KONSTRUKSI *LIFE TABLE* UNTUK INDIVIDU
DALAM INTERVAL WAKTU SATU TAHUN

oleh

ANIS FUUADAH
NIM. M0198020

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan
mendapatkan gelar Sarjana Sains Matematika.

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SEBELAS MARET SURAKARTA
2005

SKRIPSI

KONSTRUKSI *LIFE TABLE* UNTUK INDIVIDU

DALAM INTERVAL WAKTU SATU TAHUN

yang disiapkan dan disusun oleh

ANIS FUUADAH

M0198020

dibimbing oleh

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Drs. Kartiko, M.Si	Dr. Sutanto, M.Sc
NIP: 131 569 203	NIP: 132 149 079

Telah dipertahankan di depan Dewan Penguji

pada hari Sabtu, tanggal 16 April 2005

dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Anggota Tim Penguji :	Tanda Tangan
1. Drs. Sri Subanti M.Si NIP. 131 568 293	1. ………………...…
2. Dra. Etik Zukhronah M.Si NIP. 132 000 009	2. …………………..…
3. Drs Santosa B.W., M.Si NIP. 131 945 327	3. …………….…….

Surakarta, 2005

Disahkan oleh

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dekan,	Ketua Jurusan Matematika,
Drs. Marsusi, M.S	Drs. Kartiko M.Si
NIP. 130 906 776	NIP. 131 569 203

ABSTRAK

ANIS FUUADAH 2005, KONSTRUKSI *LIFE TABLE* UNTUK INDIVIDU DALAM INTERVAL WAKTU SATU TAHUN, FMIPA UNS

Data yang menunjukkan usia hidup suatu individu disebut sebagai data waktu hidup. Dengan data waktu hidup dapat dibentuk fungsi tahan hidup yang selanjutnya dapat digunakan untuk mengestimasi probabilitas kematian individu berusia x sampai x+1. Selanjutnya hasil estimasi yang diperoleh disajikan dalam bentuk tabel yang disebut sebagai *life table.*

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk menentukan probabilitas kegagalan (kematian) suatu individu berusia x sampai usia $x+1$, dengan x merupakan usia hidup suatu individu dan disajikan dalam *life table*. Selanjutnya mengkonstruksi *life table* dengan unsur-unsur pembentuk *life table* yang lebih lengkap.

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi literatur disertai dengan contoh aplikasi kasus. Langkah yang dipergunakan adalah dengan mengelompokkan keadaan ke dalam kelompok-kelompok kasus yang mungkin terjadi. Selanjutnya menentukan parameter untuk masing-masing kasus.

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh kesimpulan bahwa persamaan likelihood yang menunjukkan probabilitas suatu individu berusia x mengalami kegagalan (kematian) sampai usia $x+1$ tahun dalam interval $\left(x, x+1\right]$ dalam adalah

$$\left(rsn_x\right)q_x^3+\left[\left(k_x-e_x-d_x\right)rs+\left(e_x-n_x\right)r-\left(n_x+k_x\right)s\right]q^2$$

$$+\left[\left(d_x-k_x\right)r+\left(d_x+e_x\right)s+n_x+k_x-e_x\right]q_x-d_x=0$$

Selanjutnya dapat dibentuk *life table* dengan unsur-unsur pembentuknya adalah x , d_x, q_x, p_x, l_x , L_x, T_x dan e_x.

ABSTRACT

ANIS FUUADAH 2005, CONSTRUCT OF LIFE TABLE FOR INDIVIDUAL IN THE INTERVAL OF TIME A YEAR, FMIPA UNS

Llife expectancy data of an individual is called life time data. With life time data, it is possible to form survivor function that can be used to estimate death probability of an individual aged x to $x+1$. Then the result is presented in a form of table called life table.

This task is aimed to determine failure (death) probability of an individual aged x to $x+1$, x as the individual life time presented in life table. The next step is to construct the life table with more complete life table forming elements.

The methode used in this task is literare study that given an example for case application. The steps used are to group circumstances in possible case groups and to determine parameter for each case.

Based on the results of the analysis, the conclusion is that the equality that shows probability of an individual aged x to experience failure (death) to aged $x+1$ is

$$(rsn_x)q_x^3+\left[(k_x-e_x-d_x)rs+(e_x-n_x)r-(n_x+k_x)s\right]q^2$$

$$+\left[(d_x-k_x)r+(d_x+e_x)s+n_x+k_x-e_x\right]q_x-d_x=0$$

Then it can be constructed life table with forming elements are x , d_x, q_x, p_x, l_x , L_x, T_x and e_x.

MOTTO

" Luangkan waktu untuk bersantai, manakala tiba waktunya untuk bertindak, jangan ragu dan bergegaslah untuk menyelesaikannya"

(Bonaparte, N)

"Yakin usaha sampai"

(Mars HMI)

"Impian hanya akan jadi angan-angan kecuali jika mulai kerjakan sekarang juga."

(Penulis)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan sepenuhnya guna kemajuan ilmu pengetahuan khususnya bidang Matematika.

KATA PENGANTAR

Bismillaahirrahmanirrahiim, puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menuangkan pemikiran-pemikiran penulis dan tersaji dalam skripsi ini yang berjudul "Konstruksi *Life Table* untuk Individu dalam Interval Waktu Satu Tahun".

Penyusunan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu persyaratan guna memperoleh gelar sarjana pada jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sebelas Maret.

Penulis menyampaikan ucapan terimakasih sebesar-besarnya kepada berbagai pihak yang telah memberikan bantuan berupa dorongan, bimbingan, petunjuk, kritik dan saran kepada penulis. Karena dengan bantuan yang diberikan maka penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.

Ucapan terimakasih terutama penulis tujukan kepada :

1. Bapak Drs. Kartiko, M.Si. dan Bapak Dr. Sutanto, S.Si, DEA selaku dosen pembimbing I dan dosen pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan saran dalam proses penulisan skripsi ini.
2. Keluargaku, Bapak, Ibu, adik Iwan dan Gunawan atas dorongan dan do'a kepada penulis.
3. Kawan-kawan seperjuangan di HMI Cabang Surakarta Henny, Kris, Rahmat, dan HMI Komisariat MIPA Suharto, Nuri, Triyono, Joko Sutopo, Bang Subuh, Bang Drajat, Ryan yang senantiasa turut mewarnai liku-liku pembuatan skripsi ini.
4. Kawan-kawan Galat dan kawan-kawan se-angkatan 98 Wan Khudri, Retno, QQ, Yunita atas segala bantuannya selama proses pembuatan skripsi ini.

Penulis mengharapkan semoga skripsi ini dapat memberi manfaat bagi para pembaca khususnya mahasiswa Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam.

Surakarta, April 2005

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR NOTASI DAN SIMBOL

S	ruang sampel
$f(.)$	fungsi densitas probabilitas
$g(.)$	fungsi densitas probabilitas untuk statistik terurut
$F(.)$	fungsi distribusi
$S(,)$	fungsi tahan hidup
$L(.)$	fungsi likelihood
$l(.)$	fungsi laju hazard
d	variabel indikator untuk data tersensor tipe I
x	usia
d_x	jumlah kematian individu berusia x
m_x	probabilitas suatu individu mati pada usia x dalam interval $(x, x+1]$
q_x	probabilitas kematian individu berusia x dalam $(x, x+1]$
p_x	probabilitas tahan hidup individu berusia x dalam $(x, x+1]$
l_x	harga harapan individu bertahan hidup dalam $(x, x+1]$
L_x	harga harapan individu bertahan hidup melewati $(x, x+1]$
e_x	*enders*
w_x	*withdrawals*
n_x	jumlah individu tepat berusia x memasuki pengamatan
k_x	*new entrants*
r_i	sisa bulan saat individu memasuki pengamatan dikurangi usia *exact* per 12 bulan
t_i	sisa bulan saat individu meninggalkan pengamatan dikurangi usia *exact* per 12 bulan

BAB I
PENDAHULUAN

Dalam penelitian di bidang biologi, kedokteran dan demografi banyak dihasilkan data waktu hidup *(life time data)* yaitu data yang menerangkan usia hidup suatu individu. Dari data waktu hidup yang diperoleh dapat diprediksi lama hidup suatu makhluk hidup yang mengalami kegagalan dan kematian. Perusahaan yang bergerak di bidang asuransi sangat memerlukan prediksi diatas sebagai pertimbangan dalam menentukan premi asuransi perusahaan atau menentukan lamanya garansi waktu untuk sebuah barang.

Data waktu hidup yang diperoleh dari hasil penelitian merupakan variable tak negatif dan membentuk suatu fungsi. Fungsi distribusi yang terbentuk dari data yang ada tanpa asumsi distribusi merupakan nonparametrik. Dalam ilmu statistika analisis yang digunakan untuk menganalisis data waktu hidup dinamakan analisis tahan hidup *(survival)* (Lawless,1982:1).

