0,02365	47,88332
200	102,97	0,03707	47,92039
201	110,62	0,01342	47,93381
202	111,39	0,02669	47,96050
203	128,74	0,04882	48,00932
204	162,72	0,02541	48,03473
205	212,11	0,04203	48,07676
206	224,18	0,01231	48,08907
207	287,63	0,01662	48,10569
208	754,01	0,01007	48,11576
209	4961,95	0,00184	48,11760
210	*	0	48,11760

Lampiran 14. Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Vektor u^0 , Vektor d , Nilai t dan vektor b^* pada Iterasi Keenam.

Tabel 14 a. Hasil Perhitungan Vektor u^0 pada Iterasi Keenam

$y_i - (b^0)' x_i$	$\text{rank}[y_i - (b^0)' x_i]$	$\text{rank}[y_i - (b^0)' x_i] - 11$
-36,1504	19	8
-41,2624	7	-4
-35,2461	20	9
-33,3534	21	10
-41,5289	6	-5
-42,4412	2	-9
-41,6815	5	-6
-40,6815	10	-1
-42,2669	3	-8
-39,4896	13	2
-38,4818	17	6
-39,4752	14	3
-42,2656	4	-7
-40,9462	9	-2
-38,1332	18	7
-39,4692	15	4
-40,949	8	-3
-40,1652	11	0
-39,9654	12	1
-38,5029	16	5
-48,6052	1	-10

Dari vektor u^0 yang diperoleh, dihitung vektor $d = (X_c' X_c)^{-1} X_c' u^0$ dengan X_c merupakan matriks berorde $n \times k$ dengan entri $x_{ij} - \bar{x}_j$, diperoleh vektor $d = (0,007323, -0,04359, 0,010728)$.

Pada Tabel 14 b dapat diperoleh nilai t yang meminimumkan (4.10) dengan menghitung,

$$-\frac{1}{2}T + T_{km} < 0 \text{ dan } -\frac{1}{2}T + T_{km} + |w_k - w_m| > 0.$$

Diperoleh nilai *slope* garis pada urutan ke-106 karena

$$-\frac{1}{2}T + T_{km} < 0$$

$$-12,10397 + 12,06566 = -0,03831 < 0$$

dan

$$-\frac{1}{2}T + T_{km} + |w_k - w_m| > 0$$

$$-12,10397 + 12,06566 + 0,28387 = 0,24556 > 0.$$

Diperoleh nilai t yang meminimumkan (4.10) yaitu nilai *slope* garis pada urutan ke-106 yang merupakan pasangan titik data ke 13 dan 9 yaitu 0,01, kemudian ditentukan vektor b^* untuk iterasi keenam yaitu

$$b^* = b^0 + td$$

$$= \begin{pmatrix} 0,79357 + (0,01)(0,007323), & 0,91222 + (0,01)(-0,04359), \\ -0,11197 + (0,01)(0,010728) \end{pmatrix}$$

$$= (0,793646, \quad 0,911782, \quad -0,11186).$$

Tabel 14 b. Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Nilai t pada Iterasi Keenam

