

SUBVEKTOR EIGEN BILANGAN BULAT DALAM ALJABAR MAKS-PLUS



oleh

ULFIYYATUL HANNIAH

M0116060

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar
Sarjana Matematika

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SEBELAS MARET SURABAYA

2020

commit to user

SUBVEKTOR EIGEN BILANGAN BULAT DALAM ALJABAR MAKS-PLUS

SKRIPSI

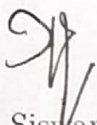
ULFIYYATUL HANNIAH

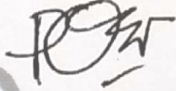
NIM. M0116060

dibimbing oleh

Pembimbing I

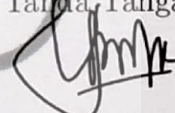
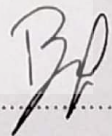
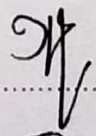
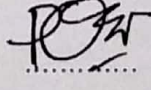
Pembimbing II


 Dr. Drs. Siswanto, M.Si.
 NIP. 19670813 199203 1 002


 Dra. Purnami Widyaningsih, M.App.Sc.
 NIP. 19620815 198703 2 003

dipertahankan di depan Dewan Penguji
 dan dinyatakan telah memenuhi syarat
 pada hari Jumat tanggal 25 September 2020

Dewan Penguji

Jabatan	Nama dan NIP	Tanda Tangan	Tanggal
Ketua	Vika Yugi Kurniawan, S.Si., M.Sc. NIP. 19870701 201504 1 001		24-11-2020
Sekretaris	Bowo Winarno, S.Si., M.Kom. NIP. 19810430 200812 1 001		24-11-2020
Anggota	Dr. Drs. Siswanto, M.Si. NIP. 19670813 199203 1 002		24-11-2020
Penguji	Dra. Purnami Widyaningsih, M.App.Sc. NIP. 19620815 198703 2 003		23-11-2020

Disahkan
 di Surakarta pada tanggal25 NOV 2020

Kepala Program Studi Matematika
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
 Universitas Sebelas Maret Surakarta



Dr. Drs. Siswanto, M.Si.
 NIP. 19670813 199203 1 002

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul “Subvektor Eigen Bilangan Bulat dalam Aljabar Maks-Plus” belum pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan pada suatu perguruan tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga belum pernah ditulis atau dipublikasikan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dirujuk dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar rujukan.



Surakarta, September 2020

Ulfiyyatul Hanniah

RINGKASAN

Aljabar maks-plus adalah aljabar linear atas *semiring* $\bar{\mathbb{R}}$ atau (\mathbb{R}_{maks}) , dengan \mathbb{R} adalah himpunan semua bilangan real, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\epsilon\}$, dan $\epsilon = -\infty$, yang dilengkapi dengan operasi maksimum \oplus dan plus \otimes . Masalah menentukan vektor eigen $\mathbf{x} \in \bar{\mathbb{R}}^n, \mathbf{x} \neq (\epsilon, \epsilon, \dots, \epsilon)^T$, dan nilai eigen $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$ yang memenuhi persamaan $\mathbf{B} \otimes \mathbf{x} = \lambda \otimes \mathbf{x}$, dengan $\mathbf{B} \in \bar{\mathbb{R}}^{n \times n}$ disebut masalah eigen. Selain masalah eigen, terdapat masalah subeigen, yaitu masalah menentukan subvektor eigen $\mathbf{x} \in \bar{\mathbb{R}}^n, \mathbf{x} \neq (\epsilon, \epsilon, \dots, \epsilon)^T$, dan subnilai eigen $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$ yang memenuhi pertidaksamaan $\mathbf{B} \otimes \mathbf{x} \leq \lambda \otimes \mathbf{x}$. Untuk $\mathbf{B} \in \bar{\mathbb{R}}^{n \times n}$ dan $\lambda(\mathbf{B}) \leq 0$, didefinisikan $\Delta(\mathbf{B}) = \mathbf{I} \oplus \mathbf{B} \oplus \dots \oplus \mathbf{B}^{n-1}$.

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan ulang subvektor eigen bilangan bulat dalam aljabar maks-plus. Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur dengan menggunakan referensi berupa buku, jurnal, maupun tulisan lain yang membahas tentang aljabar maks-plus.

Hasil yang diperoleh pada penelitian ini adalah subvektor eigen bilangan bulat dari matriks $\mathbf{B} \in \bar{\mathbb{R}}^{n \times n}$, \mathbf{B} tidak semua entrinya bernilai ϵ , yaitu vektor $\mathbf{x} \in \bar{\mathbb{Z}}^n, \mathbf{x} \neq (\epsilon, \epsilon, \dots, \epsilon)^T$ yang memenuhi pertidaksamaan $\mathbf{B} \otimes \mathbf{x} \leq \lambda \otimes \mathbf{x}$, dengan $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}, \lambda \geq \lambda(\mathbf{B}), \lambda > \epsilon$. Subvektor eigen bilangan bulat dapat diperoleh dengan mengalikan $\Delta(\lceil \lambda^{-1} \otimes \mathbf{B} \rceil)$ dengan sembarang vektor bilangan bulat, yaitu $\mathbf{x} = \Delta(\lceil \lambda^{-1} \otimes \mathbf{B} \rceil) \otimes \mathbf{z}; \mathbf{z} \in \bar{\mathbb{Z}}^n$.