Analisis tahan hidup yang menganalisis data waktu hidup dalam interval waktu tertentu menghasilkan rumusan-rumusan yang biasanya disajikan dalam bentuk tabel dan disebut *life table*. *Life table* memperlihatkan probabilitas kegagalan (kematian) suatu individu dalam interval waktu tertentu., probabilitas tahan hidup suatu individu dalam interval waktu tertentu dan fungsi-fungsi lainnya yang dikembangkan dari data waktu hidup sesuai kebutuhan *stakeholder* (pengguna) *lifetable* (Elandt Johnson ,1979:93).

Untuk memperoleh data waktu hidup yang digunakan untuk mengkonstruksi *life table*, perlu dilakukan pengamatan pada sekelompok individu dalam selang interval waktu tertentu *(cohort)*. Dalam kenyataannya, pengamatan sampel untuk data waktu hidup seringkali dibutuhkan waktu yang sangat lama sehingga tidak efisien dalam hal waktu dan biaya. Untuk mengatasi ketidakefisienan tersebut, dilakukan metode penyensoran (*censoring*), yaitu penelitian yang dilakukan dengan batasan waktu atau batasan jumlah data yang diperlukan. Data yang diperoleh dari penelitian yang dilakukan dengan batasan waktu tertentu dinamakan data tersensor tipe I, sedangkan data yang diperoleh dari penelitian dengan batasan jumlah data yang diperlukan disebut sebagai data tersensor tipe II. Data waktu hidup yang diperoleh dari penelitian yang tidak tersensor termasuk dalam data waktu hidup lengkap (*complete data*), yaitu data hidup yang terdiri dari waktu kematian atau kegagalan dari semua unit individu dalam sampel (Bain Engelhardt, 1992).

Dalam sebuah populasi, dimungkinkan terjadi beberapa kasus yang berkaitan dengan penambahan atau pengurangan jumlah anggota populasi selama interval waktu $(x, x+1]$, dengan x merupakan usia individu. Pengurangan jumlah anggota populasi dapat disebabkan karena ada individu yang meninggal selama pengamatan atau ada individu yang meninggalkan pengamatan selain sebab kematian *(withdrawals)*. Berkaitan dengan pengurangan dan penambahan jumlah anggota populasi tersebut, maka dalam skripsi ini populasi akan dibagi kedalam empat kasus yaitu: jika dalam interval $(x, x+1]$ tidak ada individu yang masuk dan keluar pengamatan, jika dalam interval $(x, x+1]$ ada individu yang masuk dan tidak ada yang keluar pengamatan, jika dalam interval $(x, x+1]$ tidak ada individu yang masuk dan ada yang keluar pengamatan, dan jika dalam interval $(x, x+1]$ ada individu yang masuk dan ada individu yang keluar.

Dengan analisis tahan hidup untuk masing-masing kasus, akan diperoleh probabilitas suatu individu berusia x yang mengalami kegagalan (kematian) sampai usia $x+1$ untuk masing-masing kasus. Dari probabilitas kegagalan individu dalam interval $(x, x+1]$ yang diperoleh dapat dicari fungsi-fungsi dasar lainnya untuk mengkonstruksi *life table* yang lebih lengkap. Dalam penulisan ini juga akan digambarkan pola kematian per usia tahun dalam satu tahun dari suatu individu.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam penulisan skripsi ini adalah :

1. Bagaimana menentukan probabilitas suatu individu berusia x mengalami kegagalan (kematian) sampai usia $x+1$?
2. Bagaimana menentukan fungsi-fungsi dasar untuk mengkonstruksi *life table*?
3. Bagaimana menggambarkan pola kematian per usia tahun dalam satu tahun?

1.3 Batasan Masalah

Untuk membatasi ruang lingkup pada penulisan ini diberikan batasan masalah sebagai berikut :

1. Data yang digunakan merupakan data waktu hidup tersensor tipe I dan berasal dari populasi yang mempunyai fungsi distribusi nonparametrik.
2. Data waktu hidup merupakan data berkelompok *(cohort)* dan tidak terdapat anggota populasi yang hilang *(withdrawals).*

1.4 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah :

1. Dapat menentukan probabilitas suatu individu berusia x mengalami kegagalan (kematian) sampai usia $x+1$.
2. Dapat menentukan fungsi-fungsi dasar untuk mengkonstruksi *life table.*
3. Menggambarkan pola kematian per usia tahun dalam satu tahun.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari penulisan skripsi ini adalah menambah wawasan pengetahuan tentang ilmu stasistik dalam hal *life table* kepada penulis pada khususnya dan pembaca pada umumnya.

BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab II, landasan teori akan dibagi menjadi dua sub bab, yaitu tinjauan pustaka dan kerangka pemikiran.

2.1 Tinjauan Pustaka

Untuk mengkonstruksi *life table* dibutuhkan pengertian tentang konsep dasar statistika yaitu ruang sampel dan probabilitas kejadian, variabel random, distribusi variabel random, fungsi data waktu hidup, tipe-tipe data tersensor, metode estimasi parameter, dan *life table*.

2.1.1 Ruang Sampel dan Probabilitas Kejadian

Sebuah eksperimen menunjukkan suatu proses pengambilan sampel dari beberapa fenomena. Sampel-sampel tersebut dibentuk ke dalam suatu rumusan matematika dengan mengacu pada landasan teori yang telah ditentukan. Adapun landasan teori yang dimaksud adalah sebagai berikut.

Definisi 1 (Bain Engelhardt, 1992:2)

Himpunan dari semua hasil eksperimen yang mungkin disebut ruang sampel, S .

Definisi 2 (Bain Engelhardt, 1992:18)

Misalkan A dan B menyatakan kejadian-kejadian dari ruang sampel W *, maka probabilitas bersyarat dari kejadian A bila diberikan kejadian B adalah*

$$P\left(A\middle|B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)} \qquad \text{dengan } P\left(B\right)\neq 0 .$$

2.1.2 Variabel Random

Definisi 3 (Bain Engelhardt, 1992:53)

Variabel random X *adalah suatu fungsi yang terdefinisi dalam ruang sampel* S *, yang memetakan setiap hasil yang mungkin* e *dalam* S *dengan suatu bilangan real* x *, sedemikian hingga* $X\left(e\right)=x$.

Variabel random dibedakan menjadi dua, yaitu variabel random diskrit dan variabel random kontinu.

Definisi 4 (Bain Engelhardt, 1992:56)

Jika himpunan dari variable-variable yang mungkin dari variable random X *merupakan himpunan terhitung (countable set) yang dinotasikan dengan* $x_1, x_2, ..., x_n$, $x_1, x_2, ...,$ *maka* X *dinamakan variable random diskrit. Maka probabilitas setiap harga* x *yang mungkin dinyatakan dalam fungsi kepadatan probabilitas (pdf) diskrit, yaitu:*

$$f(x) = P[X = x] \quad , \quad x = x_1, x_2, ...$$

Definisi 5 (Bain Engelhardt, 1992:58)

Fungsi distribusi kumulatif dari variabel random diskrit X *didefinisikan untuk setiap bilangan real* x *adalah*

$$F(x) = P(X \le x)$$

dengan f(x) merupakan fungsi kepadatan probabilitas yang bernilai non negatif untuk setiap x dan mempunyai probabilitas total sama dengan 1.

Definisi 6 (Bain Engelhardt, 1992:64)

*Variabel random **X** disebut variabel random kontinu jika fungsi distribusi kumulatif dapat dinyatakan dengan*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

dengan f(x) merupakan fungsi kepadatan probabilitas yang bernilai non negatif untuk setiap x dan mempunyai probabilitas total sama dengan 1.

Definisi 7 (Bain Engelhardt, 1992:159)

Himpunan variabel random $X_1, X_2, ..., X_n$ *disebut sampel random berukuran* n *dari suatu populasi dengan fungsi kepadatan* $f(x)$ *apabila fungsi kepadatan probabilitas bersamanya mempunyai bentuk*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1)\, f(x_2) ....f(x_n)$$

2.1.3 Fungsi Data Waktu Hidup

Terdapat beberapa cara untuk menyatakan distribusi data waktu hidup. Diantaranya adalah dengan fungsi densitas probabilitas, fungsi tahan hidup dan fungsi laju hazard. Distribusi data waktu hidup dapat dinyatakan dengan fungsi densitas probabilitas, fungsi tahan hidup atau fungsi laju hazard.