No	<i>Slope</i> $\frac{z_i - z_j}{w_i - w_j}$	$ w_i - w_j $	Kumulatif $ w_i - w_j $				
1	-3377,49	0,00038	0,00038	18	-129,38	0,06437	0,43537
2	-1854,98	0,00339	0,00377	19	-129,38	0,02146	0,45683
3	-790,88	0,00291	0,00668	20	-124,31	0,02250	0,47933
4	-671,85	0,01177	0,01845	21	-113,85	0,06437	0,54369
5	-623,41	0,01430	0,03275	22	-108,22	0,04187	0,58556
6	-580,61	0,01139	0,04414	23	-93,78	0,08718	0,67274
7	-457	0,02215	0,06629	24	-83,16	0,06468	0,73742
8	-397,66	0,00253	0,06882	25	-80,91	0,11292	0,85034
9	-335,48	0,02283	0,09165	26	-76,88	0,03220	0,88254
10	-298,28	0,02109	0,11274	27	-76,79	0,11870	1,00125
11	-291,02	0,01040	0,12314	28	-75,37	0,02012	1,02137
12	-208,48	0,04359	0,16673	29	-74,03	0,09482	1,11618
13	-184,59	0,02175	0,18848	30	-69,56	0,19206	1,30824
14	-178,44	0,01567	0,20415	31	-67,07	0,07678	1,38503
15	-153,94	0,04425	0,24840	32	-65,19	0,09725	1,48227
16	-132,11	0,04187	0,29027	33	-57,84	0,07336	1,55563
17	-129,71	0,08074	0,37100	34	-55,29	0,27586	1,83149
				35	-53,36	0,07914	1,91063
				36	-50,75	0,19907	2,10971
				37	-49,9	0,17861	2,28831
				38	-49,16	0,25336	2,54167

39	-48,58	0,05791	2,59958	87	-10,08	0,23120	9,82766
40	-43,34	0,05428	2,65386	88	-8,06	0,09143	9,91908
41	-39,17	0,15611	2,80997	89	-7,97	0,05260	9,97168
42	-39,05	0,15715	2,96712	90	-7,69	0,09521	10,06689
43	-37,53	0,16294	3,13005	91	-7,35	0,04262	10,10951
44	-37,5	0,18868	3,31873	92	-6,29	0,20945	10,31897
45	-37,47	0,21149	3,53022	93	-6,08	0,03286	10,35183
46	-37,15	0,02281	3,55303	94	-6,01	0,16684	10,51866
47	-37,05	0,03182	3,58485	95	-5,95	0,02929	10,54796
48	-36,95	0,10183	3,68667	96	-5,95	0,05858	10,60654
49	-36,44	0,23161	3,91828	97	-5,11	0,11424	10,72078
50	-33,68	0,16923	4,08751	98	-4,91	0,11803	10,83881
51	-32,74	0,21149	4,29900	99	-4,48	0,21711	11,05591
52	-32,67	0,26447	4,56347	100	-4,06	0,24164	11,29755
53	-32,39	0,05298	4,61645	101	-3,74	0,20878	11,50633
54	-31,77	0,04293	4,65938	102	-3,53	0,07541	11,58173
55	-30,01	0,25303	4,91240	103	-1,4	0,18866	11,77039
56	-29,19	0,04514	4,95755	104	-0,05	0,13095	11,90135
57	-27,8	0,26408	5,22163	105	0,01	0,16431	12,06566
58	-26,54	0,23227	5,45390	106	0,01	0,28387	12,34953
59	-25,93	0,11133	5,56523	107	0,11	0,13674	12,48626
60	-25,67	0,02012	5,58534	108	0,12	0,17692	12,66319
61	-24,96	0,30670	5,89205	109	1,3	0,13502	12,79820
62	-24,8	0,13465	6,02670	110	1,31	0,24125	13,03946
63	-24,72	0,04019	6,06688	111	1,74	0,28250	13,32196
64	-24,5	0,19512	6,26200	112	2,76	0,24964	13,57160
65	-24,23	0,26156	6,52356	113	2,81	0,09521	13,66681
66	-23,63	0,14044	6,66400	114	3,12	0,11834	13,78515
67	-22,59	0,08379	6,74779	115	3,26	0,14576	13,93091
68	-20,83	0,29389	7,04168	116	3,27	0,15155	14,08246
69	-20,8	0,23053	7,27220	117	3,51	0,16585	14,24831
70	-20,63	0,07579	7,34800	118	3,53	0,00578	14,25409
71	-20,21	0,25370	7,60170	119	3,9	0,18866	14,44275
72	-20,13	0,21010	7,81180	120	4,54	0,32474	14,76749
73	-20,05	0,07444	7,88623	121	5,26	0,22952	14,99701
74	-19,04	0,16991	8,05614	122	5,53	0,23873	15,23573
75	-16,39	0,09009	8,14623	123	5,86	0,11869	15,35442
76	-15,63	0,13436	8,28059	124	5,98	0,11290	15,46732
77	-15,19	0,09587	8,37647	125	6,12	0,24232	15,70964
78	-13,87	0,11424	8,49071	126	6,34	0,28212	15,99176
79	-13,86	0,17624	8,66695	127	6,69	0,02281	16,01457
80	-13,76	0,16722	8,83417	128	7,14	0,20944	16,22400
81	-13,59	0,09877	8,93294	129	7,64	0,19378	16,41779
82	-13,52	0,05298	8,98592	130	7,76	0,18800	16,60578
83	-12,28	0,08037	9,06629	131	8,04	0,20945	16,81524
84	-12,25	0,27139	9,33768	132	8,67	0,28455	17,09979
85	-11,49	0,17262	9,51030	133	9,61	0,22952	17,32931
86	-11,22	0,08615	9,59645	134	9,94	0,20671	17,53602

