

# MODEL *SIR* DENGAN IMIGRAN DAN VAKSINASI



oleh

NANANG MUALIM

NIM. M 0105053

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan  
memperoleh gelar Sarjana Sains Matematika

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

SURAKARTA

2009

SKRIPSI  
MODEL *SIR* DENGAN IMIGRAN DAN VAKSINASI

yang disusun oleh  
NANANG MUALIM  
NIM. M0105053

dibimbing oleh

Pembimbing I

Dra. Purnami Widyaningsih, M.App.Sc.

NIP. 131 695 204

Pembimbing II

Drs. Siswanto, M.Si.

NIP. 132 000 805

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji  
pada hari Jumat, tanggal 23 Januari 2009  
dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Anggota Tim Penguji

1. Sri Kuntari, M.Si.

NIP. 132 240 173

2. Dr. Sutanto, DEA

NIP. 132 149 079

3. Dra. Etik Zukhronah, M.Si.

NIP. 132 000 009

Tanda Tangan

1. ....

2. ....

3. ....

Disahkan oleh

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dekan

Ketua Jurusan Matematika

Prof. Drs. Sutarno, M.Sc, Ph.D

NIP. 131 649 948

Drs. Kartiko, M.Si.

NIP. 131 569 203

## MOTO

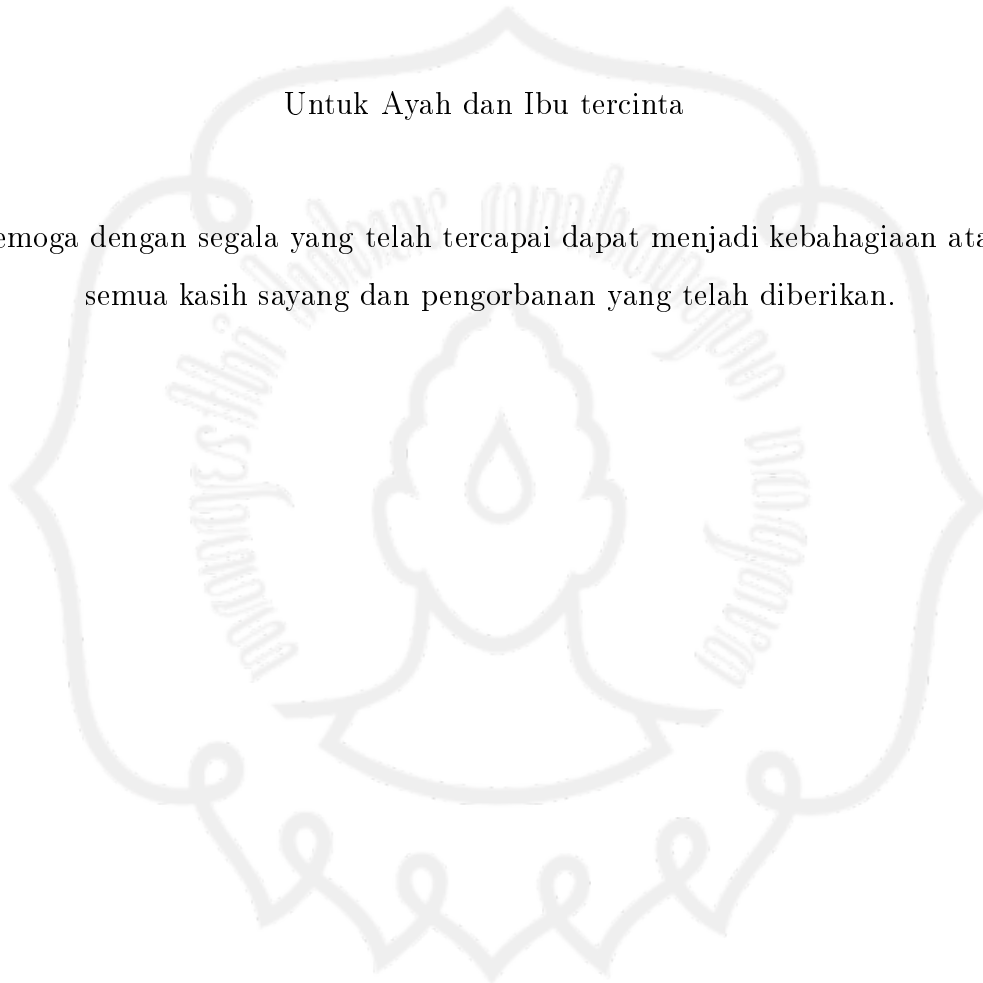
Kerjakan, yang bisa kau kerjakan hari ini.



## PERSEMBAHAN

Untuk Ayah dan Ibu tercinta

Semoga dengan segala yang telah tercapai dapat menjadi kebahagiaan atas semua kasih sayang dan pengorbanan yang telah diberikan.



## ABSTRAK

Nanang Mualim, 2009. MODEL *SIR* DENGAN IMIGRAN DAN VAKSINASI. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret.

Model *SIR* merupakan model matematika yang dapat digunakan untuk menggambarkan penyebaran penyakit infeksi. Ada dua model *SIR* klasik, yaitu model *SIR* epidemik dan endemik. Kedua model *SIR* klasik digunakan untuk menggambarkan penyebaran penyakit pada suatu wilayah dengan populasi tertutup sehingga faktor imigran diabaikan. Namun, pada kota-kota besar, imigran turut memberikan pengaruh dalam penyebaran penyakit infeksi. Penyebaran penyakit ini dapat dicegah melalui program vaksinasi.

Tujuan dari penulisan ini adalah menurunkan ulang model *SIR* dengan pengaruh imigran dan vaksinasi, serta menentukan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan (interpretasi model). Metode yang digunakan pada penulisan skripsi ini adalah studi literatur.

Model *SIR* merupakan sistem *autonomous*, berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear orde satu. Untuk mengamati perilaku sistem diperlukan konsep kestabilan di titik kesetimbangan. Dengan metode linearisasi, kestabilan sistem dapat ditentukan berdasarkan kriteria nilai eigen dari matriks Jacobian. Ada dua macam titik kesetimbangan pada model *SIR* dengan imigran dan vaksinasi, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh jika tidak terdapat individu yang terinfeksi ketika laju perubahannya nol. Sedangkan titik kesetimbangan endemik diperoleh jika terdapat individu yang terinfeksi dalam populasi saat laju perubahannya nol. Pada contoh kasus, titik kesetimbangan yang diperoleh adalah titik kesetimbangan endemik. Keparahan dari penyakit diukur berdasarkan puncak endemik, yaitu jumlah maksimal individu yang terinfeksi. Eksperimen numerik menunjukkan bahwa puncak endemik dapat diturunkan dengan menurunkan laju kontak, menaikkan laju kesembuhan, serta menaikkan laju vaksinasi.

# ABSTRACT

Nanang Mualim, 2009. *SIR WITH IMMIGRANT MODEL AND VACCINATION*. Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Sebelas Maret University.

The spreading of infectious diseases can be explained by mathematical models. The models used are *SIR* models. There are 2 *SIR* classic models, epidemic and endemic *SIR* model. These models are used to describe the infectious diseases in a closed area. So, the immigrant factor is ignored. In fact, the immigrant is a significant factor in spreading of diseases. A vaccination is a treatment believed to reduce the infected individuals.

Here, we re-derive *SIR* with immigrant models. We also find equilibrium points, analyze the equilibrium points and interpret the model. The method used in this research is literature study.

The *SIR* models are autonomous system and are given as system of differential equations. A behaviour outbreaks of infectious diseases can be observed by stability in the equilibrium point. Stability analysis is given as eigenvalues from Jacobian matrix computed by linearisation method. There are 2 equilibrium points in the model, a disease-free equilibrium and an endemic equilibrium. The disease-free equilibrium is obtained if there is no individual infected whereas the endemic equilibrium obtained if there are still individuals infected. In this example, the equilibrium obtained is an endemic equilibrium and asymptotically stable. The level of seriousness endemic is measured by an endemic peak. The endemic peak is a situation which the number of individual infected reaches the maximum. The numerical experiments show that to decrease the endemic peak that can be obtained by decreasing a contact rate, increasing a recovery rate and increasing a vaccination rate.

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT. Dengan segala rahmat dan hidayah-Nya, akhirnya penulisan skripsi ini dapat diselesaikan.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis memperoleh bantuan dari berbagai pihak. Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada

1. Ibu Dra. Purnami WID dan Bapak Drs. Siswanto, M.Si. sebagai Pembimbing I dan Pembimbing II, atas kesabaran dan ketekunannya memberikan pengarahan dan petunjuk dalam penyelesaian skripsi ini,
2. Ibu Sri Kuntari, M.Si. dan Ibu Dra. Respatiwulan, M.Si. sebagai dosen dalam tim riset yang telah memberikan kesempatan berbagi pengalaman dalam melakukan riset, memberikan motivasi dan saran dalam penulisan skripsi ini,
3. Susilo Nugroho, Fajar, Rina, Budi Pras dan Ajeng yang telah memberikan bantuan, masukan dan dukungan kepada penulis.

Semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pembaca.