2.1.3.1 Fungsi Densitas Probabilitas

Definisi 8 (Bain Engelhardt, 1992:66)

Misalkan variabel random X *menunjukkan waktu hidup dari individu dalam suatu populasi. Waktu hidup* X *merupakan variabel random kontinu dan nonnegatif dalam interval* $[0,\infty)$. *Maka fungsi kepadatan probabilitas dari waktu hidup merupakan probabilitas suatu individu mati atau gagal dalam interval waktu dari* x *sampai* $x+\Delta x$. *Fungsi densitas pobabilitas dinyatakan dengan*

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to\infty}\frac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x} \qquad (2.1)$$

Teorema 1 (Bain Engelhardt, 1992:65)

Fungsi $f(x)$ *merupakan fungsi kepadatan probabilitas dari variabel random kontinu* X *jika dan hanya jika memenuhi sifat:*

(i) $f(x)\geq 0$ *untuk semua* x

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d(x)=1$.

2.1.3.2 Fungsi Tahan Hidup

Definisi 9 (Lawless,1982:8)

Fungsi tahan hidup adalah probabilitas suatu individu masih dapat bertahan hidup sampai dengan waktu x $(x>0)$.

Jika *T* merupakan variabel random dari waktu hidup suatu individu dalam interval $[0,\infty)$, maka fungsi distribusi kumulatif $F(t)$ untuk distribusi kontinu dengan fungsi kepadatan probabilitas *f(t)* didefinisikan sebagai berikut

$$F(t) = P(T \le t) \text{ atau } F(x) = \int_0^t f(x)dx, \text{ untuk } t > 0$$

oleh karena itu diperoleh fungsi tahan hidup

$$S(t) = 1 - F(t) = \int_t^\infty f(x)\,dx$$

$$= P(t \le T)$$

Jadi hubungan fungsi kepadatan probabilitas dengan fungsi tahan hidup adalah :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \left[\frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} \right] = F'(x) = -S'(x)$$

Fungsi tahan hidup $S(x)$ merupakan fungsi monoton turun yang mempunyai sifat :

i) $S(x) = 1$ untuk $x \to 0$,

ii) $S(x) = 0$ untuk $x \to \infty$.

2.1.3.3 Fungsi Laju Hazard

Definisi 10 (Lawless,1982:8)

Fungsi laju hazard adalah probabilitas suatu individu mati dalam interval waktu dari x *sampai* $x + \Delta x$*, jika diketahui individu tersebut masih dapat bertahan hidup sampai dengan waktu* x*.*

Fungsi laju hazard secara matematika dinyatakan sebagai :

$$l(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{P(x \le X < x + \Delta x | X \ge x)}{\Delta x} \right]$$

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi kepadatan probabilitas pada waktu x, maka dari persamaan di atas diperoleh :

$$l(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{P(x \le X < x + \Delta x | X \ge x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{P(x \le X < x + \Delta x) \cap (X \ge x)}{P(X \ge x) \cdot \Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{P(x \le X < x + \Delta x)}{P(X \ge x) \cdot \Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{\Delta x} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} \right]$$

$$l(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{S(x)} = \frac{F'(x)}{S(x)}$$

$$l(x) = \frac{f(x)}{S(x)} \qquad (2.2)$$

2.1.4 Statistik Terurut

Sampel random berukuran $n, X_1, X_2, ..., X_n$ disebut statistik terurut jika sample random tersebut terurut dari terkecil ke terbesar atau sebaliknya. Statistik terurut dinyatakan dengan $X_{1:n}, X_{2:n}, ..., X_{n:n}$ atau $Y_1, Y_2, ..., Y_n$.

Teorema 2 (Bain Engelhardt,1992:217)

Sampel random $X_1, X_2, ..., X_n$ berukuran n dari fungsi kepadatan probabilitas yang kontinu, $f(x) > 0$; $a < x < b$ maka fungsi kepadatan probabilitas dari statistik terurut ke-k, Y_k adalah

$$g_k(y_k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left[F(y_k) \right]^{k-1} \left[1 - F(y_k) \right]^{n-k} f(y_k) \text{ , dengan } a < y_k < b.$$

2.1.5 Data Tersensor

Di dalam analisis tahan hidup, data waktu meliputi data tersensor dan tidak tersensor. Untuk data tersensor sendiri masih dibedakan menjadi dua bagian, yaitu data tersensor tipe I dan data tersensor tipe II.

2.1.5.1 Data Tersensor Tipe I (Lawless,1982)

Lawless (1982:35) menyebutkan bahwa dalam suatu observasi uji hidup, n individu ditempatkan pada suatu uji dan ditentukan untuk mengakhiri uji setelah waktu L berlalu. Waktu kegagalan akan diketahui dengan tepat hanya untuk individu yang gagal dalam selang waktu L tersebut.

Misalkan terdapat n individu dengan X_i merupakan waktu kegagalan individu ke-i yang dikenai waktu penyensoran L_i. Misalkan berdistribusi identik dan independen dengan fungsi kepadatan probabilitas $f\left(x_i;q\right)$, fungsi tahan hidup $S\left(X_i\right)$. Tahan hidup yang tepat dari individu ke-i akan teramati jika $X_i < L_i$. Data yang terkumpul dapat disajikan dengan n pasang variabel random $\left(X_i, L_i\right)$ dengan

$$x_i = \min\left(X_i, L_i\right) \text{ dan } d_i = \begin{cases} 1 \; jika \; X_i \le L_i \\ 0 \; jika \; X_i > L_i \end{cases}$$

$$\text{dan} \qquad X_i = \begin{cases} X_i \;\; jika \; teramati \\ L_i \;\; jika \; tersensor \end{cases}$$

Definisi 11 (Lawless,1982:35)

d_i mengindikasikan waktu hidup X_i tersensor atau tidak, $x_i = X_i$ jika teramati, dan $x_i = L_i$ jika tersensor.

Fungsi kepadatan probabilitas bersama dari x_i dan d_i adalah

$$f\left(x_i, d_i\right) = f\left(x_i\right)^{d_i} S\left(L_i\right)^{1-d_i} \qquad (2.3)$$

Variabel random x_i merupakan gabungan antara variabel random kontinu dan diskrit.

Untuk bagian diskrit $x_i = L_i$

$P(x_i = L_i) = P(d_i = 0) = P(X_i > L_i) = S(L_i)$ Sedangkan pada bagian kontinu, untuk nilai $x_i < L_i$ fungsi kepadatan probabilitas nya adalah

$$P(x_i | d_i = 1) = P(x_i | x_i < L_i)$$
$$= \frac{f(x_i)}{1 - S(L_i)}$$

dan $P(x_i | x_i < L_i)$ menyatakan fungsi kepadatan probabilitas dari x_i dengan syarat $x_i < L_i$.

Jadi, distribusi dari (x_i, L_i) mempunyai komponen

$$P(x_i = L_i, d_i = 0) = P(d_i = 0) = S(L_i)$$
$$P(x_i, d_i = 1) = P(x_i | d_i = 1) P(d_i = 1) \quad x_i < L_i$$
$$= f(x_i)$$

dan $P(x_i, L_i) = f(x; q)$

dan jika bagian-bagian dari (x_i, d_i) independen maka fungsi likelihood diberikan dengan

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)^{d_i} S(L_i)^{1-d_i}$$

2.1.5.2 Data Tersensor Tipe II

Lawless (1982:32) menyebutkan bahwa data tersensor tipe II merupakan data kematian atau kegagalan dari r observasi terkecil dalam sampel random yang berukuran n dengan $1 \le r \le n$. Data tersensor tipe II diperoleh dari penyelidikan terhadap n observasi, sehingga penyensoran berhenti sampai observasi sampel yang mempunyai waktu kematian atau kegagalan ke-r. Penyensoran tipe II umumnya data terdiri dari r waktu hidup terkecil dengan $x_1 \le x_2 .... \le x_r$ dari sampel random berukuran n. Jika $x_i, x_2, ..., x_n$ berdistribusi identik dan independen dengan fungsi kepadatan probabilitas (pdf) $f(x)$ dan fungsi tahan hidup $S(x)$ serta $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ merupakan statistik terurut, maka fungsi distribusi bersama dari $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah

$$g\left(x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(r)}\right) = \frac{n!}{n-r!} f(x_1) f(x_2) .... f(x_r) \left[S(x_r)\right]^{n-r}$$

2.1.6 Metode Estimasi Harga Parameter Distribusi Dengan Metode Maksimum Likelihood

Metode untuk mengestimasi harga parameter distribusi dari data dalam fungsi tahan hidup dalam penulisan skripsi ini adalah dengan metode maksimum likelihood.