135	9,97	0,18373	17,71975
136	9,98	0,27959	17,99934
137	10,12	0,07288	18,07222
138	10,44	0,09655	18,16877
139	10,44	0,07510	18,24387
140	10,88	0,09077	18,33464
141	11,04	0,05260	18,38723
142	11,49	0,24193	18,62917
143	11,62	0,18934	18,81850
144	11,69	0,05007	18,86857
145	11,85	0,25030	19,11887
146	11,86	0,15116	19,27004
147	12,19	0,14538	19,41542
148	12,3	0,09857	19,51398
149	12,46	0,22597	19,73995
150	12,85	0,09278	19,83273
151	13,47	0,15087	19,98360
152	14,75	0,06129	20,04490
153	15,81	0,23941	20,28430
154	16,9	0,18934	20,47364
155	17,07	0,18335	20,65699
156	17,73	0,07442	20,73140
157	18,3	0,16652	20,89793
158	18,82	0,14864	21,04657
159	18,84	0,21011	21,25668
160	19,44	0,14285	21,39953
161	19,49	0,13075	21,53029
162	20,93	0,04359	21,57388
163	22,36	0,06539	21,63927
164	22,45	0,09857	21,73784
165	22,73	0,10763	21,84547
166	22,86	0,18082	22,02629
167	23,29	0,04223	22,06852
168	23,62	0,09278	22,16131
169	24,21	0,11528	22,27659
170	24,9	0,11935	22,39593
171	25,99	0,11356	22,50950
172	27,14	0,13075	22,64025

173	27,19	0,07576	22,71600
174	28,43	0,15153	22,86753
175	29,15	0,06997	22,93751
176	31,46	0,10794	23,04545
177	31,66	0,05007	23,09552
178	33,78	0,03248	23,12799
179	35,72	0,03797	23,16596
180	36	0,04086	23,20682
181	36,56	0,02078	23,22760
182	41,51	0,03218	23,25979
183	42,45	0,06501	23,32480
184	49,75	0,11464	23,43944
185	50,39	0,07510	23,51453
186	51,1	0,03253	23,54706
187	60,24	0,06248	23,60955
188	65,18	0,07241	23,68195
189	70,17	0,02995	23,71190
190	83,53	0,07202	23,78393
191	84,69	0,02078	23,80470
192	89,95	0,05335	23,85805
193	101,03	0,06950	23,92754
194	118,65	0,03319	23,96074
195	124,4	0,03954	24,00028
196	175,5	0,01241	24,01269
197	178,97	0,04020	24,05290
198	246,24	0,03085	24,08374
199	250,26	0,01651	24,10025
200	256,05	0,01241	24,11267
201	279,82	0,01943	24,13209
202	331,3	0,01943	24,15152
203	343,32	0,01111	24,16263
204	464,52	0,00701	24,16964
205	476,51	0,01073	24,18037
206	506,3	0,01803	24,19840
207	745,73	0,00820	24,20660
208	3448,47	0,00066	24,20726
209	3634,72	0,00068	24,20794
210	*	0	24,20794

Lampiran 15. Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Vektor u^0 , Vektor d , Nilai t dan Vektor b^* pada Iterasi Ketujuh.