Surakarta, Januari 2009

Penulis

## DAFTAR ISI

JUDUL . . . . .	i
PENGESAHAN . . . . .	ii
MOTO . . . . .	iii
PERSEMBAHAN . . . . .	iv
ABSTRAK . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vi
KATA PENGANTAR . . . . .	vii
DAFTAR ISI . . . . .	viii
DAFTAR TABEL . . . . .	x
DAFTAR GAMBAR . . . . .	xi
<b>I PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang Masalah . . . . .	1
1.2 Perumusan Masalah . . . . .	4
1.3 Batasan Masalah . . . . .	4
1.4 Tujuan . . . . .	5
1.5 Manfaat Penelitian . . . . .	5
<b>II LANDASAN TEORI</b>	<b>6</b>
2.1 Tinjauan Pustaka . . . . .	6
2.1.1 Pemodelan Matematika . . . . .	6
2.1.2 Sistem <i>Autonomous</i> dan Bidang Fase . . . . .	6
2.1.3 Model <i>SIR</i> Klasik . . . . .	7
2.1.4 Keseimbangan dan Kestabilan . . . . .	8



2.1.5	Metode Linearisasi . . . . .	10
2.2	Kerangka Pemikiran . . . . .	11
<b>III METODE PENELITIAN</b>		<b>13</b>
<b>IV PEMBAHASAN</b>		<b>14</b>
4.1	Konstruksi Model . . . . .	14
4.2	Keseimbangan Model . . . . .	17
4.3	Rasio Reproduksi Dasar . . . . .	18
4.4	Analisis Kestabilan . . . . .	19
4.4.1	Kestabilan di Titik Keseimbangan $E_1$ . . . . .	19
4.4.2	Kestabilan di Titik Keseimbangan $E_2$ . . . . .	20
4.5	Penerapan Kasus . . . . .	20
<b>V PENUTUP</b>		<b>28</b>
5.1	Kesimpulan . . . . .	28
5.2	Saran . . . . .	29
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>		<b>30</b>

## DAFTAR TABEL

2.1	Kriteria kestabilan berdasarkan nilai eigen . . . . .	11
4.1	Proporsi individu <i>infected</i> di 5 titik tertinggi . . . . .	23
4.2	Nilai puncak endemik dengan simulasi variasi nilai $\alpha$ . . . . .	25
4.3	Nilai puncak endemik dengan simulasi variasi nilai $\beta$ . . . . .	26
4.4	Nilai puncak endemik dengan simulasi variasi nilai $\sigma_1$ . . . . .	26

## DAFTAR GAMBAR

2.1	Tipe kestabilan dari titik kesetimbangan . . . . .	12
4.1	Dinamika populasi dalam model <i>SIR</i> dengan imigran dan vaksinasi	15
4.2	Proporsi individu <i>susceptible</i> (garis tebal), <i>infected</i> (garis tipis), dan <i>recovered</i> (garis putus-putus) . . . . .	22
4.3	Trayektori individu <i>susceptible</i> , <i>infected</i> . . . . .	24

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika dapat diterapkan untuk mempelajari fenomena yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Dalam bidang biologi maupun kedokteran, matematika dapat digunakan untuk mengamati perilaku penyebaran suatu penyakit infeksi. Menurut Lewis [14] perilaku tersebut dapat digambarkan melalui pemodelan matematika.

Sebagaimana dituliskan Hethcote [11], model matematika mempunyai peranan penting dalam menganalisis penyebaran dan kontrol penyakit infeksi. Dalam memformulasikan model, diperlukan proses klarifikasi asumsi, batasan dan parameter yang berpengaruh. Bersama dengan model, simulasi komputer merupakan alat eksperimen yang berguna untuk mengembangkan dan menguji secara teori, menaksir secara kuantitatif, menjawab pertanyaan spesifik, menentukan sensitivitas perubahan nilai parameter, dan mengestimasi parameter kunci dari data. Dengan mengetahui karakteristik penyebaran penyakit infeksi dalam suatu komunitas, wilayah atau pun negara, dapat dilakukan pendekatan yang lebih baik dalam menurunkan penyebaran penyakit infeksi tersebut. Model matematika digunakan untuk membandingkan, merencanakan, mengimplementasi, mengevaluasi dan mengoptimasi beberapa variasi deteksi, pencegahan, terapi dan kontrol program. Model epidemiologi memberikan kontribusi dalam mendesain dan menganalisis survei epidemiologi, memberikan saran tentang data penting yang sebaiknya dikumpulkan, dikelompokkan, dibuat ramalan umum dan dilakukan estimasi ketidakpastian dalam penerapan.

Fenomena penyebaran penyakit infeksi dapat digambarkan melalui model *Suceptible Infected Recovered (SIR)*. Sesuai dengan namanya, dalam model ini

populasi dikelompokkan ke dalam 3 kelas, *susceptible*, *infected* dan *recovered*. Model *SIR* merupakan model pengelompokan standar yang digunakan dalam menggambarkan beberapa penyakit. Penyakit yang dimaksud antara lain influenza, polio, *smallpox*, *measles*, *mumps*, *rubella* dan *chicken pox*. Model *SIR* pertama kali diperkenalkan oleh O. Kermack dan Anderson Gray McKendrick (Weisstein [20]). Model matematika ini berbentuk sistem persamaan diferensial orde satu.

Menurut Hethcote [11], ada dua model *SIR* klasik, yaitu model *SIR* epidemik dan model *SIR* endemik. Model *SIR* epidemik digunakan untuk menggambarkan penyebaran penyakit ketika proses kejadiannya cepat (kurang dari satu tahun). Sedangkan model *SIR* endemik digunakan pada penyebaran penyakit dalam jangka waktu yang lama.

Model *SIR* epidemik tidak memuat *vital dynamic*. Dalam hal ini, populasi bersifat tertutup. Dilihat dari jangka waktunya yang sangat singkat, pada model *SIR* epidemik, faktor kelahiran dan kematian tidak diperhatikan. Dengan demikian, jumlah populasi adalah konstan.

Tidak semua penyakit infeksi menyebar dalam waktu yang singkat. Ada penyakit-penyakit tertentu seperti *measles*, *mumps*, *rubella*, dan *poliomyelitis*, penyebarannya terjadi dalam jangka waktu yang lama. Keadaan yang demikian disebut endemik. Karena terjadi dalam jangka waktu lama, perlu diperhatikan faktor kelahiran dan kematian dalam populasi. Model yang digunakan untuk menggambarkan keadaan ini adalah model *SIR* endemik. Diasumsikan laju kelahiran seimbang dengan laju kematian, sehingga jumlah populasi konstan.

Keefektifan dari perbaikan sanitasi, antibiotik, dan program vaksinasi menimbulkan kepercayaan bahwa penyakit infeksi dapat dikurangi keberadaannya. Tetapi, penyakit infeksi telah berlanjut menjadi kasus mayor dan penyebab kematian di negara-negara berkembang. Bahkan, penyakit infeksi telah beradaptasi dan berkembang menjadi penyakit infeksi yang baru. Manusia ataupun in-vansi binatang pada ekosistem baru, pemanasan global, degradasi lingkungan, meningkatnya perjalanan internasional, dan perubahan pola ekonomi secara kon-

tinu akan memberikan kesempatan munculnya penyakit infeksi dan penyakit baru (Hethcote [11]).

Piccolo dan Billings [13] menyatakan bahwa penyakit pada anak-anak merupakan permasalahan yang dihadapi setiap negara. Penyakit seperti *measles*, *mumps*, *rubella* dan *pertussis* sekarang ini melanda di sebagian besar dunia. Penyakit-penyakit infeksi ini masih menjadi endemik.

Masih menurut Piccolo dan Billings [13], di kota-kota besar, faktor imigran turut memberikan pengaruh dalam penyebaran penyakit. Dalam hal ini, imigran diartikan sebagai suatu penduduk yang memasuki wilayah populasi baru (kota, pulau, atau negara). Penyakit ini dibawa oleh penduduk melalui imigrasi. Penyakit akan menyebar ke tempat-tempat pemukiman penduduk. Selanjutnya, Shim [19] juga menyatakan bahwa faktor imigran memegang peranan penting dalam penyebaran penyakit. Penyebaran ini akan terus meningkat dan berpeluang menjadi endemik.

Perkembangan dalam bidang teknologi dan kedokteran membawa harapan baru untuk mencegah penyebaran penyakit infeksi. Berdasarkan data WHO [21], penyebaran penyakit-penyakit seperti *measles*, *mumps*, *rubella*, dan *poliomyelitis* dapat ditekan melalui program vaksinasi. Vaksinasi diberikan kepada individu *susceptible* sehingga individu yang telah divaksin akan kebal dan tidak akan terinfeksi. Program vaksinasi dipercaya sebagai cara yang efektif dalam menekan penyebaran penyakit infeksi.

Model *SIR* klasik endemik sesuai diterapkan pada suatu wilayah dengan laju migrasi kecil sehingga faktor imigran tidak diperhatikan. Dalam hal ini, dinamika populasi penduduk hanya dipengaruhi secara signifikan oleh faktor kelahiran dan kematian. Model *SIR* tanpa pengaruh imigran telah dipelajari oleh Nugroho [16]. Pada suatu wilayah dengan laju migrasi yang tinggi, faktor imigran juga memberikan pengaruh terhadap penyebaran penyakit infeksi, terutama apabila penyakit tersebut dibawa dari luar wilayah. Pengaruh imigran pada model *SIR* sedang dipelajari oleh Budiantoro [3]. Melihat pentingnya program vaksinasi dan pengaruh imigran pada penyebaran penyakit infeksi, perlu dikembangkan model

*SIR* yang memperhatikan faktor imigran dan program vaksinasi.

Model *SIR* klasik berbentuk sistem persamaan diferensial. Untuk mengetahui perilaku sistem di setiap titik, diperlukan penyelesaian eksaknya. Menurut Grassly dan Fraser [8], tidak semua sistem persamaan diferensial dapat dicari penyelesaiannya eksaknya. Seandainya penyelesaian eksaknya diperoleh, perhitungannya juga sulit sehingga perilakunya juga sulit diamati.

Masih menurut Grassly dan Fraser [8], menjadi penting untuk dapat mengetahui tentang perlakuan dari penyelesaian sistem tanpa harus mencari penyelesaian eksaknya. Informasi penting yang dicari adalah kestabilan dari titik kesetimbangan. Dengan demikian, diperlukan kestabilan dari titik kesetimbangan dari sistem untuk dapat mengamati perilaku sistem.

Model *SIR* dengan memperhatikan faktor kelahiran, kematian, imigran dan pengaruh program vaksinasi telah dituliskan Picollo dan Billings [13]. Lebih lanjut, model tersebut akan dikaji ulang dalam skripsi ini.

## 1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan dapat diangkat 3 perumusan masalah sebagai berikut.

1. Bagaimana menurunkan ulang model *SIR* dengan memperhatikan faktor kelahiran, kematian, imigran dan pengaruh program vaksinasi?
2. Bagaimana menentukan titik kesetimbangan dan melakukan analisis tipe kestabilan?
3. Bagaimana menginterpretasikan model?

## 1.3 Batasan Masalah

Dalam penulisan ini permasalahan dibatasi pada masa inkubasi inkubasi penyakit. Dalam hal ini, masa inkubasi diabaikan sehingga individu yang terinfeksi langsung dapat menularkan ke individu yang rawan tertular.