Definisi 12 (Bain Engelhardt,1992:293)

Fungsi kepadatan probabilitas (pdf) bersama dari n *variabel random* $X_1, X_2, ..., X_n$ *yang dievaluasi pada* $x_1, x_2, ..., x_n$ *adalah* $f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)$ *dengan parameter* q. *Untuk* $x_1, x_2, ..., x_n$ *tetap, fungsi likelihood merupakan fungsi dari parameter* θ *dan dinotasikan dengan* $L(\theta)$. *Jika* $X_1, X_2, ..., X_n$ *merupakan sampel random dari fungsi kepadatan probabilitas (pdf)* $f(x;\theta)$ *maka fungsi likelihoodnya adalah :*

$$L(\theta) = f(x_1;\theta) f(x_2;\theta) ... f(x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

Definisi 13 (Bain Engelhardt,1992:294)

Misalkan $L(\theta) = f(x_1;\theta) f(x_2;\theta) ... f(x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) . \theta \in W$ *yang merupakan fungsi kepadatan probabilitas (pdf) bersama dari* $X_1, X_2, ..., X_n$. *Bila diberikan himpunan dari observasi* $x_1, x_2, ..., x_n$ *nilai* $\hat{\theta}$ *dalam* W *memberikan nilai maksimum pada* $L(\theta)$ *disebut maksimum likelihood estimator dari* θ. *Dalam hal ini* $\hat{\theta}$ *merupakan nilai dari* θ *yang memenuhi :*

$$f\left(x_1, x_2, ..., \hat{\theta}\right) = \underset{\theta \in W}{maks}\, f(x_1, x_2, ... x_n; \theta)$$

Definisi 14 (Bain Engelhardt,1992:294)

Maksimum likelihood estimator dari θ *diperoleh dengan menyelesaikan persamaan* $\frac{\partial}{\partial\theta} LnL(\theta)=0$, *misalkan ada* k *parameter yang tidak diketahui, maka maksimum likelihood estimator dari* θ_i *didapat dengan menyelesaikan :*

$$\frac{\partial}{\partial\theta} LnL(\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)=0 \text{, dengan } i=1,2,.....,k.$$

Definisi 15 (Bain Engelhardt,1992:290)

Statistik $T_n=\theta(X_1,X_2,...,X_n)$ yang digunakan untuk mengestimasi nilai dari $\tau(\theta)$ disebut estimator dari $\tau(\theta)$ dan nilai statistik disebut taksiran dari $\tau(\theta)$.

2.1.7 Life Tables

Dari analisis data waktu hidup, dapat dibentuk suatu model dari fungsi tahan hidup yang menunjukkan besarnya harga harapan suatu individu dapat bertahan hidup sampai usia $x+1$ tahun, dengan x merupakan usia suatu individu. Model ini selanjutnya disajikan dalam bentuk tabel disebut *life tables.*

Definisi 16 (Elandt Johnson, 1979: 84)

Misalkan l_x *adalah jumlah individu tepat berusia x yang diharapkan masih bertahan hidup dari sejumlah populasi* l_0. *Maka proporsi dari individu yang bertahan hidup pada usia* x *adalah*

$$P_x=\frac{l_x}{l_0} \qquad (2.4)$$

Misalkan d_x *merupakan jumlah kematian yang diharapkan dalam interval* $(x,x+1)$. *Jika* ${}_rq_x$ *merupakan probabilitas kematian dalam* $(x,x+r)$, *maka probabilitas kematian dalam interval* $(x,x+1)$, $r=1$ *dengan syarat individu hidup di awal interval adalah*

$$q_x=\frac{d_x}{l_x} \qquad (2.5)$$

Dan probabilitas tahan hidup dalam interval $(x,x+1)$ *atau survive melewati usia* $x+1$ *adalah*

$$p_x = 1 - q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \tag{2.6}$$

Proporsi tahan hidup yang diharapkan sampai n tahun dengan syarat hidup di usia x adalah

$${}_nP_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \tag{2.7}$$

Definisi 17 (Elandt Johnson, 1979: 84)

L_x merupakan jumlah individu dari banyaknya l_x individu berusia x yang diharapkan hidup melewati $(x, x+1)$. Masing-masing anggota cohort yang mati pada interval $(x, x+1)$ memberikan kontribusi satu tahun untuk L_x.

$$L_x = \int_x^{x+1} l_y dy \tag{2.8}$$

Definisi 18 (Elandt Johnson, 1979: 84)

T_x merupakan jumlah total individu yang diharapkan dari l_x individu yang berhasil melewati usia x, maka diperoleh

$$T_x = \sum_{i=0}^{\infty} L_{x+i} \tag{2.9}$$

Menurut Elandt Johnson (1979:96) fungsi-fungsi dasar lain yang penting dalam konstruksi *life table* adala e_x, yaitu harapan hidup ke depan dalam hitungan tahun (*expectation of future lifetime*) dari suatu individu berusia *x*. Sehingga diperoleh,

$$e_x = \frac{T_x}{l_x} \tag{2.10}$$

probabilitas kematian individu berusia $x+q$ dalam interval $(x+q, x+q+1]$ dengan $0 < q < 1$ adalah

$$q_{x+q} = 1 - p_x \frac{1-q\,q_{x+1}}{1-q\,q_x} \tag{2.11}$$

Dan probabilitas suatu individu mati pada usia $x+t_i$ dalam interval waktu dari x sampai $x+1$, jika diketahui individu tersebut masih dapat bertahan hidup sampai dengan waktu x, dinotasikan dengan m_{x+t_i} adalah

$$m_{x+t_i} = q_{x+t_i} = \frac{(1-t_i)\,q_x}{1-t_i.q_x} \qquad (2.12)$$

2.2. Kerangka Pemikiran

Penulisan skripsi ini diawali dengan membentuk fungsi kepadatan probabilitas kegagalan (kematian) individu berusia *x* dalam interval *(x,x+1]*. Selanjutnya dilakukan pengestimasian probabilitas kegagalan (kematian) individu berusia *x* dalam interval *(x,x+1]*, dengan asumsi individu hidup di awal interval.. Metode yang digunakan untuk mengestimasi parameter adalah metode maksimum likelihood.

Dalam melakukan pengestimasian probabilitas kegagalan (kematian) individu berusia *x* dalam interval *(x,x+1]*, diperhitungkan kemungkinan kasus-kasus yang terjadi dalam suatu populasi berkaitan dengan jumlah anggota populasi. Sehingga diperoleh rumusan probabilitas kegagalan (kematian) individu berusia *x* pada interval interval *(x,x+1]* yang berbeda untuk masing-masing kasus.

Setelah diperoleh estimasi harga parameter untuk interval $(x, x+1]$, dilanjutkan dengan membentuk life table yang memuat jumlah individu, jumlah kematian, probabilitas kematian individu berusia *x* dalam interval *(x,x+1]* dan probabilitas tahan hidup indivividu berusia *x* dalam interval *(x,x+1]*. Selanjutnya, dengan *life table* yang terbentuk dikonstruksi untuk fungsi-fungsi dasar *life table* lainnya, yaitu jumlah individu berusia *x* yang diharapkan dapat bertahan hidup sampai usia *x+1*, dan jumlah individu berusia *x* yang diharapkan masih bertahan hidup setelah usia *x+1.*

BAB III
METODE PENELITIAN

Penulisan skripsi ini bersifat studi literatur, dengan demikian keseluruhan bahan penulisan diambil dari buku referensi yang mendukung tentang masalah pengkonstruksian *life table* untuk individu dalam interval waktu satu tahun.

Adapun langkah-langkah yang diperlukan untuk penulisan skripsi ini adalah

1. Menganggap segala kemungkinan yang bisa terjadi ada, kemudian mengelompokkan ke dalam kasus-kasus yang mungkin.
2. Menentukan penduga parameter dari distribusi yang terbentuk, yaitu mencari q_x (probabilitas kematian individu pada usia x sampai usia $x+1$).
1. Mengkonstruksi *life table* dengan unsur yang lebih kompleks.
4. Untuk menjelaskan tujuan penulisan, skripsi ini diakhiri dengan contoh aplikasi kasus.

BAB IV
PEMBAHASAN

Pada Bab IV ini akan dibagi menjadi dua bagian. Yang pertama adalah konstruksi *life table* untuk probabilitas suatu individu dapat bertahan hidup dari usia x tahun sampai usia $x+1$ tahun, dengan x merupakan usia suatu individu. Untuk yang kedua adalah contoh aplikasi kasus dari konstruksi *life table* yang dihasilkan.

4.1 Mengkonstruksi Life Table

Untuk dapat mengkonstruksikan *life table* diperlukan pengetahuan statistik tentang analisis data waktu hidup (*survival*) dan metode untuk mencari estimasi parameter. Dalam penulisan skripsi ini metode yang digunakan untuk mendapatkan estimasi parameter adalah Metode Maksimum Likelihood.

Dari analisis data waktu hidup, dapat dibentuk suatu model fungsi tahan hidup yang menunjukkan besarnya harga harapan suatu individu mati dari usia x sampai usia $x+1$ tahun, dengan x merupakan usia suatu individu. Selanjutnya dapat ditentukan probabilitas tahan hidup suatu individu berusia x dalam interval $(x, x+1]$ dan fungsi-fungsi lain yang merupakan unsur pembentuk *life table.*

Estimasi parameter dari fungsi densitas probabilitas untuk kematian tiap-tiap invidu berusia x tahun sampai $x+1$ tahun merupakan probabilitas terjadinya kematian suatu individu dari usia x tahun sampai usia $x+1$ tahun yang kemudian dinotasikan dengan q_x, dengan asumsi individu hidup di usia x. Karena diasumsikan individu hidup di awal interval, maka interval estimasi untuk menyatakan batasan estimasi dinotasikan dengan $(x,x+1]$.