Tabel 15 a. Hasil Perhitungan Vektor u^0 pada Iterasi Ketujuh

$y_i - (b^0)'x_i$	$\text{rank}[y_i - (b^0)'x_i]$	$\text{rank}[y_i - (b^0)'x_i] - 11$
-36,154254	19	8
-41,266114	7	-4
-35,2506	20	9
-33,357	21	10
-41,533436	6	-5
-42,445218	2	-9
-41,68584	5	-6
-40,68584	10	-1
-42,270634	4	-7
-39,494744	13	2
-38,488004	17	6
-39,481728	14	3
-42,271024	3	-8
-40,952346	8	-3
-38,138836	18	7
-39,474416	15	4
-40,952238	9	-2
-40,169218	11	0
-39,96914	12	1
-38,507296	16	5
-48,6116	1	-10

Setelah vektor u^0 yang diperoleh, dihitung vektor $d = (X_c' X_c)^{-1} X_c' u^0$ dengan X_c merupakan matriks berorde $n \times k$ dengan entri $x_{ij} - \bar{x}_j$, diperoleh vektor $d = (0,01214, 0,04631, -0,02115)$.

Pada Tabel 15 b dapat diperoleh nilai t yang meminimumkan (4.10) dengan menghitung,

$$-\frac{1}{2}T + T_{km} < 0 \text{ dan } -\frac{1}{2}T + T_{km} + |w_k - w_m| > 0.$$

Diperoleh nilai *slope* garis pada urutan ke-108 karena

$$-\frac{1}{2}T + T_{km} < 0$$

$$-17,235 + 16,93929 = -0,29571 < 0$$

dan

$$-\frac{1}{2}T + T_{km} + |w_k - w_m| > 0$$

$$-17,235 + 16,93929 + 0,54124 = 0,24553 > 0.$$

Diperoleh nilai t yang meminimumkan (4.10) yaitu nilai *slope* garis pada urutan ke-108 yang merupakan pasangan titik data ke 13 dan 9 yaitu 0, kemudian ditentukan vektor b^* untuk iterasi ketujuh yaitu

$$b^* = b^0 + td$$

$$= \begin{pmatrix} 0,793646 + (0)(-0,01214), & 0,91722 + (0)(0,04631), \\ -0,11186 + (0)(-0,02115) \end{pmatrix}$$

$$= (0,793646, \quad 0,911782, \quad -0,11186).$$

Tabel 15 b. Hasil Perhitungan untuk Memperoleh Nilai t pada Iterasi Ketujuh

No	<i>Slope</i> $\frac{z_i - z_j}{w_i - w_j}$	$ w_i - w_j $	Kumulatif $ w_i - w_j $				
1	-5098,39	0,000567	0,00057	18	-81,22	0,050877	0,54157
2	-3936,25	0,002265	0,00283	19	-81,07	0,074197	0,61577
3	-476,89	0,003324	0,00616	20	-76,27	0,082379	0,69815
4	-422,3	0,008912	0,01507	21	-74,59	0,047553	0,74570
5	-303	0,010957	0,02603	22	-65,99	0,064007	0,80971
6	-241,73	0,021147	0,04717	23	-60,94	0,108511	0,91822
7	-183,41	0,029329	0,07650	24	-55,91	0,12869	1,04691
8	-176,05	0,003324	0,07983	25	-53,56	0,047553	1,09446
9	-175,84	0,01019	0,09002	26	-49,24	0,124216	1,21868
10	-136,47	0,051443	0,14146	27	-45,93	0,064682	1,28336
11	-133,73	0,04812	0,18958	28	-45,28	0,093738	1,37710
12	-112,95	0,04812	0,23770	29	-42,47	0,07363	1,45073
13	-112,08	0,018371	0,25607	30	-41,49	0,081812	1,53254
14	-84,41	0,034952	0,29102	31	-39,6	0,177266	1,70981
15	-83,17	0,07564	0,36666	32	-33,61	0,128123	1,83793
16	-82,1	0,040687	0,40735	33	-33,23	0,083529	1,92146
17	-81,73	0,083346	0,49069	34	-32,83	0,231375	2,15283
				35	-32,67	0,008182	2,16101
				36	-25,56	0,148029	2,30904
				37	-24,74	0,034259	2,34330
				38	-24,69	0,113259	2,45656

