

BAB 1. PENGANTAR LOGIKA

Kompetensi Dasar: Setelah mempelajari bab ini, Anda mampu memahami konsep logika dan mampu menerapkannya dalam menyelesaikan berbagai masalah terkait dalam matematika



Gambar 1.1 Pikiran Plato

Pada bagian ini akan dipelajari logika matematika dan penerapannya khususnya dalam pengambilan kesimpulan secara matematika. Pembahasan dimulai dengan memberikan gambaran peranan logika dalam ilmu pengetahuan, pernyataan (*proposisi*), nilai kebenaran sebuah *proposisi*, *proposisi* tunggal dan *komposit*, tanda penghubung, *kuantor*. Materi dalam bab ini juga banyak Anda jumpai pada berbagai buku referensi lainnya, misalnya: Grimaldi (1987), Johnsonbough (1986). Kenneth H. Rosen (2003), Lerma Miguel A (2005), Lipschutz Seymour and Lipson Marc (2007), dan Liu C.L. (1985) serta Robinson, Skvarcus (1986).

Ilmu pengetahuan merupakan suatu pengetahuan, sesuatu yang dianggap penting untuk diketahui, yang diperoleh dengan cara tertentu (metoda) dan alat penalaran tertentu. Metode perolehan ilmu pengetahuan dikenal dengan metode ilmiah, sedangkan alat penalaran dalam ilmu pengetahuan adalah bahasa, logika, matematika dan statistika. Sebagai alat ilmu pengetahuan logika memberikan arahan agar penalaran yang dilakukan dapat dikatakan benar (*valid*), meskipun masih dalam tahap kualitatif. Akan tetapi tiap cabang ilmu pengetahuan mempunyai logika sendiri sendiri yang sering tidak dapat digabungkan. Dalam cabang

Bab 1. Pengantar Logika

matematika *diskrit* digunakan logika matematika yang bersifat *dikotomi*, atau logika *boolean*.

Logika memuat seperangkat atau himpunan dari berbagai hukum atau aturan untuk pengambilan keputusan. Logika formal atau logika *symbolic* adalah metoda yang dapat diterapkan pada himpunan dari berbagai konsep, misalnya pada geometri bidang datar *Euclides* yang menyajikan himpunan konsep dan *aksioma* dari mana diturunkan berbagai *teorema* dengan serangkainan hukum logika. Pada bidang aljabar diberikan beberapa *aksioma* (*postulat*), definisi dan sifat-sifat dari berbagai konsep abstrak dan himpunan bilangan, kemudian dapat diturunkan berbagai *teorema* tentang himpunan bilangan tersebut.

Pada sistem *aksiomatis*, diasumsikan bahwa pernyataan kunci tertentu yang biasanya tentang suatu kelas dari suatu objek dan dianggap benar dikenal sebagai *aksioma*. Misalnya pernyataan bahwa garis terdiri atas himpunan titik adalah sebuah *aksioma* dalam geometri. Jika dapat diturunkan suatu pernyataan yang benar dari *aksioma*, maka diperoleh suatu *teorema*. Dengan *aksioma* dan *teorema* sebelumnya dapat diturunkan juga berbagai *teorema* lainnya, demikian seterusnya. Sedangkan sebarisan langkah *logis* untuk menurunkan *teorema* tersebut dari suatu *aksioma* atau *teorema* sebelumnya disebut dengan pembuktian *teorema*.

Matematika pada umumnya bekerja dengan menggunakan pernyataan yang bernilai *logik* benar atau salah (*two-valued logic*), dan dengan menggunakan tabel kebenaran dapat ditentukan apakah suatu pernyataan (*proposisi*) bernilai benar ataukah salah.

A. Proposisi dan Operasi

Definisi 1.1 Suatu *proposisi* adalah pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran, yaitu benar (*true* – T) atau salah (*false* - F) tetapi tidak keduanya. Dua *proposisi* p dan q dikatakan ekuivalen (ekuivalensi *logis*), ditulis dengan $p = q$, jika keduanya mempunyai nilai kebenaran yang sama

Contoh Pernyataan “ $7 < 40$ ” adalah proposisi bernilai benar (*true*-T), sedangkan “4 adalah bilangan prima” adalah pernyataan bernilai salah (*false*-F). Sedangkan pernyataan “kalimat ini salah” adalah pernyataan faktual yang kebenarannya diperoleh berdasarkan hasil observasi. Kalimat “siapaakah nanamu?” adalah kalimat tanya dan bukan proposisi. Kalimat “Kerjakan tugasmu” adalah kalimat perintah dan bukan proposisi.

Bab 1. Pengantar Logika

Terdapat dua jenis *proposisi*, tunggal dan *komposit*. *Proposisi* tunggal merupakan pernyataan tunggal tanpa adanya suatu tanda hubung kalimat, misalnya *not*, *and*, *or*, *if then*. Contoh *proposisi* tunggal adalah kalimat “ $2 < 7$ ”. *Proposisi* tunggal sering disimbolkan dengan menggunakan huruf kecil, *a*, *b*, *c*, Sedangkan *proposisi komposit* (majemuk) adalah *proposisi* yang diperoleh dari penggabungan beberapa *proposisi* tunggal dengan tanda hubung kalimat.

Proposisi komposit juga dapat dikembangkan dari berbagai *proposisi* sebelumnya melalui berbagai penggunaan operasi logika. Beberapa operator ini dikenal sebagai tanda penghubung (*connective*), karena operator ini digunakan untuk menghubungkan dua *proposisi* atau lebih. Operator logika semacam ini antara lain: *dan* (and- $\&$), *atau* (or- \vee), dan *jika-maka* (if-then).