Dalam suatu populasi yang teramati, akan didapatkan sejumlah individu berusia x yang masuk pengamatan dan dinotasikan dengan n_x dan banyaknya individu berusia x yang meninggal selama dalam pengamatan dinotasikan dengan d_x. Pada beberapa kasus akan dijumpai penambahan individu sejumlah k_x selama pengamatan dan disebut sebagai *new entrants*. Juga akan dijumpai sejumlah individu yang meninggalkan pengamatan dalam interval estimasi selain sebab kematian (*withdrawals). Withdrawals* dibedakan menjadi dua, yaitu *withdrawals* yang terencana ***(planned),*** yang dalam penulisan skripsi ini selanjutnya disebut sebagai ***enders,*** e_x dan yang tak terencana ***(losses),*** w_x. ***Enders*** adalah individu yang meninggalkan pengamatan sesuai rencana. Misalnya, seorang warga yang habis masa kontraknya dan harus keluar dari wilayah pengamatan atau dalam asuransi seorang pemegang polis yang habis masa kontraknya. Sedangkan *withdrawals* yang tak terencana adalah individu yang meninggalkan pengamatan tanpa perencanaan sebelumnya. Misalnya, dalam asuransi seorang pemegang polis yang *surrender* atau dalam observasi kilnik adalah individu yang hilang selama jangka waktu pengamatan.

Dalam suatu populasi yang teramati, dimungkinkan akan terjadi beberapa kasus yang berkaitan dengan penambahan atau pengurangan jumlah anggota populasi. Kasus-kasus yang mungkin terjadi dalam suatu populasi yang teramati dalam interval waktu $(x, x+1)$ terbagi ke dalam empat kelompok, yaitu

1. Kasus 1

   Populasi tergolong ke dalam kasus 1 jika tidak ada individu yang masuk dan keluar/meninggal dalam interval $(x, x+1]$.

2. Kasus 2

   Populasi tergolong ke dalam kasus 2 jika ada individu yang masuk dan tidak ada yang keluar dalam interval $(x, x+1]$.

3. Kasus 3

   Populasi tergolong kedalam kasus 3 jika tidak ada individu yang masuk dan ada yang keluar dalam interval $(x, x+1]$.

4. Kasus 4

   Populasi tergolong ke dalam kasus 4 jika ada individu yang masuk dan ada individu yang keluar dalam interval $(x, x+1]$.

Misal terdapat sejumlah individu k_x memasuki pengamatan pada usia rata-rata $x+r\,, 0<r<1$ dan e_x keluar pengamatan pada usia rata-rata $x+t\,, 0<t<1$. Dinotasikan l_x menyatakan jumlah individu yang bertahan sampai akhir interval estimasi. Dan diasumsikan tidak terdapat ***withdrawals*** tak terencana dalam kasus ini $(w_x = 0)$. Sehingga dapat dibangun persamaan sebagai berikut

$$l_x = n_x + k_x - e_x - d_x$$

Selanjutnya didefinisikan d_i sebagai variabel indikator untuk seorang individu dengan ketentuan

$$d_i = \begin{cases} 1 & \textit{jika orang ke} - i \textit{ meninggal dalam interval} \left(x, x+1\right] \\ 0 & \textit{yang lainnya} \end{cases}$$

sehingga, untuk $t_i = 1$ dan $d_i = 0$, berarti individu ke-i adalah ***survivor*** (individu yang dapat bertahan hidup dan masih dalam pengamatan sampai usia $x+1$). Jika $0<t_i<1$ dan $d_i = 0$, artinya individu ke-i adalah individu yang keluar dari pengamatan selain sebab kematian. Dan jika $t_i \le 1$ dan $d_i = 1$, artinya individu ke-i adalah individu yang meninggal dalam $(x, x+1]$.

Tabel 4.1 Kasus-Kasus Dalam Populasi

r_i / t_i	$r_i = 0$ untuk semua $(n_x + k_x)$	$r_i > 0$ untuk k_x individu yang baru diamati
$t_i = 1$ untuk semua i dengan $d_i = 0$	**Kasus 1**	**Kasus 2**
$t_i < 1$ untuk e_x keluar pengamatan dengan $d_i = 0$	**Kasus 3**	**Kasus 4**

Pada pengamatan waktu hidup suatu populasi, akan didapat data waktu kematian individu, dengan masing-masing individu mempunyai usia kematian yang beragam. Dari (2.1) dinyatakan probabilitas suatu individu mati atau gagal dalam interval waktu dari x sampai $x+\Delta x$ adalah

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to\infty}\frac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x}$$

Jika x_i adalah sembarang anggota X dalam $x<X\le x+1$, maka didefinisikan probabilitas suatu individu mati dalam interval waktu dari x sampai $x+1$, dengan syarat individu tersebut masih dapat bertahan hidup sampai dengan waktu x adalah

$$f(x_i|X>x)=\lim_{\Delta x\to\infty}\left[\frac{P(x\le X<x+1)|X\ge x}{P(X\ge x).\Delta x}\right]$$

$$f(x_i|X>x)=\lim_{\Delta x\to\infty}\left[\frac{P(x\le X<x+1)}{\Delta x}.\frac{1}{P(X\ge x)}\right]$$

$$f(x_i|X>x)=\frac{f(x_i)}{S(x)}$$

Dari persamaan (2.2) diperoleh

$$f(x_i|X>x)=\frac{S(x_i)\cdot l(x_i)}{S(x)}$$

Dan jika $s_i=x_i-x$ dengan x_i merupakan usia kematian individu ke-i dalam interval $(x,x+1]$, maka s_i adalah panjang waktu hidup dihitung dari usia x sampai meninggal. Sehingga probabilitas suatu individu mati dalam interval waktu dari x sampai $x+1$, dengan syarat individu tersebut masih dapat bertahan hidup sampai dengan waktu x, q_x adalah

$$f(x_i|X>x)=\frac{S(x+s_i)\cdot l(x+s_i)}{S(x)} \qquad (4.1)$$

$$f(x_i|X>x)=\frac{S(x+s_i)}{S(x)}.l(x+s_i)$$

dengan $\frac{S(x+s_i)}{S(x)}$ adalah fungsi tahan hidup suatu individu berusia x sampai $x+s_i$ dengan syarat individu tersebut hidup pada usia x dan dapat dinotasikan dengan ${}_{s_i}p_x$. Dan $l(x+s_i)$ adalah probabilitas suatu individu mati pada usia $x+s_i$ dalam interval interval $(x,x+1]$ dapat dinotasikan dengan m_{x+s_i}.Sehingga persamaan (4.1) dapat ditulis sebagai berikut

$$f(x_i) = {}_{s_i}P_x m_{x+s_i}$$

Kemudian didefinisikan $x+r_i$ sebagai usia saat individu ke-i masuk pengamatan dalam interval $(x,x+1]$, dengan $0 \le r_i < 1$, dan didefinisikan $x+t_i$ sebagai usia saat individu ke-i keluar pengamatan dalam interval $(x,x+1]$, dengan $0 \le t_i < 1$. Menggunakan proses penghitungan yang sama diperoleh probabilitas seorang individu mati dalam jangka waktu $(x_i+t)_i - (x_i+r)_i = t_i - r_i$, dengan syarat individu tersebut masih dapat bertahan hidup sampai usia x, dapat diperoleh persamaan sebagai berikut

$$f(x_i) = {}_{t_i-r_i}P_{x+r_i} m_{x+r_i} \tag{4.2}$$

Selanjutnya akan digunakan pengamatan data tersensor tipe 1 untuk melakukan penghitungan estimasi parameter. Dari (2.3) dan (4.2) diperoleh fungsi densitas bersama dari (x_i, d_i) yaitu

$$f(x_i, d_i) = {}_{t_i-r_i}P_{x+r_i} \left(m_{x+t_i}\right)^{d_i} \tag{4.3}$$

Dari persamaan(4.3) dibentuk fungsi likelihood

$$L(q_x) = \prod_{i=1}^{n+k} {}_{t_i-r_i}P_{x+r_i} \left(m_{x+t_i}\right)^{d_i} \tag{4.4}$$

Dengan substitusi persamaan (2.11) dan (2.12) ke(4.4), diperoleh

$$L(q_x) = \prod_{i=1}^{n+k} \left[\left(\frac{1-t_i q_x}{1-r_i q_x} \right) \left(\frac{q_x}{1-t_i q_x} \right)^{d_i} \right] \tag{4.5}$$