39	-23,38	0,1767	2,63326
40	-22,25	0,026077	2,65934
41	-22,1	0,144705	2,80404
42	-21,84	0,08057	2,88461
43	-21,64	0,054493	2,93911
44	-21,05	0,063441	3,00255
45	-20,41	0,115304	3,11785
46	-19,69	0,046311	3,16416
47	-19,56	0,205298	3,36946
48	-19,34	0,168354	3,53781
49	-19,04	0,258348	3,79616
50	-18,47	0,089994	3,88616
51	-17,57	0,225275	4,11143
52	-17,03	0,05305	4,16448
53	-17,02	0,178964	4,34345
54	-16,64	0,283513	4,62696
55	-16,55	0,230463	4,85742
56	-16,27	0,170783	5,02820
57	-15,19	0,144705	5,17291
58	-15,05	0,185337	5,35825
59	-14,55	0,093171	5,45142
60	-14,03	0,406377	5,85779
61	-13,81	0,273852	6,13165
62	-13,58	0,353327	6,48497
63	-12,69	0,115158	6,60013
64	-12,27	0,129147	6,72928
65	-12,11	0,182014	6,91129
66	-11,29	0,262584	7,17388
67	-10,27	0,238023	7,41190
68	-9,75	0,103069	7,51497
69	-9,49	0,216273	7,73124
70	-9,43	0,08057	7,81181
71	-8,96	0,31116	8,12297
72	-8,58	0,208091	8,33106
73	-8	0,122864	8,45393
74	-7,88	0,257781	8,71171
75	-7,77	0,094888	8,80660
76	-7,08	0,186306	8,99290
77	-6,93	0,40581	9,39871
78	-6,62	0,182014	9,58073
79	-6,47	0,282946	9,86367
80	-6,14	0,160593	10,02426
81	-5,66	0,263552	10,28782
82	-5,29	0,190323	10,47814
83	-5,29	0,148029	10,62617
84	-4,9	0,502962	11,12913

85	-4,74	0,354934	11,48406
86	-4,66	0,312639	11,79670
87	-4,53	0,129147	11,92585
88	-4,32	0,342369	12,26822
89	-4,22	0,312128	12,58035
90	-4,1	0,16461	12,74496
91	-4,01	0,182982	12,92794
92	-3,9	0,380098	13,30804
93	-3,58	0,194341	13,50238
94	-2,72	0,540271	14,04265
95	-2,67	0,217241	14,25989
96	-2,5	0,189775	14,44967
97	-2,26	0,077246	14,52691
98	-2,25	0,219505	14,74642
99	-2,2	0,167788	14,91420
100	-1,75	0,392242	15,30645
101	-1,5	0,209059	15,51551
102	-1,17	0,417407	15,93291
103	-0,74	0,358257	16,29117
104	-0,68	0,02973	16,32090
105	-0,07	0,26494	16,58584
106	-0,06	0,227631	16,81347
107	0	0,125823	16,93929
108	0	0,541239	17,48053
109	0,04	0,197901	17,67843
110	0,94	0,33218	18,01061
111	1,46	0,182982	18,19360
112	1,79	0,323998	18,51759
113	1,99	0,39321	18,91080
114	2,05	0,358257	19,26906
115	2,35	0,418375	19,68744
116	2,46	0,210228	19,89766
117	3,04	0,235393	20,13306
118	3,22	0,302248	20,43530
119	3,59	0,048576	20,48388
120	3,59	0,097152	20,58103
121	3,72	0,354934	20,93597
122	4,45	0,034259	20,97023
123	5,38	0,277687	21,24791
124	5,75	0,229111	21,47702
125	5,96	0,184151	21,66117
126	6,2	0,209315	21,87049
127	6,38	0,2286	22,09909
128	7,21	0,210228	22,30932
129	7,29	0,235393	22,54471
130	7,43	0,19887	22,74358