Definisi 1.2 Operasi negasi (*not*) dari suatu *proposisi* tunggal *p*, disajikan dengan $\sim p$, adalah suatu *proposisi* bernilai salah jika *p* bernilai benar dan sebaliknya. Tabel nilai kebenaran dari operasi negasi adalah

<i>p</i>	$\sim p$
T	F
F	T

Contoh. *Proposisi* *p* adalah “ $5 < 7$ ”, mempunyai negasi $\sim p$ yang berarti bahwa bukan *p* yaitu “5 tidak lebih kecil dari 7” atau “ $5 \geq 7$ ”

Teorema 1.1 $\sim(\sim p) = p$

Bukti. Dengan menggunakan tabel kebenaran, dapat Anda tunjukkan kebenaran dari teorema di atas.

Definisi 1.3 Operasi *konjungsi* dari *proposisi* *p* dan *q*, disajikan dengan “*p* dan *q*” dan disajikan dengan “ $p \wedge q$ ” atau “*p* & *q*”, menghasilkan suatu *proposisi* dengan tabel kebenaran

<i>p</i>	<i>q</i>	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Bab 1. Pengantar Logika

Dari definisi 1.3 di atas, nampak bahwa suatu *konjungsi* bernilai T jika kedua komponennya bernilai T, jika tidak demikian maka *konjungsi* bernilai F

Contoh. Jika *proposisi* p adalah “ Hari ini Jumat”, sedangkan q adalah *proposisi* “Kemarin hujan”, maka *proposisi* “ $p \wedge q$ ” menyatakan *proposisi* “Hari ini jumat dan kemarin hujan”

Definisi 1.4 Operasi *disjungsi* dari *proposisi* p dan q , disajikan dengan “ p atau q ”, atau “ $p \vee q$ ” menghasilkan suatu *proposisi* dengan tabel kebenaran

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Contoh. Jika *proposisi* p adalah “ Hari ini Jumat”, sedangkan q adalah *proposisi* “Kemarin hujan”, maka *proposisi* “ $p \vee \sim q$ ” menyatakan *proposisi* “Hari ini jumat atau kemarin tidak hujan”

Perhatikan bahwa jika terdapat suatu *proposisi* “Hari ini saya makan siang di McDonald atau KFC”, maka terdapat kemungkinan kenyataan bahwa “saya makan siang di McDonald” tersebut bernilai benar dan “saya makan siang di KFC” juga bernilai benar tetapi tidak keduanya. Pada *proposisi* “ $p \vee q$ ” bisa terjadi bahwa kedua *proposisi* tunggal p dan q itu bernilai benar, sedangkan jika dimaksudkan hanya salah satu bernilai benar, p atau q tetapi tidak keduanya” maka *proposisi* itu dikenal sebagai *proposisi* “*exclusive or*” dan sering dibahas dalam bab *Aljabar Boole* (Lovasz and Vesztergombi, 1999) (Santos, 2007).

B. Teorema dan Hukum Operasi Proposisi

Beberapa teorema dan hukum dalam mengoperasikan *proposisi* disajikan sebagai berikut (Chen, 2008) (Rosen, 2003),.

Teorema 1.2 (DeMorgan)

$$\sim(p \wedge q) = (\sim p) \vee (\sim q),$$

$$\sim(p \vee q) = (\sim p) \wedge (\sim q)$$

Bab 1. Pengantar Logika

Bukti. Kebenaran *teorema DeMorgan* di atas dapat Anda tunjukkan dengan menggunakan tabel kebenaran.

Beberapa *teorema* berikut juga dapat Anda tunjukkan kebenarannya, baik menggunakan tabel kebenaran maupun dari definisi dan *teorema* di muka

Teorema 1.3

- (a) $p \wedge q = q \wedge p$, $p \vee q = q \vee p$ hk komutatif
 (b) $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$ hk assosiatif
 $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$
 (c) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ hk distributif
 $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
 (d) $p \vee (p \wedge q) = p$ hk absorpsi
 $p \wedge (p \vee q) = p$

Definisi 1.5 Implikasi dari pernyataan p dan q , disajikan dengan $p \rightarrow q$, yang berarti “jika p maka q (*if p then q*)” menghasilkan suatu *proposisi* dengan tabel nilai kebenaran

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Selanjutnya *proposisi* p disebut *anteseden* (*premis*, kondisi, atau *hipotesis*), sedangkan *proposisi* q disebut *konsekuen* (konklusi).

Untuk memahami tabel kebenaran di atas, perhatikan kalimat saya berjanji: “jika Anda mendapat nilai A, maka saya membelikan sepeda”. Andaikan terjadi bahwa “Anda mendapat nilai A” dan “saya membelikan sepeda” maka saya tidak mengingkari janji saya. Kejadian ini berkaitan dengan baris pertama dalam tabel kebenaran di atas. Sedangkan kejadian bahwa “Anda mendapat nilai A” tetapi “saya tidak membelikan sepeda” maka saya dikatakan mengingkari janji saya. Kejadian ini berkaitan dengan baris kedua pada tabel kebenaran di atas. Sedangkan kejadian pada baris ke tiga dan ke empat pada tabel kebenaran berkaitan dengan kejadian bahwa “Anda tidak mendapat nilai A” sehingga apakah