Untuk sejumlah d kematian dalam interval $\left(x, x+1\right]$ maka persamaan $\left(4.5\right)$ menjadi :

$$L\left(q_x\right) = \left(q_x\right)^d \cdot \prod_{i=1}^{n+k}\left(1-r_i.q_x\right)^{-1} \cdot \prod_{i=1}^{n+k}\left(1-t_i.q_x\right)^{1-d_i}$$

Dengan fungsi ln likelihoodnya adalah

$$\ln L\left(q_x\right) = \ln\left[\left(q_x\right)^d \cdot \prod_{i=1}^{n+k}\left(1-r_i.q_x\right)^{-1} \cdot \prod_{i=1}^{n+k}\left(1-t_i.q_x\right)^{1-d_i}\right]$$

Selanjutnya dicari penduga q_x.

$$\frac{d}{dq}\ln L\left(q_x\right) = 0$$

$$\frac{d_x}{q_x} + \sum_{i=1}^{n+k}\frac{r_i}{1-r_i.q_x} - \left(1-d_i\right)\sum_{i=1}^{n+k}\frac{t_i}{1-t_i.q_x} = 0 \qquad \left(4.6\right)$$

Jika $d_i = 0$, $r_i = 0$ untuk semua n_x, $r_i = r$ untuk semua k_x dan $t_i = s$ untuk semua e_x dengan dan $t_i = 1$ untuk $n_x + k_x - e_x - d_x$ orang yang bertahan hidup (*survivors)* maka dari persamaan $\left(4.6\right)$ menjadi

$$\frac{d_x}{q_x} + k_x\left(\frac{r}{1-rq_x}\right) - e_x\left(\frac{s}{1-sq_x}\right) - \left(n_x + k_x - d_x - e_x\right)\left(\frac{1}{1-q_x}\right) = 0$$

Dengan menyamakan penyebutnya diperoleh persamaan untuk pembilangnya, yaitu:

$$\left(1-rq_x\right)\left(1-sq_x\right)\left(1-q_x\right)d_x + q_x\left(1-sq_x\right)\left(1-q_x\right)k_x r - q_x\left(1-rq_x\right)\left(1-q_x\right)es$$
$$-q_x\left(1-rq_x\right)\left(1-sq_x\right)\left(n_x + k_x - e - d_x\right) = 0$$

$$\left(1 - q_x - sq_x + sq_x^2 - rq_x + rq_x^2 + rsq_x^2 - rsq_x^3\right)d_x + \left(q_x - q_x^2 - sq_x^2 + sq_x^3\right)k_x r$$
$$-\left(q_x - q_x^2 - rq_x^2 + rq_x^3\right)es - \left(q_x - sq_x^2 - rq_x^2 + rsq_x^3\right)\left(n_x + k_x - e - d_x\right) = 0$$

Maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}&(rsn_x)q_x^3+\left[(k_x-e_x-d_x)rs+(e_x-n_x)r-(n_x+k_x)s\right]q^2\\&+\left[(d_x-k_x)r+(d_x+e_x)s+n_x+k_x-e_x\right]q_x-d_x=0\end{aligned} \qquad (4.7)$$

Selanjutnya untuk mempermudah perhitungan ditentukan persamaan-persamaan yang menunjukkan koefisien-koefisien $q_x{}^3, q_x{}^2$ dan q_x, yaitu :

$$\begin{aligned}A&=(rsn_x)\\B&=(k_x-e_x-d_x)rs+(e_x-n_x)r-(n_x+k_x)s\\C&=(d_x-k_x)r+(d_x+e_x)s+n_x+k_x-e_x\\D&=d_x\end{aligned} \qquad (4.8)$$

Sehingga persamaan (4.7) menjadi

$$Aq_x^3+Bq_x{}^2+Cq_x-D=0$$

Selanjutnya persamaan (4.7) diselesaikan dengan menggunakan *software Mathcad* 2000 untuk membantu perhitungan sehingga diperoleh $\hat{q}_x$ sebagai penduga q_x dengan ketentuan sebagai berikut:

1. Jika populasi tergolong ke dalam kasus 1 maka $r_i=0$ untuk semua individu dalam n_k+k_x dan jika $t_i=1$ untuk semua individu dalam $n_x+k_x-d_x$.
2. Jika populasi tergolong ke dalam kasus 2 maka $t_i=1$ untuk semua $n_x+k_x-d_x$, $r_i=0$ untuk n_x (jumlah individu pada awal interval) dan $r_i>0$ untuk semua k_x (peserta baru dalam interval estimasi)
3. Jika populasi tergolong ke dalam kasus 3 maka $r_i=0$ untuk semua individu, $t_i=s$ untuk semua pengakhir dan $t_i=1$ untuk semua $n_x-e_x-d_x$ *survivors*.
4. Jika populasi tergolong ke dalam kasus 4 maka $r_i=0$ untuk n_x (jumlah anggota di awal interval estimasi), $r_i=r$ untuk k_x (jumlah peserta batu

dalam interval estimasi), $t_i = s$ untuk semua e_x (pengakhir) dan $t_i = 1$ untuk semua $n_x + k_x - e_x - d_x$ *survivors.*

Dari perolehan q_x dapat dicari probabilitas tahan hidup suatu individu berumur x dalam interval $(x, x+1]$, p_x. Dari (2.6) diperoleh

$$p_x = 1 - q_x$$

Dan dapat dicari jumlah individu yang berhasil melewati awal pengamatan dan diharapkan masih hidup pada usia x, l_x. Dari (2.7) diperoleh

$$l_x = l_{x-1} p_{x-1}$$

Selanjutnya dari $(2.8), (2.9)$ dan (2.10) dapat dikonstruksi untuk fungsi pembentuk *life table* lainnya yaitu L_x, T_x dan e_x.

Sehingga, dari perolehan q_x, p_x, l_x, L_x, T_x dan e_x dapat dibentuk model *lifetable* sebagai berikut

x	d_x	q_x	p_x	l_x	L_x	T_x	e_x

4.2 Aplikasi Konstruksi Life Table untuk Individu dalam Interval Waktu Satu tahun

Pada bab ini diberikan contoh kasus untuk populasi data waktu hidup sebuah perusahaan dana pensiun. Diperoleh data jumlah kematian dari 100 orang anggota sebuah perusahaan dana pensiun ‘X” setiap tahunnya. Pengamatan disimulasikan berlangsung selama 20 tahun dimulai pada tanggal 1 Januari 1960 dan berakhir pada 31 Desember 1980.

Tabel 4.2.1 memuat usia masuk, usia keluar, status saat masuk pengamatan, status saat keluar pengamatan, usia pecahan untuk *new entrants* (sisa bulan pasca ulang tahun per 12 bulan) dan usia pecahan untuk individu yang keluar dari pengamatan (sisa bulan setelah ulang tahun per 12 bulan).

TABEL 4.2.1 Data Perusahaan Dana Pensiun "X"

Awal Pengamatan : 1 Januari 1960

Akhir Pengamatan: 31 Desember 1980

No	Usia masuk	Usia keluar	Status masuk	Status keluar	*r*	*s*
1	41	60	n	d	0	0.5
2	40	58	k	d	0.917	0.75
3	40	59	k	d	0.583	0.5
4	40	59	k	e	0.417	0.667
5	40	56	n	d	0	0.917
6	40	59	n	s	0.5	0
7	40	58	k	d	0.333	0.75
8	40	59	k	s	0.333	0
9	40	59	n	s	0	0
10	40	59	n	s	0	0
11	40	59	k	d	0.167	0.5
12	40	57	n	d	0	0.25
13	40	59	n	d	0	0.25
14	39	58	k	d	0.917	0.5
15	39	58	k	d	0.917	0.5
16	39	58	k	d	0.833	0.667
17	39	57	k	d	0.75	0.75
18	39	55	k	e	0.75	0.167
19	39	58	k	d	0.667	0.5
20	39	57	k	e	0.667	0.25
21	39	58	k	d	0.583	0.167
22	39	57	k	d	0.583	0.917
23	39	58	n	d	0	0.167
24	39	57	n	d	0	0.25
25	39	58	k	d	0.917	0.25
26	39	58	k	d	0.833	0.833
27	38	56	k	s	0.833	0
28	38	56	k	d	0.5	0
29	38	54	k	e	0.5	0.333
30	38	53	k	e	0.417	0.417
31	38	57	k	d	0.333	0.333
32	38	54	k	d	0.25	0

33	38	56	k	d	0.167	0.167
34	38	54	k	d	0.167	0.167
35	38	57	k	d	0.167	0.167
36	38	55	k	d	0.167	0.5

