KETERCAPAIAN DARI RUANG EIGEN MATRIKS ATAS ALJABAR MAKS PLUS

oleh

TRI ANGGORO PUTRO
M0112100

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan
memperoleh gelar Sarjana Sains Matematika

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SEBELAS MARET
SURAKARTA

2017

KETERCAPAIAN DARI RUANG EIGEN MATRIKS ATAS

ALJABAR MAKS PLUS

SKRIPSI

TRI ANGGORO PUTRO

M0112100

dibimbing oleh

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. Siswanto, M.Si.	Supriyadi Wibowo, M.Si.
NIP. 19670813 199203 1 002	NIP. 19681110 199512 1 001

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji

dan dinyatakan telah memenuhi syarat

pada hari Kamis, 13 Juli 2017

Dewan Penguji

Jabatan	Nama dan NIP	Tanda Tangan	Tanggal
Ketua	Vika Yugi Kurniawan, S.Si., M.Sc. NIP. 19870701 201504 1 001	.....	27-7-17
Sekretaris	Drs. Pangadi, M.Si. NIP. 19571012 199103 1 001	.....	27-7-17
Anggota Penguji	Drs. Siswanto, M.Si. NIP. 19670813 199203 1 002	.....	27-7-17
	Supriyadi Wibowo, M.Si. NIP. 19681110 199512 1 001	.....	27-7-17

Disahkan

di Surakarta pada tanggal 27 JUL 2017

Kepala Program Studi Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Sebelas Maret Surakarta

Supriyadi Wibowo, M.Si.

NIP. 19681110 199512 1 001

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul "Ketercapaian dari Ruang Eigen Matriks atas Aljabar Maks-Plus" belum pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan pada suatu perguruan tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga belum pernah ditulis atau dipublikasikan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pembaca.

Surakarta, Juli 2017

Tri Anggoro Putro

ABSTRAK

Tri Anggoro Putro, 2017. KETERCAPAIAN RUANG EIGEN MATRIKS ATAS ALJABAR MAKS-PLUS. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret.

Aljabar maks-plus merupakan suatu himpunan $\overline{R} = R \cup \{\varepsilon\}$ yang dilengkapi dengan dua operasi yaitu $\oplus$ dan $\otimes$, dengan $a \oplus b = \text{maks}\{a, b\}$ dan $a \otimes b = a + b$. Himpunan matriks berukuran $m \times n$ atas aljabar maks-plus dinotasikan sebagai $\overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$. Suatu matriks A dikatakan tak tereduksi jika graf *precedence* $\mathcal{G}(A)$ terhubung kuat. Sebaliknya, jika graf *precedence* $\mathcal{G}(A)$ tidak terhubung kuat, maka matriks tersebut tereduksi. Matriks $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n\times n}$ dikatakan tervisualisasi jika $a_{ij} \leq \lambda(A)$ untuk setiap $i, j \in N$ dan $a_{ij} = \lambda(A)$ untuk setiap $(i, j) \in E(A)$. Suatu matriks tervisualisasi kuat apabila $a_{ij} = \lambda(A)$ jika dan hanya jika $(i, j) \in E(A)$. Pada penelitian ini, dibahas mengenai proyektor spektral, kelas-kelas siklis dan perilaku khusus dari matriks berpangkat, dan penyelesaian ketercapaian. Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa suatu matriks Q dikatakan proyektor spektral dari A apabila memenuhi $A \otimes Q = Q \otimes A = Q = Q^2$. Proyektor spektral $Q = A^r$ akan periodik ketika nilai $r \geq n^2$. Jika matriks A adalah suatu matriks definit dan tak tereduksi maka semua baris (atau kolom) dari A^r yang termuat di kelas siklis yang sama adalah bernilai sama. Ruang eigen matriks A disebut tercapai apabila orbit $O(A, x)$ memuat vektor eigen dari matriks A.

Kata kunci: *aljabar maks-plus, ruang eigen, proyeksi spektral, kelas siklis, ketercapaian*

ABSTRACT

Tri Anggoro Putro, 2017. REACHABILITY OF EIGENSPACES IN MAX-PLUS ALGEBRA. Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Sebelas Maret University.