## 1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah

1. dapat menurunkan ulang model *SIR* dengan memperhatikan faktor kelahiran, kematian, imigrasi dan pengaruh program vaksinasi,
2. dapat menentukan titik kesetimbangan dan melakukan analisis tipe kestabilan,
3. dapat menginterpretasikan model.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah mengetahui secara matematis pengaruh dari program vaksinasi terhadap penyebaran penyakit infeksi, di mana terjadinya pada suatu wilayah dengan faktor imigran yang signifikan. Dengan model yang diperoleh, dapat dilakukan suatu pendekatan pada parameter-parameter yang berpengaruh untuk menurunkan puncak endemik. Dengan demikian, dapat dibuat suatu langkah untuk mencegah penyebaran infeksi, salah satunya dengan program vaksinasi.



## BAB II

### LANDASAN TEORI

#### 2.1 Tinjauan Pustaka

Di sini diberikan definisi-definisi dan teori-teori relevan yang diperlukan untuk mencapai tujuan penulisan. Berikut ini diberikan definisi pemodelan matematika, sistem *autonomous* dan bidang fase, model *SIR* klasik, kesetimbangan dan kestabilan, dan metode linearisasi.

##### 2.1.1 Pemodelan Matematika

Menurut Meyer [15], pemodelan matematika adalah penggunaan bahasa matematika yang digunakan untuk mendeskripsikan kejadian di dunia nyata ke dalam bentuk matematika. Dengan pemodelan, suatu objek atau konsep diubah ke bentuk model matematika. Selanjutnya, model matematika tersebut merupakan model yang disusun oleh konsep-konsep matematika, seperti konstanta, variabel, fungsi, persamaan, pertidaksamaan, dan lain-lain.

##### 2.1.2 Sistem *Autonomous* dan Bidang Fase

Model matematika disusun untuk mendeskripsikan keadaan nyata ke bentuk matematika. Untuk menggambarkan keadaan yang berubah tiap satuan waktu, model dapat disusun dalam bentuk persamaan diferensial. Jika keadaan yang diamati lebih dari satu, model disusun sebagai sistem persamaan diferensial.

Bentuk umum sistem persamaan diferensial nonlinear orde satu dengan  $n$

fungsi adalah

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{2.1}$$

dengan  $f_i$  adalah fungsi nonlinear, untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ . Sistem (2.1) mempunyai penyelesaian jika untuk setiap  $f_i$  adalah fungsi kontinu. Sistem (2.1) disebut sistem *autonomous* jika variabel bebas  $t$  tidak muncul secara eksplisit (Boyce [2], Giordano *et al.* [5] dan Ross [18])

Selanjutnya, sistem (2.1) dapat diekspresikan dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\tag{2.2}$$

dengan  $\dot{\mathbf{x}} = \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$ ,  $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$  dan  $\mathbf{f} = f_1, f_2, \dots, f_n$ . Dalam hal ini, pasangan  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  disebut fase dan bidang yang dibentuk  $x_1, x_2, \dots, x_n$  disebut bidang fase. Kurva yang digambarkan oleh penyelesaian sistem (2.2) secara parameter dalam bidang fase disebut trayektori atau orbit.

### 2.1.3 Model *SIR* Klasik

Untuk menggambarkan epidemi penyakit infeksi dapat digunakan model *SIR*. Model ini berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear orde satu. Dalam model ini, populasi dibagi dalam 3 kelas, yaitu kelas *susceptible* yang merupakan kelompok individu rawan terinfeksi atau rawan terkena penyakit, kelas *infected* yang merupakan kelompok individu terinfeksi dan kelas *recovered* yang merupakan kelompok individu telah sembuh dari penyakit. Sedangkan  $S, I, R$  menyatakan jumlah individu masing-masing kelas *susceptible*, *infected* dan *recovered* (Hethcote [11] dan Iannelli [12]).

Masih menurut Hethcote [11], ada dua model klasik *SIR*, yaitu model epidemik dan model endemik. Secara matematika, model *SIR* merupakan sistem

*autonomous*. Bentuk model *SIR* epidemik menurut Hethcote [11] adalah

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\alpha SI}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\alpha SI}{N} - \beta I \\ \frac{dR}{dt} &= \beta I\end{aligned}\tag{2.3}$$

dengan  $\alpha$  adalah laju kontak individu *susceptible* dengan *infected* dan  $\beta$  adalah laju kesembuhan individu *infected*. Karena kejadiannya singkat, faktor kelahiran dan kematian tidak diperhatikan. Model ini digunakan pada populasi yang tertutup dengan tidak ada populasi yang masuk dan keluar. Dengan demikian jumlah penduduk adalah konstan sebanyak  $N$  dan memenuhi sifat  $S + I + R = N$ .

Tidak semua penyebaran penyakit terjadi dalam kurun waktu yang singkat. Ada penyakit-penyakit tertentu, misalnya penyakit pada anak-anak, yang kejadiannya berlangsung dalam jangka waktu yang lama. Keadaan yang demikian ini disebut endemik. Karena jangka waktunya lama, perlu diperhatikan faktor kelahiran dan kematian pada populasi. Dimisalkan,  $\mu$  adalah laju kelahiran dalam populasi. Diasumsikan laju kelahiran seimbang dengan laju kematian, sehingga jumlah populasi konstan. Model *SIR* endemik, menurut Hethcote [11] diekspresikan sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu N - \mu S - \frac{\alpha SI}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\alpha SI}{N} - \beta I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \beta I - \mu R.\end{aligned}$$

#### 2.1.4 Keseimbangan dan Kestabilan

Untuk mengamati perilaku sistem, diperlukan konsep keseimbangan dan kestabilan. Menurut Meyer [15], suatu sistem dinamis dikatakan dalam keadaan setimbang jika keadaan dalam sistem tersebut tidak ada perubahan sepanjang waktu. Dengan kata lain, suatu populasi dalam keadaan setimbang jika populasi tersebut tetap berada dalam ukuran yang sama.

Definisi keseimbangan dan kestabilan secara matematika dapat ditemukan dalam Bellomo dan Preziosi [1]. Definisi tersebut disajikan pada Definisi 2.1.1,

Definisi 2.1.2 dan Definisi 2.1.3.

**Definisi 2.1.1.** Jika  $\mathbf{x}_e$  adalah titik pada bidang fase yang memenuhi  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = 0$  dan derivatif  $\frac{d(\mathbf{x}_e)}{dt} = 0$  maka  $\mathbf{x}_e$  dikatakan titik kesetimbangan.

**Definisi 2.1.2.** Titik kesetimbangan  $\mathbf{x}_e$  dikatakan stabil jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $\delta(\varepsilon) > 0$  sedemikian sehingga untuk setiap nilai awal  $x(0)$  yang memenuhi

$$\|x(0) - x_e\| < \delta$$

berlaku

$$\|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

Jika tidak demikian maka tidak stabil.

**Definisi 2.1.3.** Titik kesetimbangan  $\mathbf{x}_e$  disebut stabil asimtotis jika titik tersebut stabil dan terdapat persekitaran  $N_\varepsilon$  sedemikian sehingga untuk  $x(0) \in N_\varepsilon$  berlaku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e.$$

Di sini diberikan juga konsep kestabilan sebagaimana dituliskan Finizio dan Ladas [7]. Stabil berarti bahwa perubahan kecil dalam sistem hanya akan menyebabkan pengaruh kecil pada penyelesaian. Sedangkan tidak stabil berarti bahwa perubahan tersebut mempunyai pengaruh besar dalam penyelesaian. Stabil asimtotis artinya pengaruh dari suatu perubahan kecil tersebut cenderung menghilang.

Lebih lanjut, kriteria kestabilan juga dapat diamati berdasarkan arah trayektori pada bidang fase, sebagaimana dituliskan Giordano *et al.* [5]. Titik kesetimbangan dikatakan stabil jika untuk sembarang syarat awal yang dekat dengan titik kesetimbangan, maka arah trayektori penyelesaian masih tetap dekat dengan penyelesaian di titik kesetimbangannya untuk sepanjang waktu  $t$ . Sebaliknya, titik kesetimbangan dikatakan tidak stabil jika untuk sembarang syarat awal yang diberikan, menghasilkan penyelesaian dengan arah trayektori yang menjauh dari titik tersebut. Titik kesetimbangan dikatakan stabil asimtotis jika titik tersebut stabil dan sembarang trayektori yang dekat dengan titik kesetimbangan, arahnya menuju titik kesetimbangan tersebut, untuk  $t$  menuju tak hingga.

## 2.1.5 Metode Linearisasi

Untuk mengetahui kriteria kestabilan dari titik kesetimbangan dapat digunakan konsep linearisasi. Menurut Bellomo dan Preziosi [1] serta Haberman [9], jika  $x_e$  adalah titik kesetimbangan sistem (2.2) maka untuk  $x$  yang dekat dengan  $x_e$ , fungsi  $\mathbf{f}$  dapat didekati dengan deret Taylor di sekitar  $x_e$

$$\mathbf{f}(x) \approx \mathbf{f}(x_e) + (x - x_e)\nabla\mathbf{f}_i(x_e) + O(x - x_e)^2.$$

Dari definisi kestabilan dan  $(x - x_e)$  merupakan perubahan yang kecil dari keadaan setimbang, suku-suku dengan orde yang lebih tinggi dapat diabaikan. Sehingga sistem (2.2) dapat didekati dengan bentuk linear

$$\dot{\mathbf{x}} = J(x_e)(x - x_e)$$

dengan

$$J(x_e) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_e) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_e) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_e) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_e) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_e) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_e) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_e) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_e) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_e) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

adalah matriks Jacobian dari fungsi  $\mathbf{f}$ . Masih menurut Bellomo dan Preziosi [1] serta Haberman [9], kestabilan dari sistem linear dapat ditentukan dengan mencari nilai eigen dari  $J(x_e)$ .

Nilai eigen matriks Jacobian (2.4) dapat bernilai positif, negatif, bertanda sama atau pun tidak sama, bilangan real atau pun kompleks. Berikut ini diberikan kriteria kestabilan menurut Bellomo dan Preziosi [1], Farlow [6] dan Ross [18] yang disajikan pada Teorema 2.1.1 dan Tabel 2.1.