Lanjutan Table 4.2.1

No	Usia masuk	Usia keluar	Status masuk	Status keluar	*r*	*s*
37	38	57	n	s	0	0
38	38	56	n	d	0	0.833
39	38	53	n	d	0	0.917
40	38	55	n	d	0	0.333
41	36	55	k	d	0.5	0.833
42	36	55	k	d	0.833	0.833
43	36	55	k	s	0.833	0
44	36	54	k	d	0.833	0.5
45	36	55	n	d	0	0.5
46	36	55	k	e	0.833	0.5
47	36	50	k	e	0.833	0.167
48	36	54	k	d	0.75	0.75
49	36	54	k	d	0.75	0
50	36	55	k	d	0.75	0.167
51	35	51	k	s	0.5	0
52	35	51	k	e	0.333	0.5
53	35	50	k	s	0.167	0
54	35	45	n	e	0	0.5
55	35	54	n	d	0	0.5
56	35	54	k	d	0.5	0.333
57	35	54	k	d	0.5	0.167
58	34	52	k	s	0.5	0
59	34	51	n	d	0	0.167
60	34	50	k	d	0.333	0.833
61	33	52	k	d	0.333	0.917
62	33	52	k	d	0.167	0.333
63	33	51	n	e	0	0.833
64	33	52	n	s	0	0
65	33	52	k	d	0.75	0.5
66	33	51	k	e	0.833	0.75
67	33	46	k	e	0.5	0.5
68	32	51	n	d	0	0.5
69	32	50	n	d	0	0.5
70	32	51	n	s	0	0
71	32	47	k	d	0.833	0.75
72	32	47	k	d	0.167	0.167
73	32	50	k	d	0.5	0.167

74	32	50	k	d	0.833	0.833
75	32	50	k	d	0.917	0.833
76	32	51	k	d	0.5	0.833
77	32	50	k	d	0.5	0.833
78	32	51	n	d	0	0.5

Lanjutan Tabel 4.2.1

No	Usia masuk	Usia keluar	Status masuk	Status keluar	r	s
79	31	51	k	s	0.5	0
80	31	35	k	e	0.5	0.5
81	31	36	n	e	0	0.5
82	31	50	n	d	0	0.75
83	31	50	n	d	0	0.75
84	31	35	n	e	0	0.75
85	30	49	k	s	0.5	0
86	30	49	k	s	0.5	0
87	30	48	k	s	0.5	0
88	30	49	n	e	0	0.5
89	30	48	n	e	0	0.333
90	30	45	n	d	0	0.75
91	30	49	k	d	0.167	0.167
92	30	49	k	d	0.167	0.75
93	30	45	k	d	0.167	0.5
94	30	49	k	d	0.167	0.167
95	30	47	k	e	0.833	0.167
96	30	47	k	d	0.5	0.5
97	30	45	n	d	0	0.333
98	30	45	n	e	0	0.167
99	30	49	k	e	0.75	0.5
100	29	48	k	s	0.75	0

Keterangan :

- Usia Masuk : Usia individu saat masuk pengamatan.
- Usia keluar : Usia individu saat keluar pengamatan.
- Status Masuk : Status untuk kodisi individu saat memasuki pengamatan.
  - n_x : individu masuk pengamatan pada usia tepat x
  - k_x : individu masuk pengamatan pada interval usia $(x, x+1)$
- Status keluar : Status untuk kondisi individu saat meninggalkan pengamatan.
  - d_x : Individu keluar pengamatan karena meninggal dalam $(x, x+1]$

- s_x : *survivor*
- e_x : Individu yang keluar pengamatan dalam keadaan hidup, pada usia $(x, x+1]$

- r : usia pecahan saat individu memasuki pengamatan.
- s : usia pecahan saat individu meninggalkan pengamatan.

Selanjutnya, peserta yang diamati, disusun berdasarkan status dalam pengamatan yaitu sebagai pemula, peserta baru, keluar, pengakhir atau meninggal. Pemula pada usia x berisi semua individu yang masuk pengamatan pada usia tepat x ditambah *survivors* untuk usia $x-1$, dikurangi seluruh peserta yang keluar pada usia tepat x.

Kemudian dihitung usia pecahan rata-rata tiap tahun, untuk kategori peserta baru, pengakhir dan keluar yakni secara berurutan sebagai r, s dan t.Dan diperoleh hasil perhitungan pada tabel 4.2.2 berikut :

TABEL 4.2.2 Data Perusahaan Dana Pensiun "X"

per Kelompok Usia

x	n_x	k_x	d_x	e_x	s_x	r	s
29	0	1	0	0	1	0.75	0
30	6	10	0	0	16	0.4251	0
31	20	2	0	0	22	0.5	0
32	26	7	0	0	33	0.607143	0
33	35	5	0	0	40	0.5166	0
34	41	2	0	0	43	0.4165	0
35	45	5	0	2	48	0.4	0.625
36	49	9	0	1	57	0.768333	0.5
37	57	0	0	0	57	0	0
38	61	10	0	0	71	0.03501	0
39	73	11	0	0	84	0.765182	0
40	90	6	0	0	96	0.541667	0.75
41	97	0	0	0	97	0	0

42	97	0	0	0	97	0	0
43	97	0	0	0	97	0	0

Lanjutan Tabel 4.2.2

x	n_x	k_x	d_x	e_x	s_x	r	s
44	97	0	0	0	97	0	0
45	97	0	3	2	92	0	0.3335
46	92	0	0	1	91	0	0.5
47	91	0	3	1	87	0	0.167
48	87	0	0	1	86	0	0.333
49	86	0	3	2	81	0	0.5
50	81	0	8	1	72	0	0.167
51	72	0	4	3	65	0	0.694
52	65	0	3	0	62	0	0
53	62	0	1	1	60	0	0.417
54	60	0	8	1	51	0	0.333
55	51	0	6	2	43	0	0.667
56	43	0	4	0	39	0	0
57	39	0	6	1	32	0	0.3335
58	32	0	10	0	22	0	0
59	22	0	3	1	18	0	0.125
60	18	0	1	0	17	0	0

Keterangan :

x : usia anggota

n_x : banyaknya pemula *(beginners)* untuk interval usia $(x, x+1]$

k_x : banyaknya peserta baru dalam interval usia $(x, x+1]$

d_x : banyaknya peserta yang meninggal dalam interval usia $(x, x+1]$

e_x : banyaknya pengakhir.

s_x : peserta yang masuk pengamatan dalam interval $(x, x+1]$ dan bertahan sampai usia $x+1$ tahun.

r : usia pecahan rata-rata untuk k_x

s : usia pecahan rata-rata untuk e_x

Kemudian dari Tabel 4.2.2 dapat dihitung tiap-tiap koefisien untuk persaman likelihoodnya. Dari persamaan (4.8), dihasilkan koefisien-koefisien untuk persamaan likelihood seperti terdapat pada Tabel 4.2.3

TABEL 4.2.3 Koefisien Persamaan Likelihood

x	**A**	**B**	**C**	**D**
29	0	0	0.25	0
30	0	-2.5506	11.749	0
31	0	-10	21	0
32	0	-15.7857	28.75	0
33	0	-18.081	37.417	0
34	0	-17.0765	42.167	0
35	11.25	-47.7	47.25	0
36	18.82417	-62.8067	50.585	0
37	0	0	57	0
38	0	-2.13561	70.6499	0
39	0	-55.8583	75.583	0
40	36.5625	-118.313	92.75	0
41	0	0	97	0
42	0	0	97	0
43	0	0	97	0
44	0	0	97	0
45	0	-32.3495	96.6675	-3
46	0	-46	91.5	0
47	0	-15.197	90.668	-3
48	0	-28.971	86.333	0
49	0	-43	86.5	-3
50	0	-13.527	81.503	-8
51	0	-49.968	73.858	-4
52	0	0	65	-3
53	0	-25.854	61.834	-1
54	0	-19.98	61.997	-8
55	0	-34.017	54.336	-6
56	0	0	43	-4
57	0	-13.0065	40.3345	-6
58	0	0	32	-10

59	0	-2.75	21.5	-3
60	0	0	18	-1

Selanjutnya $\hat{q}_x$ dihitung dengan menggunakan software MATHCAD 2000.