Max-plus algebra is a set $\overline{R} = R \cup \{\varepsilon\}$ equipped with two operations $\oplus$ and $\otimes$, where $a \oplus b = \max\{a, b\}$ and $a \otimes b = a + b$. The set of matrices $m \times n$ in max-plus algebra is denoted by $\overline{\mathbb{R}}^{m \times n}$. Matrix A is called irreducible if precedence graph $\mathcal{G}(A)$ is strongly connected, if precedence graph $\mathcal{G}(A)$ is not strongly connected, then the matrix is called reducible. Matrix $A = (a_{ij}) \in \overline{\mathbb{R}}^{n \times n}$ is called visualized if $a_{ij} \leq \lambda(A)$ for all $i, j \in N$ and $a_{ij} = \lambda(A)$ for all $(i, j) \in E(A)$. A visualized matrix is called strictly visualized if $a_{ij} = \lambda(A)$ if and only if $(i, j) \in E(A)$. In this research, is discussed about spectral projector, cyclic classes and ultimate behavior of matrix powers, and solving reachability. Based on the result and discussion can be concluded that matrix Q is called spectral projector on A such that $A \otimes Q = Q \otimes A = Q = Q^2$. Spectral projector $Q = A^r$ will be periodic when $r \geq n^2$. If matrix A is definite and irreducible then all rows (or colomns) of A^r with indices in the same cyclic class are equal. Eigenspaces of matrix A is called reachable if orbit $O(A, x)$ contains eigenvector of matrix A.

Keywords : *max-plus algebra, eigenspaces, spectral projector, cyclic classes, reachability*

MOTO

"Keistimewaan dalam kehidupan adalah menjadi dirimu sendiri."

(Joseph Campbell)

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."

(QS. Al-Insyirah : 6)

PERSEMBAHAN

Karya ini kupersembahkan untuk
ibu, bapak, dan kakak - kakak saya.

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim,

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini. Sholawat serta salam selalu dihaturkan kepada Nabi Muhammad SAW. Penulis menyadari bahwa terwujudnya skripsi ini berkat bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada

1. Drs. Siswanto, M.Si. dan Supriyadi Wibowo, M.Si. sebagai Pembimbing I dan II yang telah memberikan bimbingan materi serta penulisan dalam skripsi, saran, dan motivasi, dan

2. semua pihak yang telah memberikan bantuan, masukan, dan dukungan kepada penulis.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pembaca.

Surakarta, Juli 2017

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR NOTASI

$\mathbb{R}$	:	himpunan bilangan real
$\overline{\mathbb{R}}$	:	$\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$
$\oplus$	:	operasi maksimum pada aljabar maks plus
$\otimes$	:	operasi jumlah pada aljabar maks plus
ε	:	elemen identitas untuk $\oplus$ dengan $\varepsilon = -\infty$
e	:	elemen identitas untuk $\otimes$ dengan $e = 0$
$\overline{\mathbb{R}}^{m\times n}$	:	himpunan matriks berukuran $m \times n$ dengan elemen $\overline{\mathbb{R}}$
E_n	:	matriks identitas berukuran $n \times n$ dalam aljabar maks plus
A^T	:	transpose dari matriks A
$A^{\otimes k}$	:	$A \otimes A \otimes \ldots \otimes A$ (A sebanyak k)
$\mathcal{G}(A)$	:	graf berarah dari matriks A
$I(\mathcal{G})$	:	himpunan yang beranggotakan titik-titik (*nodes*) pada graf berarah $\mathcal{G}(A)$
$E(\mathcal{G})$	:	himpunan yang beranggotakan *arcs* pada graf berarah $\mathcal{G}(A)$
π	:	lintasan (path) pada graf berarah $\mathcal{G}(A)$
$\omega(\pi)$	:	bobot dari lintasan π
$\omega(\sigma, A)$	:	bobot lintasan σ pada $\mathcal{G}(A)$
$\mu(\sigma, A)$	:	rata-rata *cycle* σ pada $\mathcal{G}(A)$
$\lambda(A)$	:	nilai eigen terbesar dari matriks A
$N_c(A)$	:	node eigen atau node kritis di A
$C(A)$	:	*cycle* kritis di A
$E_c(A)$	:	himpunan semua *arc* dari semua *cycle* kritis di A
$V(A)$	:	ruang eigen dari matriks A
$\sigma(A)$	:	*cyclicity* matriks A
$\sigma(\mathcal{G}(A))$	:	*cyclicity* graf berarah $\mathcal{G}(A)$

A_{ii}	:	submatriks dari matriks A pada diagonal ke-i
$a_{ij}^{(r)}$	:	elemen dari matriks A^r
a_{ij}^r	:	pangkat ke-r dari a_{ij}
$\varepsilon^{n\times 1}$	:	matriks berukuran $n \times 1$ dengan elemennya bernilai ε
$Q(A)$	:	proyektor spektral dari matriks A
$Q_i(A)$	:	proyektor spektral elementer ke-i dari matriks A
A^*	:	matriks Kleene Star
$T(A)$	:	transien dari A^k
$[i]$	:	kelas siklis yang memuat node i
$O(A, x)$	:	orbit dari matriks A dengan vektor awal x
$Attr(A, p)$	:	ruang *p-attraction* dari matriks A