**Teorema 2.1.1.** *Jika  $\lambda_i$  adalah nilai eigen dari matriks Jacobian  $J(x)$  yang dievaluasi pada titik kesetimbangan  $(x_e)$  dan  $Re(\lambda_i)$  adalah real dari  $\lambda_i$  maka*

1. *untuk setiap  $Re(\lambda_i) < 0, x_e$  disebut stabil asimtotis,*
2. *untuk setiap  $Re(\lambda_i) > 0, x_e$  disebut tidak stabil asimtotis.*

Tabel 2.1. Kriteria kestabilan berdasarkan nilai eigen

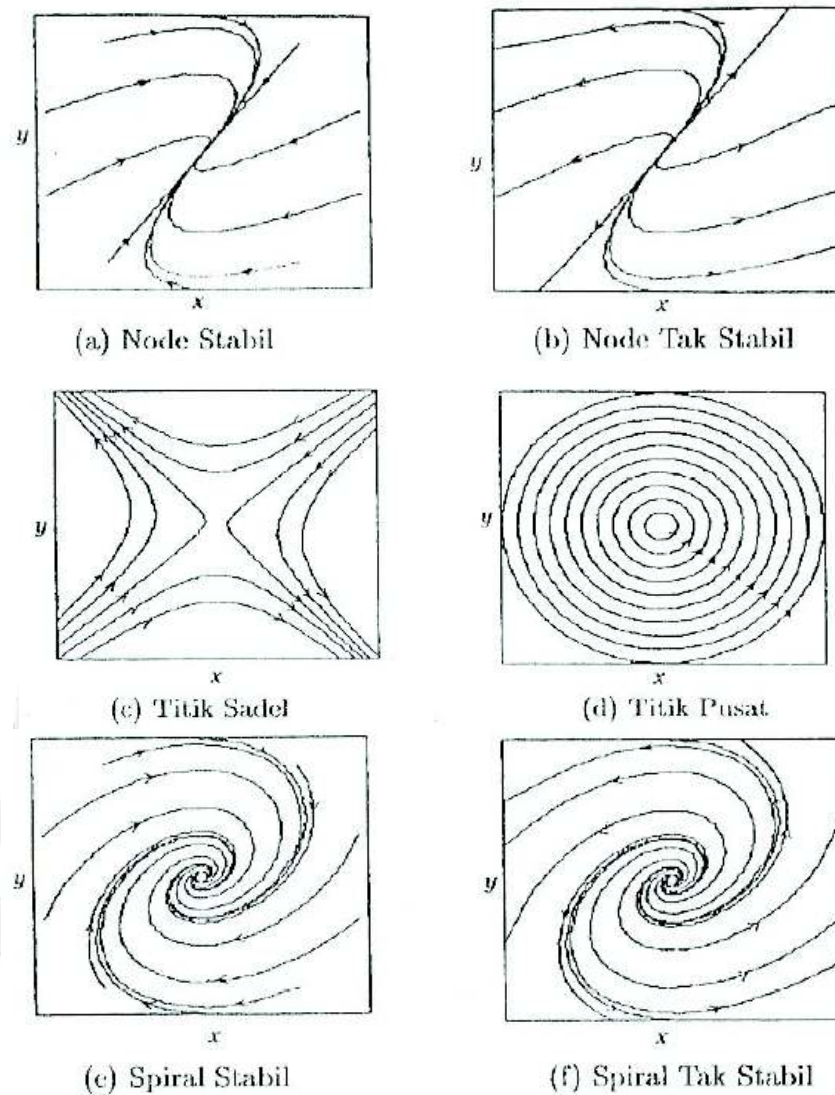
Nilai eigen	Nama	Kestabilan
real, tidak sama, bertanda sama	simpul	stabil asimtotis: semuanya negatif tidak stabil: semuanya positif
real, tidak sama, berlawanan tanda	sadel	tidak stabil
real, sama	simpul	stabil asimtotis: semuanya negatif tidak stabil: jika semuanya positif
kompleks konjugate bukan imajiner murni	spiral	stabil asimtotis: bagian real negatif tidak stabil: bagian real positif
imajiner murni	pusat	stabil (tidak asimtotis)

Di sini diberikan 6 gambar trayektori tipe kestabilan dari titik kesetimbangan yang dapat dilihat pada Gambar 2.1.

## 2.2 Kerangka Pemikiran

Berdasarkan tinjauan pustaka dapat disusun kerangka pemikiran sebagai berikut. Penyakit infeksi merupakan penyakit yang dihadapi oleh sebagian besar negara di dunia ini. Penyakit ini dapat menjadi endemik dalam populasi yang berpotensi untuk efek penyebaran yang lebih luas, seperti kota-kota padat. Salah satu faktor yang berpengaruh dalam penyebaran penyakit infeksi ini adalah imigrasi. Dengan adanya imigran, penyebarannya dapat menjadi semakin luas dan berpotensi menjadi endemik. Penyebaran penyakit infeksi dapat dicegah melalui program vaksinasi. Vaksinasi merupakan cara efektif untuk menekan penyebaran penyakit infeksi. Untuk mendeskripsikan penyebaran penyakit infeksi ini, diperlukan pendekatan suatu model.

Model matematika yang dapat digunakan dalam penyebaran penyakit infeksi adalah model *SIR*. Model ini berupa sistem persamaan diferensial nonlinear orde satu. Untuk memperoleh model tersebut diperlukan batasan-batasan dan asumsi-asumsi yang ditentukan terlebih dahulu. Model *SIR* ini juga merupakan



Gambar 2.1. Tipe kestabilan dari titik kesetimbangan

sistem *autonomous*. Untuk mengetahui perilaku sistem diperlukan konsep kesetimbangan dan kestabilan. Namun, tidak mudah menentukan kestabilan dari titik kesetimbangan sistem persamaan diferensial nonlinear. Sehingga diperlukan metode linearisasi untuk pendekatan dengan sistem persamaan diferensial linear yang sesuai. Tipe kestabilan dapat diamati dengan menghitung nilai eigen dari matriks Jacobian yang dievaluasi pada titik kesetimbangan. Selanjutnya, model matematika ini diinterpretasikan ke dunia nyata dan diterapkan pada contoh kasus.

## BAB III

### METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur. Adapun langkah-langkah yang ditempuh sebagai berikut.

1. Mempelajari perilaku interaksi dan kejadian dalam populasi.
2. Menentukan batasan, asumsi dan parameter yang diperlukan.
3. Memformulasikan ulang model *SIR* berupa sistem persamaan diferensial nonlinear orde satu berdasarkan asumsi, batasan, dan parameter yang telah ditentukan.

Langkah (1)–(3) dilakukan untuk mencapai tujuan pertama.

4. Menentukan titik kesetimbangan dari model yang diperoleh dalam langkah (3) dengan menggunakan Definisi 2.1.1.
5. Menentukan kriteria kestabilan dari titik kesetimbangan menggunakan Teorema 2.1.1 dan Tabel 2.1.

Langkah (4)–(5) dilakukan untuk mencapai tujuan kedua.

6. Menentukan nilai-nilai parameter pada kasus yang diamati.
7. Menggambarkan grafik fungsi  $S$ ,  $I$  dan  $R$  untuk membantu mendeskripsikan perilaku model *SIR*.
8. Melakukan simulasi numerik dengan parameter yang bervariasi untuk menentukan puncak endemik.
9. Membandingkan hasil-hasil yang diperoleh pada langkah (8).
10. Menginterpretasikan hasil yang diperoleh.

Langkah (6)–(10) dilakukan untuk mencapai tujuan ketiga.



# BAB IV

## PEMBAHASAN

### 4.1 Konstruksi Model

Pada bagian ini diturunkan ulang model *SIR* dengan imigran dan vaksinasi. Penurunannya mengacu pada Picollo dan Billings [13]. Model ditulis dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinear orde satu.

Sebagaimana dituliskan Hethcote [11] dan Iannelli [12], dalam model epidemiologi, untuk menggambarkan penyebaran penyakit infeksi dapat dilakukan dengan cara mengelompokkan populasi ke dalam tiga kelas, yaitu *susceptible*, *infected*, dan *recovered*. Jadi, ada tiga variabel dasar untuk mengidentifikasi keadaan populasi dalam model epidemiologi, yaitu  $S(t)$  menyatakan banyaknya individu *susceptible* pada waktu  $t$ ,  $I(t)$  menyatakan banyaknya individu *infected* pada waktu  $t$ , dan  $R(t)$  menyatakan banyaknya individu *recovered* pada waktu  $t$ .

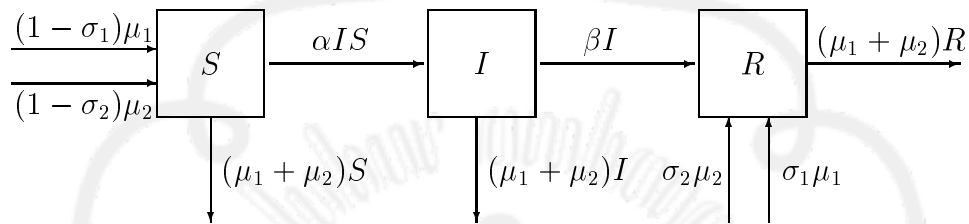
Dalam penurunan model, termasuk model epidemiologi, diperlukan asumsi-asumsi yang harus dipenuhi. Berikut ini diberikan asumsi-asumsi dasar dalam penurunan model epidemiologi, sebagaimana dituliskan oleh Hethcote [10].

1. Jumlah populasi dianggap konstan dan cukup besar. Sehingga ukuran tiap-tiap kelas dapat dianggap sebagai variabel kontinu. Jika model memuat *vital dynamic*, maka diasumsikan kelahiran dan kematian mempunyai laju yang sama.
2. Semua individu yang lahir adalah *susceptible*. Individu yang keluar dari tiap-tiap kelas melalui kematian mempunyai laju yang proporsional di setiap kelasnya.
3. Populasi bercampur secara homogen, artinya setiap individu mempunyai kemungkinan yang sama melakukan kontak dengan individu lain dalam

populasi.

Berdasarkan Hethcote [11], laju kematian dalam tiap-tiap kelas seimbang dengan kelahiran dan imigrasi sehingga jumlah populasinya konstan,  $N$ . Dengan demikian, laju kematian di tiap-tiap kelas adalah  $(\mu_1 + \mu_2)$ .

Dinamika populasi dalam model *SIR* dengan imigran dan vaksinasi disajikan pada Gambar 4.1. Nilai parameter dari  $N, \mu_1, \mu_2, \alpha$  dan  $\beta$  adalah positif. Batas dari laju vaksinasi adalah  $0 \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq 1$ .