131	7,75	0,175969	22,91955
132	7,78	0,201134	23,12068
133	7,95	0,025165	23,14585
134	8,06	0,303217	23,44907
135	9,27	0,104347	23,55341
136	9,92	0,232069	23,78548
137	9,99	0,134461	23,91994
138	10,16	0,206905	24,12685
139	10,82	0,175002	24,30185
140	12,8	0,598361	24,90021
141	13,23	0,074617	24,97483
142	15,6	0,149636	25,12446
143	15,99	0,154823	25,27929
144	16,1	0,026077	25,30536
145	17,17	0,369251	25,67461
146	17,55	0,129658	25,80427
147	17,8	0,186944	25,99122
148	18,12	0,120235	26,11145
149	18,18	0,475497	26,58695
150	18,75	0,450333	27,03728
151	18,89	0,271587	27,30887
152	19,23	0,320674	27,62954
153	19,83	0,308895	27,93844
154	20,77	0,135429	28,07387
155	21,66	0,106246	28,18011
156	22,94	0,121951	28,30206
157	23,84	0,030935	28,33300
158	24,51	0,309864	28,64286
159	25,53	0,187912	28,83077
160	25,8	0,274363	29,10514
161	25,92	0,081082	29,18622
162	26,05	0,243428	29,42965
163	26,11	0,045618	29,47527
164	26,44	0,120235	29,59550
165	26,64	0,037308	29,63281
166	27,41	0,174435	29,80724
167	27,6	0,266182	30,07343
168	28,04	0,360339	30,43376
169	28,84	0,240104	30,67387
170	29,3	0,094157	30,76803

171	31,6	0,133894	30,90192
172	31,91	0,285722	31,18764
173	32,19	0,116911	31,30455
174	33,01	0,240104	31,54466
175	33,52	0,096585	31,64124
176	35,2	0,085976	31,72722
177	35,69	0,255992	31,98321
178	37,81	0,052483	32,03569
179	41,57	0,366986	32,40268
180	42,28	0,134862	32,53754
181	44,17	0,022754	32,56029
182	48,03	0,045618	32,60591
183	50,84	0,245035	32,85095
184	54,39	0,192551	33,04350
185	55,11	0,110994	33,15449
186	57,76	0,126882	33,28137
187	64,38	0,038277	33,31965
188	65,64	0,126882	33,44653
189	65,64	0,042294	33,48883
190	69,59	0,191985	33,68081
191	72,14	0,123558	33,80437
192	75,53	0,081264	33,88563
193	76,25	0,015888	33,90152
194	78,46	0,100804	34,00233
195	88,28	0,092623	34,09495
196	90,65	0,01954	34,11449
197	99,28	0,039664	34,15415
198	106,12	0,095399	34,24955
199	134,08	0,057122	34,30667
200	139,19	0,015888	34,32256
201	157,17	0,058091	34,38065
202	179,48	0,011359	34,39201
203	196,24	0,046312	34,43832
204	222,59	0,012564	34,45089
205	774,83	0,006647	34,45754
206	919,09	0,00493	34,46247
207	1121,91	0,00493	34,46740
208	1519,23	0,000968	34,46836
209	3807,51	0,001607	34,46997
210	*	0	34,46997