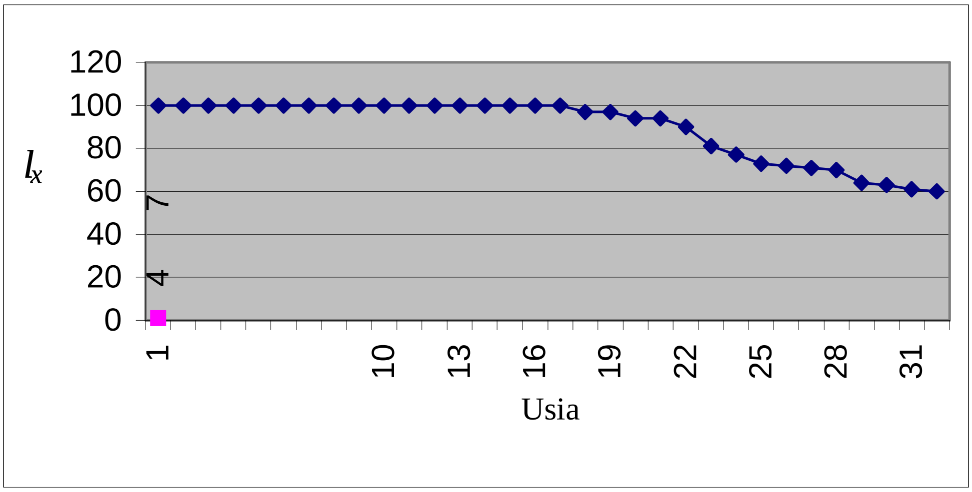
TABEL 4.2.4 *Life Table* untuk Anggota

Perusahaan Dana Pensiun "X"

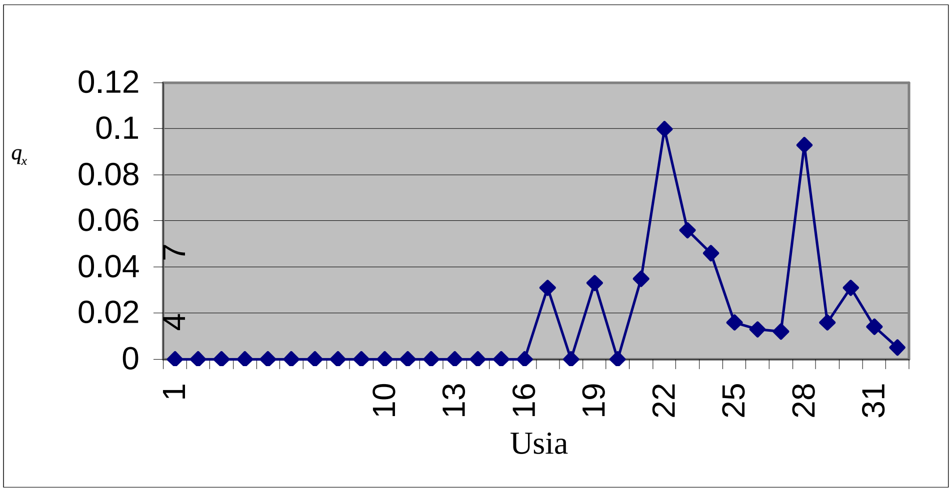
x	d_x	q_x	p_x	l_x	L_x	T_x	e_x
29	0	0	1	100	100	2805	28.05
30	0	0	1	100	100	2705	27.05
31	0	0	1	100	100	2605	26.05
32	0	0	1	100	100	2505	25.05
33	0	0	1	100	100	2405	24.05
34	0	0	1	100	100	2305	23.05
35	0	0	1	100	100	2205	22.05
36	0	0	1	100	100	2105	21.05
37	0	0	1	100	100	2005	20.05
38	0	0	1	100	100	1905	19.05
39	0	0	1	100	100	1805	18.05
40	0	0	1	100	100	1705	17.05
41	0	0	1	100	100	1605	16.05
42	0	0	1	100	100	1505	15.05
43	0	0	1	100	100	1405	14.05
44	0	0	1	100	100	1305	13.05
45	3	0.031	0.969	100	100	1205	12.05
46	0	0	1	97	94	1105	11.39
47	3	0.033	0.967	97	97	1011	10.42
48	0	0	1	94	91	914	9.72
49	3	0.035	0.965	94	94	823	8.76
50	8	0.1	0.9	90	88	729	8.1
51	4	0.056	0.944	81	74	641	7.91
52	3	0.046	0.954	77	73	567	7.36
53	1	0.016	0.984	73	71	494	6.77
54	8	0.013	0.987	72	71	423	5.88
55	6	0.012	0.988	71	63	352	4.96
56	4	0.093	0.907	70	64	289	4.13
57	6	0.016	0.984	64	60	225	3.52
58	10	0.031	0.969	63	57	165	2.62

59	3	0.014	0.986	61	51	108	1.77
60	1	0.005	0.995	60	57	57	0.95

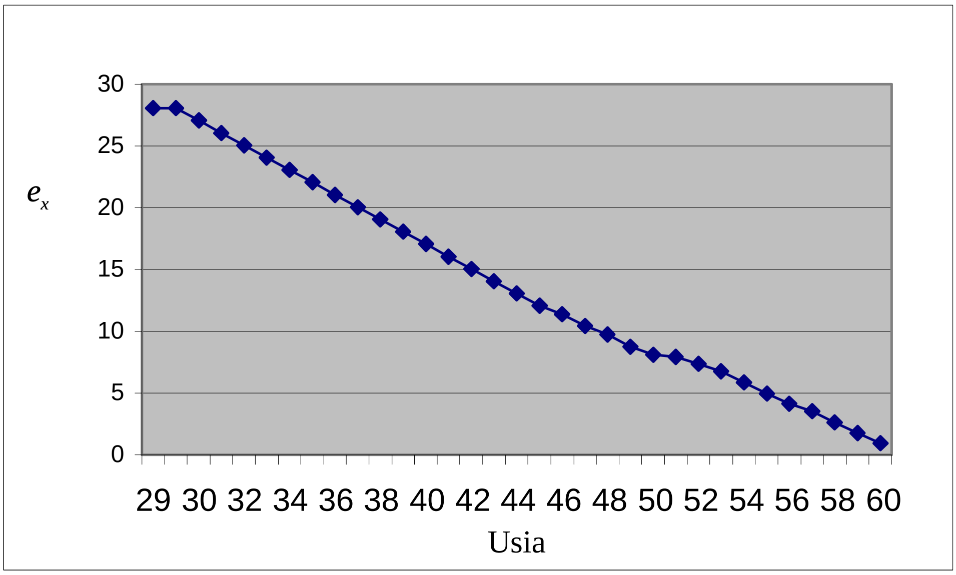
Untuk melihat pola kematian, nilai-nilai yang dinyatakan pada tabel 4.2.4 dibuat suatu grafik, seperti di bawah ini



Gb. 4.1 Perubahan Jumlah Individu per Tahun



Gb. 4.2. Probabilitas Kematian Individu Dalam Interval *(x,x+1)*



Gb. 4.3. Harga Harapan Individu Dalam Interval *(x,x+1)*

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan pada bab IV, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Persamaan likelihood yang menunjukkan probabilitas suatu individu berusia x mengalami kegagalan (kematian) sampai usia $x+1$ tahun adalah

$$(rsn_x)q_x^3 + \left[(k_x - e_x - d_x)rs + (e_x - n_x)r - (n_x + k_x)s\right]q^2$$
$$+\left[(d_x - k_x)r + (d_x + e_x)s + n_x + k_x - e_x\right]q_x - d_x = 0$$

   dengan ketentuan sebagai berikut:

   a. Jika populasi tergolong ke dalam kasus 1 maka $r_i = 0$ untuk semua individu dalam $n_k + k_x$ dan jika $t_i = 1$ untuk semua individu dalam $n_x + k_x - d_x$.

   b. Jika populasi tergolong ke dalam kasus 2 maka $t_i = 1$ untuk semua $n_x + k_x - d_x$, $r_i = 0$ untuk n_x (jumlah individu pada awal interval) dan $r_i > 0$ untuk semua k_x (peserta baru dalam interval estimasi)

   c. Jika populasi tergolong ke dalam kasus 3 maka $r_i = 0$ untuk semua individu, $t_i = s$ untuk semua pengakhir dan $t_i = 1$ untuk semua $n_x - e_x - d_x$ *survivors*.

   d. Jika populasi tergolong ke dalam kasus 4 maka $r_i = 0$ untuk n_x (jumlah anggota di awal interval estimasi), $r_i = r$ untuk k_x (jumlah peserta batu dalam interval estimasi), $t_i = s$ untuk semua e_x (pengakhir) dan $t_i = 1$ untuk semua $n_x + k_x - e_x - d_x$ *survivors.*

2. *Iife table* untuk individu dalam interval waktu satu tahun adalah

x	d_x	q_x	p_x	l_x	L_x	T_x	e_x

5.2 Saran

Penulisan ini dapat dikembangkan untuk perhitungan probabilitas untuk interval waktu yang berbeda. Selain itu, dapat dikembangkan untuk mengkonstruksi fungsi-fungsi *life table* lainnya, sehingga lebih berguna dalam memberikan informasi bagi perusahaan-perusahaan dalam pengambilan keputusan yang berhubungan dengan data waktu hidup

DAFTAR PUSTAKA

Bain, L.J., and Engelhardt. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, PWS-KENT Publishing Company, California.

Elandts-Johnson, R.C.and Norman L.J. (1979). *Survival Models and Data, Analysis*, John Wiley and Sons, Inc, New York

Lawless, J.F. (1982). *Statistics Model and Methods for Lifetime Data Analysis,* John Wiley and Sons, Inc, New York.