Gambar 4.1. Dinamika populasi dalam model *SIR* dengan imigran dan vaksinasi

Berdasarkan asumsi yang telah ditentukan, dapat diturunkan model *SIR* dengan pengaruh faktor imigran dan vaksinasi. Dalam populasi, setiap tahunnya terjadi kelahiran dan imigran yang masuk dengan laju  $\mu_1$  dan  $\mu_2$ . Setiap individu yang lahir dan imigran yang masuk, dianggap rawan terinfeksi. Oleh karena itu, jumlah individu *susceptible* semakin bertambah. Untuk mencegah penyebaran penyakit yang lebih luas, dilakukan program vaksinasi terhadap setiap individu yang lahir, maupun imigran yang masuk, dengan laju vaksinasi  $\sigma_1$  dan  $\sigma_2$ . Dengan demikian, jumlah individu *susceptible* berkurang dan berpindah ke kelas *recovered* karena telah kebal. Penularan penyakit infeksi muncul jika terjadi kontak antara individu *infected* dengan *susceptible*. Individu yang terinfeksi berpindah kelas *infected*, sehingga jumlah individu *susceptible* berkurang, sedangkan jumlah individu *infected* bertambah. Laju kontak antara individu *susceptible* dengan *infected* adalah sebesar  $\alpha$ . Artinya, satu individu *infected* dapat menyebabkan  $\alpha S$  individu *infected* baru per hari. Jika terdapat  $I$  individu *infected*, maka rata-rata terdapat  $\alpha SI$  individu *infected* per hari. Jumlah individu *susceptible* juga

berkurang karena adanya kematian, dengan laju  $(\mu_1 + \mu_2)$ . Jika terdapat  $S$  individu *susceptible*, maka terdapat rata-rata  $(\mu_1 + \mu_2)S$  yang mati. Laju perubahan individu *susceptible* yang berukuran  $N$  setiap waktu dapat diekspresikan sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu_1 N + \mu_2 N - \sigma_1 \mu_1 N - \sigma_2 \mu_2 N - \alpha \frac{SI}{N} - (\mu_1 + \mu_2)S \\ &= (1 - \sigma_1)\mu_1 N + (1 - \sigma_2)\mu_2 N - \alpha \frac{SI}{N} - (\mu_1 + \mu_2)S.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Berdasarkan Gambar 4.1, pada kelas  $I$  terdapat individu yang masuk maupun keluar kelas. Individu yang masuk pada kelas *infected* berasal dari individu kelas *susceptible* yang telah terinfeksi. Sedangkan individu yang keluar dari kelas *infected* adalah individu yang telah sembuh ataupun individu yang telah mati. Berdasarkan persamaan (4.1), rata-rata banyaknya individu yang masuk ke kelas *infected* adalah  $\alpha SI$ . Laju kesembuhan adalah  $\beta$ , artinya rata-rata per hari terdapat  $\beta N$  individu yang sembuh (keluar dari kelas *infected*) dan masuk pada kelas *recovered*. Laju kematian adalah  $(\mu_1 + \mu_2)$ . Jadi, laju perubahan individu *infected* dalam setiap waktu dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \alpha \frac{IS}{N} - \beta I - (\mu_1 + \mu_2)I \\ &= \alpha \frac{IS}{N} - (\beta + \mu_1 + \mu_2)I.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Berdasarkan pembahasan pada kelas *susceptible* dan *infected*, terdapat individu *susceptible* dan *infected* yang berpindah ke kelas *recovered*. Jadi, terdapat penambahan  $(\sigma_1 \mu_1)N + (\sigma_1 \mu_2)N$  dari kelas *susceptible* dan  $\beta I$  dari kelas *infected*. Namun, terdapat juga laju kematian di kelas  $R$  sebesar  $(\mu_1 + \mu_2)$ . Dengan demikian, laju perubahan individu *recovered* dalam setiap satuan waktu adalah

$$\frac{dR}{dt} = (\sigma_1 \mu_1)N + (\sigma_1 \mu_2)N + \beta I - (\mu_1 + \mu_2)R. \quad (4.3)$$

Dari persamaan (4.1), (4.2) dan (4.3) diperoleh sistem persamaan nonlinear orde satu untuk menggambarkan model  $SIR$  dengan mempertimbangkan faktor imigran dan program vaksinasi. Model selengkapnya adalah

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= (1 - \sigma_1)\mu_1 N + (1 - \sigma_2)\mu_2 N - \alpha \frac{SI}{N} - (\mu_1 + \mu_2)S. \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha \frac{IS}{N} - (\beta + \mu_1 + \mu_2)I \\ \frac{dR}{dt} &= (\sigma_1 \mu_1)N + (\sigma_1 \mu_2)N + \beta I - (\mu_1 + \mu_2)R\end{aligned}\quad (4.4)$$

dengan  $S(0) > 0, I(0) > 0$  dan  $R(0) \geq 0$ .

Sistem (4.4) dapat diskala dengan populasi  $N$ . Dari sini muncul variabel baru  $s = S/N$ ,  $i = I/N$  dan  $r = R/N$ , yang menyatakan proporsi individu masing-masing kelas. Jadi harus memenuhi  $s + i + r = 1$ . Sehingga model *SIR* dengan skala adalah

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= (1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2 - \alpha si - (\mu_1 + \mu_2)s \\ \frac{di}{dt} &= \alpha si - (\beta + \mu_1 + \mu_2)i \\ \frac{dr}{dt} &= \sigma_1\mu_1 + \sigma_2\mu_2 + \beta i - (\mu_1 + \mu_2)r.\end{aligned}\tag{4.5}$$

## 4.2 Kestimbangan Model

Keadaan setimbang dari suatu populasi pada model *SIR* dicapai ketika tidak ada perubahan jumlah individu *susceptible*, *infected* dan *recovered* sepanjang waktu. Menurut Diekmann dan Hesterbeek [4] ada dua macam titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh ketika tidak ada individu *infected* ( $i = 0$ ) saat laju perubahannya nol. Sedangkan titik endemik diperoleh ketika terdapat individu *infected* saat laju perubahannya nol, untuk  $t \rightarrow \infty$ .

Kelompok individu yang penting untuk diamati pada model *SIR* adalah individu *susceptible* dan *infected*. Dengan demikian, dalam menentukan titik kesetimbangan hanya digunakan persamaan pertama dan kedua pada sistem (4.5).

Berdasarkan Definisi 2.1.1, kondisi setimbang dipenuhi ketika

$$\begin{aligned}(1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2 - \alpha si - (\mu_1 + \mu_2)s &= 0 \\ \alpha si - (\beta + \mu_1 + \mu_2)i &= 0.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Dari persamaan (4.6) diperoleh dua titik kesetimbangan.

1.  $E_1 = \left( \frac{(1-\sigma_1)\mu_1 + (1-\sigma_2)\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, 0 \right)$

Titik kesetimbangan  $E_1$  adalah titik kesetimbangan bebas penyakit. Hal ini bisa dilihat dari nilai  $i = 0$ , yang berarti tidak ada individu *infected* yang dapat menyebarkan penyakit. Selanjutnya, titik kesetimbangan  $E_1$  ini dituliskan dengan  $(s_0, i_0)$ . Dalam keadaan ini, penyakit tidak akan menyebar.

$$2. E_2 = \left( \frac{\mu_1 + \mu_2 + \beta}{\alpha}, \frac{(1 - \sigma_1)\mu_1\alpha + (1 - \sigma_2)\mu_2\alpha - (\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \beta)}{(\mu_1 + \mu_2 + \beta)\alpha} \right)$$

Titik kesetimbangan  $E_2$  merupakan titik kesetimbangan endemik. Hal ini bisa dilihat dari nilai  $i$  yang tidak nol. Artinya, masih terdapat individu *infected* yang dapat menyebarkan penyakit. Titik kesetimbangan  $E_2$  ini kemudian dituliskan dengan  $(s_e, i_e)$ . Dalam keadaan ini, penyebaran penyakit akan meluas dan menyebabkan endemik.

### 4.3 Rasio Reproduksi Dasar

Tingkat penyebaran infeksi saat terjadi kontak antara individu *infected* dengan individu *susceptible* dinyatakan dalam suatu ukuran. Dalam epidemiologi, nilai tersebut biasa disebut dengan rasio reproduksi dasar ( $R_0$ ). Istilah  $R_0$  pertama kali digunakan George MacDonald (1952) untuk mengkonstruksikan penyebaran penyakit malaria (Wikipedia [22]).

Menurut Diekmann dan Hesterbeek [4], Hethcote [11], serta Shim [19],  $R_0$  didefinisikan sebagai rata-rata banyaknya infeksi sekunder jika satu individu *infected* dimasukkan ke dalam suatu kelompok yang semuanya *susceptible*. Nilai  $R_0$  digunakan untuk mengetahui apakah penyakit akan menghilang sendiri atau menyebar dalam populasi.

Pada persamaan kedua sistem (4.5), diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \alpha si - (\beta + \mu_1 + \mu_2)i \\ &= -(\beta + \mu_1 + \mu_2)i \left( 1 - \frac{\alpha s}{\beta + \mu_1 + \mu_2} \right) \end{aligned}$$

Jika  $\frac{\alpha s}{\beta + \mu_1 + \mu_2} < 1$  maka  $\frac{di}{dt} < 0$ , yang berarti bahwa penyakit berangsur-angsur menghilang dari populasi dan tidak akan menyebar. Sebaliknya, jika  $\frac{\alpha s}{\beta + \mu_1 + \mu_2} > 1$  maka  $\frac{di}{dt} > 0$ , yang berarti penyakit akan meluas dan menjadi endemik. Sehingga rasio reproduksi dasar dapat dituliskan sebagai

$$R_0 = \frac{\alpha s}{\beta + \mu_1 + \mu_2}. \quad (4.7)$$

Selanjutnya, saat keadaan setimbang, jika semua individu adalah *susceptible* dan tidak ada individu *infected*, nilai  $s$  pada persamaan (4.7) didekati dengan titik

kesetimbangan bebas penyakit,  $s_0$ . Sehingga nilai  $R_0$  dapat ditentukan dengan

$$R_0 = \frac{\alpha((1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2)}{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \beta)}. \quad (4.8)$$

#### 4.4 Analisis Kestabilan

Perilaku penyebaran penyakit dapat diamati berdasarkan kestabilan dari titik-titik kesetimbangan yang telah diperoleh. Kestabilan ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian yang diperoleh melalui metode linearisasi.

Matriks Jacobian baris satu dan dua sistem (4.5) adalah

$$J = \begin{pmatrix} -\alpha i - (\mu_1 + \mu_2) & -\alpha s \\ \alpha i & \alpha s - (\beta + \mu_1 + \mu_2) \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Kestabilan dari titik-titik kesetimbangan  $E_1$  dan  $E_2$  ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian di titik-titik tersebut.

##### 4.4.1 Kestabilan di Titik Kesetimbangan $E_1$

Dengan mengevaluasi matriks Jacobian (4.9) di titik  $E_1 = (s_0, i_0)$ , diperoleh

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha s_0 \\ 0 & \alpha s_0 - (\beta + \mu_1 + \mu_2) \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

dengan  $s_0 = \frac{(1 - \sigma_1)\mu_1 + (1 - \sigma_2)\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$ . Persamaan karakteristik dari  $J(E_1)$  adalah

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\alpha s_0 - (\beta + \mu_1 + \mu_2))\lambda. \quad (4.11)$$

Nilai eigen dari matriks Jacobian (4.10) dapat ditentukan dengan menghitung akar karakteristik dari persamaan (4.11). Ada dua akar karakteristik (4.11), yaitu  $\lambda_1 = 0$  atau  $\lambda_2 = \alpha s_0 - (\beta + \mu_1 + \mu_2)$ . Selanjutnya, kestabilan di titik kesetimbangan ini ditentukan berdasarkan Teorema 2.1.1 dan Tabel 2.1.

Diperhatikan kembali definisi  $R_0$  pada persamaan (4.8). Nilai  $\lambda_2$  bertanda negatif jika  $R_0 < 1$ . Konsekuensinya, titik kesetimbangan  $E_1 = (s_0, i_0)$  akan stabil. Sebaliknya, jika  $R_0 > 1$  maka nilai  $\lambda_2$  bertanda positif sehingga titik kesetimbangan ini tidak stabil. Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil jika  $R_0 < 1$ . Demikian juga sebaliknya, titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil jika  $R_0 > 1$ .

### 4.4.2 Kestabilan di Titik Kesetimbangan $E_2$

Dengan mengevaluasi titik  $E_2 = (s_e, i_e)$  pada matriks Jacobian (4.9), diperoleh

$$J = \begin{pmatrix} -\alpha i_e & -(\mu_1 + \mu_2 + \beta) \\ \alpha i_e & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

dengan  $i_e = \frac{(1-\sigma_1)\mu_1\alpha + (1-\sigma_2)\mu_2\alpha - (\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \beta)}{(\mu_1 + \mu_2 + \beta)\alpha}$ . Persamaan karakteristik dari  $J(E_2)$  adalah

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha i_e \lambda + \alpha i_e (\beta + \mu_1 + \mu_2). \quad (4.13)$$

Dengan langkah yang sama, ada dua akar karakteristik persamaan (4.13), yaitu

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -\alpha i_e \pm \sqrt{(-\alpha i_e)^2 - 4\alpha i_e (\mu_1 + \mu_2 + \beta)} \right).$$

Dari definisi  $R_0$  pada persamaan (4.8) dan titik kesetimbangan  $E_2$ , diperoleh hubungan  $\beta i_e = (\mu_1 + \mu_2)R_0$ . Nilai diskriminan dari (4.13) akan bertanda negatif ketika

$$R_0 < \frac{4(\mu_1 + \mu_2 + \beta)}{\mu_1 + \mu_2}. \quad (4.14)$$

Kondisi (4.14) memberikan konsekuensi bahwa nilai eigen dari matriks Jacobian (4.12) adalah bilangan kompleks konjugate dengan bagian real bertanda negatif. Berdasarkan Teorema 2.1.1, titik kesetimbangan  $E_2$  akan stabil asimptotis.

Namun, apabila

$$R_0 > \frac{4(\mu_1 + \mu_2 + \beta)}{\mu_1 + \mu_2},$$

nilai eigen dari matriks Jacobian (4.12) adalah berupa bilangan real. Nilai bilangan tersebut dapat sama atau tidak sama, dan bertanda sama atau tidak sama. Untuk menentukan kriteria kestabilan ini dapat dilihat berdasarkan Tabel 2.1.

## 4.5 Penerapan Kasus

Pada bagian ini diberikan 1 kasus yang diambil dari Picollo dan Billings [13], dengan parameter yang telah ditetapkan. Diberikan laju kesembuhan  $\beta = 100$ . Parameter yang digunakan berdasarkan sensus data di kota New York [17]. Total populasi adalah  $N = 8$  juta, dengan rata-rata banyaknya kelahiran 127 ribu per

tahun dan rata-rata banyaknya imigran yang masuk 120 ribu per tahun, sehingga laju kelahiran penduduk adalah  $\mu_1 = 0.015875$  dan laju imigrasi awal  $\mu_2 = 0.015$  per tahunnya. Rata-rata kontak adalah  $\alpha = 1700$ . Diberikan parameter vaksinasi dengan laju vakinasasi individu lahir adalah  $\sigma_1 = 0.6$  dan laju vasinasi penduduk imigran adalah  $\sigma_2 = 0.5$ . Jumlah individu awal yang terinfeksi adalah  $I(0) = 50$  orang. Dengan demikian, model (4.4) untuk kasus ini disajikan sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= 110800 - 0.0002125SI - 0.030875S \\ \frac{dI}{dt} &= 0.0002125SI - 100.031I \\ \frac{dR}{dt} &= 136200 + 100I - 0.030875R,\end{aligned}\tag{4.15}$$

dengan  $S(0) = 7999950$ ,  $I(0) = 50$  and  $R(0) = 0$ .

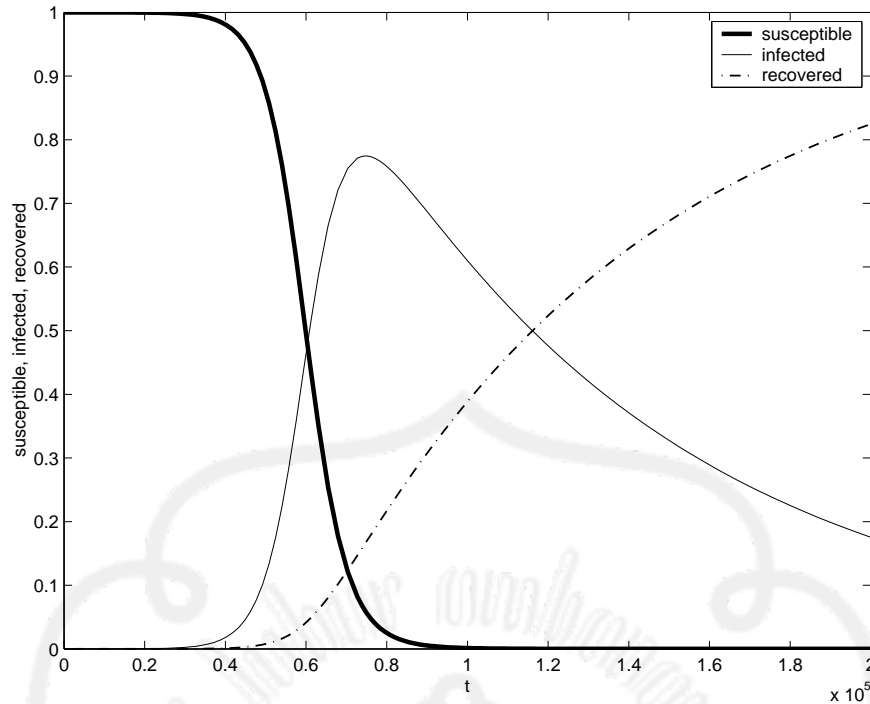
Model *SIR* (4.15) yang telah diperoleh diterapkan dalam kasus tersebut untuk mengetahui proporsi individu *susceptible*, *infected* dan *recovered*. Ditentukan pola titik kesetimbangan pada model serta analisis kestabilan dari titik kesetimbangan tersebut. Tingkat keparahan dari penyakit diukur berdasarkan banyaknya individu yang terinfeksi. Puncak endemik, atau jumlah maksimal individu *infected* ditentukan untuk menyatakan tingkat endemik. Penyelesaian model pada kasus ditentukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat, dengan bantuan program *software Matlab 7.0*.

Berdasarkan persamaan (4.8), rasio reproduksi dasar pada kasus ini adalah  $R_0 = 16.9948$ . Karena nilai  $R_0 > 1$ , dalam kasus ini kemungkinan terjadi endemik. Artinya, dimungkinkan penyakit infeksi akan menyebar lebih luas. Untuk mencegah penyebaran infeksi ini perlu dilakukan program vaksinasi. Selanjutnya, proporsi individu *susceptible*, *infected* dan *recovered* pada contoh kasus tersebut disajikan pada Gambar 4.2.

Dari Gambar 4.2 tampak bahwa pada awalnya proporsi individu *susceptible* mendekati 1. Namun, seiring berjalannya waktu jumlah individu *susceptible* semakin berkurang. Hal ini terjadi karena adanya individu *susceptible* yang terinfeksi. Dengan demikian, terjadi perpindahan kelas dari *S* ke *I*.

Pada kelas *I*, pada awalnya proporsi individu *infected* kecil, bahkan mendekati nol. Namun dengan berjalannya waktu terjadi kenaikan jumlah individu *infected*,





Gambar 4.2. Proporsi individu *susceptible* (garis tebal), *infected* (garis tipis), dan *recovered* (garis putus-putus)

lalu terjadi penurunan kembali. Kenaikan jumlah individu *infected* berasal dari kelas  $S$  saat terjadi infeksi. Sedangkan penurunan individu *infected* terjadi karena terjadi perpindahan ke kelas  $R$ . Dalam hal ini, individu *infected* telah banyak yang sembuh.

Dengan memperhatikan perilaku grafik proporsi individu *infected*, yang pada awalnya naik kemudian turun kembali, maka penting untuk melihat secara cermat puncaknya. Puncak endemik terjadi ketika proporsi individu *infected* mencapai maksimal. Berdasarkan Gambar 4.2, puncak endemik terjadi disekitar  $i \approx 0.7$ . Berikut diberikan 5 proporsi individu *infected* tertinggi yang disajikan pada Tabel 4.1. Berdasarkan Tabel 4.1 puncak endemiknya yaitu  $i_{maks} \approx 0.7746$  dan terjadi ketika  $t \approx 0.7444 \times 10^5$ .

Selanjutnya pada kelas  $R$ , pada awalnya proporsi jumlah individu *recovered* adalah nol, kemudian mengalami kenaikan sepanjang berjalannya waktu. Proporsi ini berkebalikan dengan individu *susceptible*. Dengan demikian, pada awalnya tidak ada individu yang sembuh dari penyakit. Kemungkinan adanya pemberian obat dan program vaksinasi menyebabkan jumlah individu yang sembuh dari

Tabel 4.1. Proporsi individu *infected* di 5 titik tertinggi

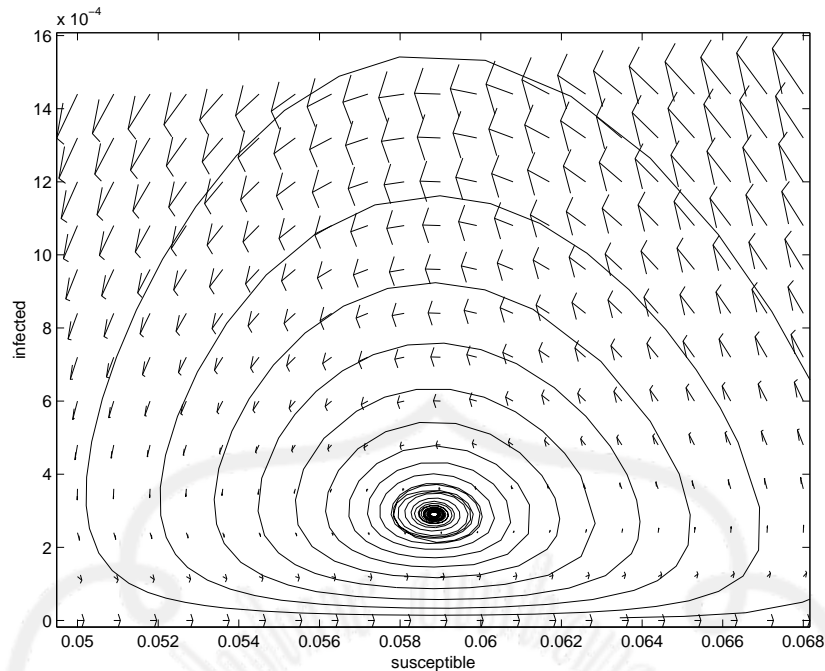
$t$	$i$
$0.7185 \times 10^5$	0.7674
$0.7315 \times 10^5$	0.7727
$0.7444 \times 10^5$	0.7746
$0.7573 \times 10^5$	0.7737
$0.7702 \times 10^5$	0.7706

penyakit terus bertambah.

Titik kesetimbangan ditentukan untuk mengetahui letak di mana laju perubahan jumlah individu pada masing-masing kelas adalah nol. Dengan kata lain, banyaknya individu pada masing-masing kelas adalah konstan. Pada kasus ini hanya terdapat satu titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan endemik, di mana  $s_e = 0.0588, i_e = 0.29049 \times 10^{-3}$ . Dengan demikian, pada keadaan yang semacam ini penyakit masih tetap ada (belum musnah). Nilai eigen dari titik kesetimbangan ini adalah  $\lambda_1 = -3.086 \times 10^{-8} + 8.78 \times 10^{-7}i, \lambda_2 = -3.086 \times 10^{-8} - 8.78 \times 10^{-7}i$ . Berdasarkan Teorema 2.1.1 dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan ini stabil asimtotis. Lebih lanjut, kriteria kestabilan di titik kesetimbangan ini digambarkan pada bidang fase *susceptible – infected* yang disajikan pada Gambar 4.3. Dari Gambar 4.3 tampak bahwa arah trayektori berbentuk spiral yang menuju titik kesetimbangan sehingga dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan ini stabil.

Makna secara fisik keadaan ini adalah pada infeksi tingkat awal, sudah terdapat sejumlah individu sehat. Kemudian, terjadi infeksi dan mulai mengalami kenaikan sampai proses ini lebih cepat daripada banyaknya individu sehat yang menjadi bertambah pada populasi. Pada akhirnya, hanya sedikit individu yang dapat menginfeksi, dan penyebaran penyakit akan berhenti. Lalu, individu yang sehat akan bertambah lagi (Picollo dan Billings [13]).

Pada kasus ini, individu yang menarik diamati adalah individu *infected*. Hal ini didasarkan pada anggapan bahwa keparahan dari suatu penyakit diukur



Gambar 4.3. Trayektori individu *susceptible*, *infected*

berdasarkan banyaknya individu yang terinfeksi. Dengan demikian, menjadi penting untuk dapat mengetahui titik puncak endemik. Dari titik puncak endemik, dapat diperkirakan keadaan terparah dari suatu penyebaran penyakit. Selanjutnya, dapat dilakukan suatu antisipasi saat keadaan itu terjadi. Misalnya, dengan mempersiapkan perawatan yang dibutuhkan kepada individu yang terinfeksi. Hal ini dilakukan agar penyakit tidak semakin menyebar.

Dari Gambar 4.2 terlihat bahwa pada awalnya proporsi individu *infected* kecil kemudian mengalami kenaikan. Proporsi individu tertinggi, atau puncak endemik terjadi di  $i_{maks} \approx 0.7746$  dan terjadi ketika  $t \approx 0.7444 \times 10^5$ . Titik puncak endemik yang diperoleh bukan titik kesetimbangan. Titik puncak endemik ini masih bisa berubah dengan melakukan perubahan kecil pada nilai-nilai parameter. Dari keadaan ini maka perlu dilakukan simulasi. Tujuan dari simulasi di sini adalah untuk dapat mengetahui pengaruh perubahan dari parameter-parameter tersebut terhadap puncak endemik. Dengan demikian, dapat diambil suatu strategi yang bertujuan untuk menurunkan puncak endemik. Jika puncak endemik turun, maka keparahan dari penyakit yang terjadi juga berkurang.

Ada 6 parameter yang terdapat pada model *SIR* dengan imigran (4.4). Di

sini diperhatikan 4 parameter yang akan dilakukan simulasi, yaitu  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma_1$ , dan  $\sigma_2$ . Simulasi  $\alpha$  dilakukan untuk mengetahui pengaruh dari laju kontak individu *infected* dengan *susceptible* terhadap puncak endemik. Sedangkan simulasi  $\beta$  untuk mengetahui pengaruh dari laju kesembuhan. Juga diberikan simulasi  $\sigma_1$  dan  $\sigma_2$  untuk mengetahui pengaruh dari program vaksinasi pada penduduk tetap dan imigran.

Hasil eksperimen numerik untuk laju kontak individu *infected* dengan *susceptible* dengan nilai-nilai  $\alpha = 1700, 1600, 1500$  dan  $1400$  disajikan pada Tabel 4.2. Berdasarkan Tabel 4.2 tampak bahwa semakin kecil nilai  $\alpha$ , puncak endemik akan semakin turun. Pada eksperimen ini, puncak endemik terendah terjadi ketika  $\alpha = 1400$ . Dengan demikian, untuk menurunkan puncak endemik dapat dilakukan dengan menurunkan laju kontak individu *infected* dengan *susceptible*. Hal yang dapat dilakukan adalah dengan mengurangi atau menurunkan kontak terhadap individu yang terinfeksi. Dengan tingkat penurunan yang sama pada nilai  $\alpha$ , tingkat penurunan puncak endemik terbesar terjadi ketika  $\alpha = 1400$ .

Tabel 4.2. Nilai puncak endemik dengan simulasi variasi nilai  $\alpha$

$\alpha$	Puncak endemik ( $I_{maks}$ )
1700	$6.195639 \times 10^6$
1600	$6.113067 \times 10^6$
1500	$6.021657 \times 10^6$
1400	$5.919684 \times 10^6$

Tabel 4.3 menunjukkan eksperimen numerik terhadap nilai  $\beta$  untuk  $\beta = 100, 150, 200$  dan  $250$ . Dari Tabel 4.3 tampak bahwa semakin besar nilai  $\beta$ , puncak endemik akan semakin turun. Dengan demikian, untuk menurunkan puncak endemik dapat dilakukan dengan meningkatkan laju kesembuhan. Strategi yang disarankan adalah dengan meningkatkan perawatan medis dan pemberian nutrisi terhadap individu yang terinfeksi. Dengan tingkat penambahan yang sama pada nilai  $\beta$ , tingkat penurunan terbesar terjadi ketika  $\beta = 150$ .

Pengaruh dari program vaksinasi terhadap puncak endemik dapat diamati

Tabel 4.3. Nilai puncak endemik dengan simulasi variasi nilai  $\beta$ 

$\beta$	Puncak endemik ( $I_{maks}$ )
100	$6.195639 \times 10^6$
150	$5.579767 \times 10^6$
200	$5.040541 \times 10^6$
250	$4.568497 \times 10^6$

pada Tabel 4.4. Tabel 4.4 kiri menunjukkan pengaruh dari program vaksinasi yang diberikan pada penduduk tetap. Pada kasus, mula-mula diberikan nilai  $\sigma_1 = 0.6$ . Untuk mengetahui pengaruhnya, simulasi dilakukan dengan menurunkan dan menaikkan nilai  $\sigma_1$ . Di sini diambil nilai  $\sigma_1 = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$  dan  $0.8$ . Dari Tabel 4.4 kiri tampak bahwa semakin besar  $\sigma_1$ , puncak endemik semakin menurun. Dengan demikian, agar penyakit infeksi tidak menyebar, program vaksinasi pada penduduk tetap masih perlu diadakan. Semakin banyak penduduk yang divaksin, semakin meningkat pula penduduk yang mempunyai kekebalan tinggi terhadap penyakit infeksi. Sehingga penduduk yang terinfeksi jumlahnya akan menurun. Artinya, puncak endemik juga akan menurun.

Tabel 4.4. Nilai puncak endemik dengan simulasi variasi nilai  $\sigma_1$ 

$\sigma_1$	Puncak endemik ( $I_{maks}$ )	$\sigma_2$	Puncak endemik ( $I_{maks}$ )
0.4	$6.194881 \times 10^6$	0.3	$6.194967 \times 10^6$
0.5	$6.195442 \times 10^6$	0.4	$6.195461 \times 10^6$
0.6	$6.195639 \times 10^6$	0.5	$6.195639 \times 10^6$
0.7	$6.194657 \times 10^6$	0.6	$6.194811 \times 10^6$
0.8	$6.194036 \times 10^6$	0.7	$6.193655 \times 10^6$

Hasil simulasi numerik untuk mengetahui pengaruh program vaksinasi pada penduduk imigran dapat dilihat pada Tabel 4.4 kanan. Pada kasus diberikan nilai  $\sigma_2 = 0.5$ . Seperti simulasi pada  $\sigma_1$ , di sini simulasi numerik juga dilakukan dengan menurunkan dan menaikkan nilai  $\sigma_2$ . Diambil nilai  $\sigma_2 = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$  dan  $0.7$ . Berdasarkan Tabel 4.4 kanan dapat diamati bahwa semakin tinggi la-

ju vaksinasi terhadap penduduk imigran, puncak endemik semakin turun. Jadi, program vaksinasi pada penduduk imigran juga dapat menurunkan puncak endemik, sebagaimana vaksinasi terhadap penduduk tetap. Dengan demikian, program vaksinasi untuk penduduk tetap maupun imigran perlu dilakukan untuk menurunkan puncak endemik. Simulasi pada parameter  $\sigma_1$  menunjukkan bahwa penurunan tingkat endemik terbesar terjadi ketika  $\sigma_1 = 0.7$ . Demikian juga pada  $\sigma_2$ , penurunan tingkat endemik terbesar terjadi ketika  $\sigma_2 = 0.7$ .



## BAB V

### PENUTUP

#### 5.1 Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Model *SIR* dengan imigran dan vaksinasi dapat diekspresikan sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= (1 - \sigma_1)\mu_1 N + (1 - \sigma_2)\mu_2 N - \alpha \frac{SI}{N} - (\mu_1 + \mu_2)S. \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha \frac{IS}{N} - (\beta + \mu_1 + \mu_2)I \\ \frac{dR}{dt} &= (\sigma_1\mu_1)N + (\sigma_1\mu_2)N + \beta I - (\mu_1 + \mu_2)R\end{aligned}$$

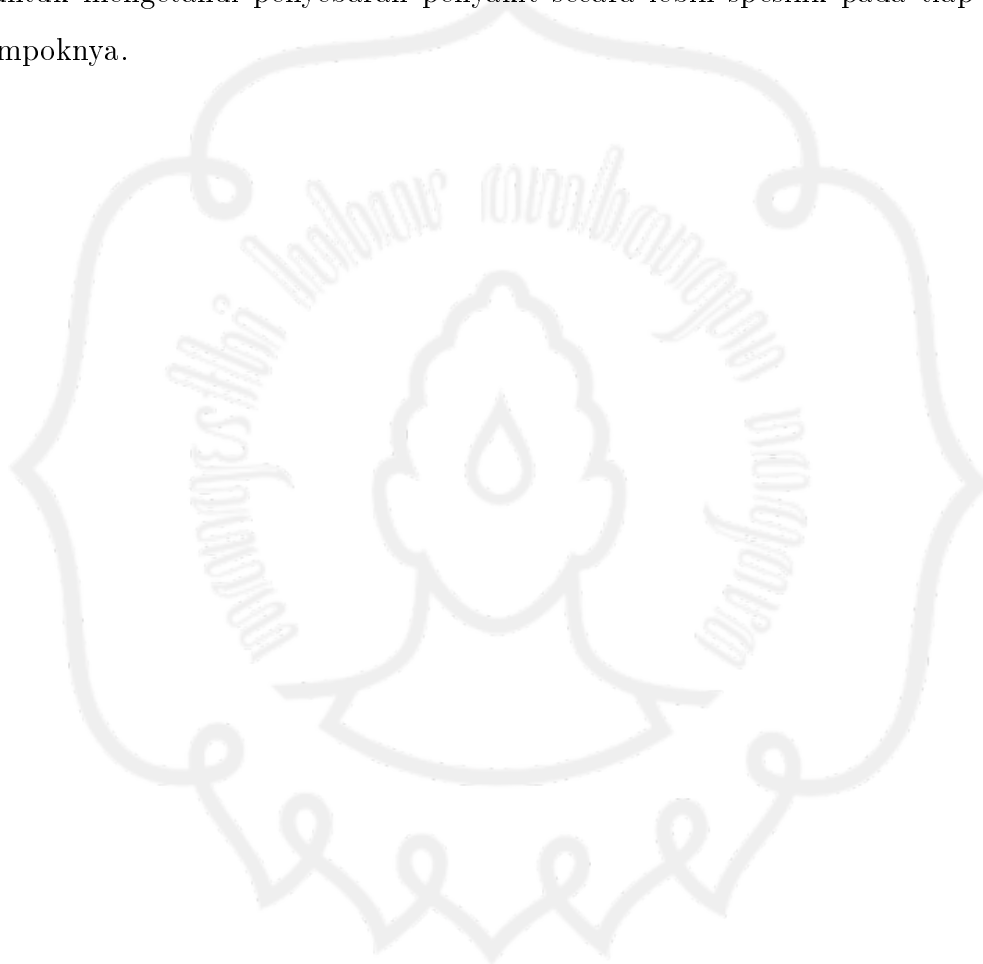
dengan

$$S(t) + I(t) + R(t) = N, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, 0 \leq \sigma_1 \leq 1, 0 \leq \sigma_2 \leq 1, \alpha > 0, \beta > 0.$$

2. Ada dua macam titik kesetimbangan pada model *SIR* dengan imigran dan vaksinasi, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit  $(s_0, i_0) = \left(\frac{(1-\sigma_1)\mu_1 + (1-\sigma_2)\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, 0\right)$  dan titik kesetimbangan endemik  $(s_e, i_e) = \left(\frac{\mu_1 + \mu_2 + \beta}{\alpha}, \frac{(1-\sigma_1)\mu_1\alpha + (1-\sigma_2)\mu_2\alpha - (\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 + \mu_2 + \beta)}{(\mu_1 + \mu_2 + \beta)\alpha}\right)$ .
3. Pada contoh kasus, titik kesetimbangan yang diperoleh adalah titik kesetimbangan endemik. Berdasarkan kriteria nilai eigen, titik kesetimbangan tersebut stabil asimtotis. Lebih lanjut, kriteria kestabilan tersebut dapat juga disimpulkan berdasarkan gambar trayektori dalam bidang fase.
4. Eksperimen numerik menunjukkan bahwa untuk menurunkan puncak endemik dapat dilakukan dengan menurunkan laju kontak individu terinfeksi, meningkatkan nilai laju kesembuhan, serta meningkatkan laju vaksinasi pada penduduk tetap dan vaksinasi pada imigran.

## 5.2 Saran

Dalam skripsi ini, penulis membahas model *SIR* yang dipengaruhi faktor imigran dengan keadaan jumlah populasi konstan. Pada model ini tidak dapat pemisahan populasi penduduk tetap dan imigran. Bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini, model tersebut dapat dikembangkan dengan membagi populasi menjadi dua subpopulasi, yaitu penduduk tetap dan imigran. Hal ini untuk mengetahui penyebaran penyakit secara lebih spesifik pada tiap-tiap kelompoknya.





## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bellomo, N. and L. Preziosi, *Modeling Mathematical Methods and Scientific Computation*, CRC Press, Florida, 1995.
- [2] Boyce, W. E. and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1986.
- [3] Budiantoro, F., *Analisis Kestabilan Lokal dan Global pada Model SIR dengan Imigran*, Proposal Tugas Akhir Jurusan Matematika (sedang dikerjakan), FMIPA, Universitas Sebelas Maret, Surakarta, 2008.
- [4] Diekmann, O. and J. A. P Heesterbeek, *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 2000.
- [5] Weir, M. D., F. R. Giordano and W.P. Fox, *A Firts Course in Mathematical Modeling*, 3 ed., Brooks/Cole-Thomson Learning, Inc., 511 Forest Lodge Road, Pacific Grove, USA, 2003.
- [6] Farlow, S. J., *An Introduction to Differensial Equations and Their Applications*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1994.
- [7] Finizio, N. and G. Ladas, *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*, 2 ed., Alih bahasa: W. Santoso, Erlangga, Jakarta, 1988.
- [8] Grassly, N. C. and C. Fraser, *Seasonal Infectious Disease Epidemiology*, Proceedings of the Royal Society B, Department of Infectious Disease Epidemiology, Imperial College London (2006).

- [9] Haberman, R., *Mathematical Models (Mechanical Vibrations, Population Dynamic, and Traffic Flow)*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1971.
- [10] Hethcote, H. W., *Three Basic Epidemiological Models*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg **18** (1989), 119–142.
- [11] Hethcote, H. W., *The Mathematics of Infectious Diseases*, SIAM Review **42** (2000), no. 4, 599–653.
- [12] Iannelli, M., *The Mathematical Modeling of Epidemics*, Mathematics Department University of Toronto, 2005.
- [13] Picollo, C. III and L. Billings, *The Effect of Vaccinations in an Immigrant Model*, Mathematical and Computer Modeling (2005), no. 42, 291–299.
- [14] Lewis, M., *Mathematical Models and Infectious Disease Dynamics*, Wieslaw Krawcewicz (2004).
- [15] Meyer, W. J., *Concepts of Mathematical Modeling*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1984.
- [16] Nugroho, S., *Pengaruh Vaksinasi terhadap Penyebaran Penyakit dengan Model SIR*, Skripsi, Matematika, FMIPA, Universitas Sebelas Maret, Surakarta, 2009.
- [17] New York Department of City Planning, *2000 Census Summary*, <http://www.nyc.gov/html/census/pop2000.html>, 2000
- [18] Ross, S. L., *Differential Equations*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1984.
- [19] Shim, E., *A Note on Epidemics Models with Infective Immigrants and Vaccination*, Mathematical Biosciences and Engineering (2006).
- [20] Weisstein, E. W., *Sir model*, A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/SIRModel.html>.

- [21] WHO, *Measles*, <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs286/en/>, 2007.
- [22] Wikipedia, *Basic reproduction number*, [http://en.wikipedia.org/wiki/Basic\\_reproduction\\_number](http://en.wikipedia.org/wiki/Basic_reproduction_number).