SUMMARY

Max-plus algebra is the linear algebra over the semiring $\bar{\mathbb{R}}$ or (\mathbb{R}_{max}) where \mathbb{R} is a set of all real numbers, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\epsilon\}$, and $\epsilon = -\infty$ which is equipped with maximum \oplus and plus \otimes operations. Problems determine eigenvector $\mathbf{x} \in \bar{\mathbb{R}}^n$, $\mathbf{x} \neq (\epsilon, \epsilon, \dots, \epsilon)^T$, and the eigenvalue $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$ that satisfies equation $\mathbf{B} \otimes \mathbf{x} = \lambda \otimes \mathbf{x}$ where $\mathbf{B} \in \bar{\mathbb{R}}^{n \times n}$ is called the eigenproblem. Besides the eigenproblem, there is the subeigenproblem, which are problem determining subeigenvector $\mathbf{x} \in \bar{\mathbb{R}}^n$, $\mathbf{x} \neq (\epsilon, \epsilon, \dots, \epsilon)^T$ and the subeigenvalue $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$ that satisfy the inequality $\mathbf{B} \otimes \mathbf{x} \leq \lambda \otimes \mathbf{x}$. For $\mathbf{B} \in \bar{\mathbb{R}}^{n \times n}$ and $\lambda(\mathbf{B}) \leq 0$, defined $\Delta(\mathbf{B}) = \mathbf{I} \oplus \mathbf{B} \oplus \dots \oplus \mathbf{B}^{n-1}$.

This research aims to redetermine the integer subeigenvector in the max-plus algebra. The research method used is literature study by using references in the form of books, journals, and other writing about max-plus algebra.

The results obtained in this research are the integer subeigenvector of matrix $\mathbf{B} \in \bar{\mathbb{R}}^{n \times n}$, not all entries \mathbf{B} are ϵ , which is the vector $\mathbf{x} \in \bar{\mathbb{Z}}^n$, $\mathbf{x} \neq (\epsilon, \epsilon, \dots, \epsilon)^T$ that satisfies inequality $\mathbf{B} \otimes \mathbf{x} \leq \lambda \otimes \mathbf{x}$, with $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$, $\lambda \geq \lambda(\mathbf{B})$, $\lambda > \epsilon$. Integer subeigenvector can be obtained by multiplying $\Delta(\lceil \lambda^{-1} \otimes \mathbf{B} \rceil)$ with any integer vector, that is $\mathbf{x} = \Delta(\lceil \lambda^{-1} \otimes \mathbf{B} \rceil) \otimes \mathbf{z}$; $\mathbf{z} \in \bar{\mathbb{Z}}^n$.

PERSEMBAHAN

Skripsi ini kupersembahkan untuk ibu (Musriah), bapak (Masruri), dan kakakku (Siti Mahmudah).



commit to user

PRAKATA

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan, dorongan, serta bimbingan berbagai pihak. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada

1. Dr. Drs. Siswanto, M.Si. sebagai Pembimbing I yang telah memberikan saran dan bimbingan selama proses penyusunan skripsi ini khususnya bagian materi dan
2. Dra. Purnami Widyaningsih, M.App.Sc. sebagai Pembimbing II yang telah memberikan saran dan bimbingan selama proses penyusunan skripsi ini khususnya bagian penulisan.

Semoga skripsi ini bermanfaat.

Surakarta, September 2020

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	ii
PERNYATAAN	iii
RINGKASAN	iv
SUMMARY	v
PERSEMBAHAN	vi
PRAKATA	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	x
DAFTAR TABEL	xi
DAFTAR NOTASI	xii
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Perumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Manfaat Penelitian	3
II LANDASAN TEORI	4
2.1 Tinjauan Pustaka	4
2.2 Teori Penunjang	5
2.2.1 Aljabar Maks-Plus.	5
2.2.2 Matriks atas Aljabar Maks-Plus.	6
2.2.3 Graf dalam Aljabar Maks-Plus	9

2.2.4	Nilai Eigen dan Vektor Eigen dalam Aljabar Maks-Plus . . .	11
2.3	Kerangka Pemikiran	12
III METODE PENELITIAN		13
IV HASIL DAN PEMBAHASAN		14
4.1	Subvektor Eigen dalam Aljabar Maks-Plus	14
4.2	Menentukan Subvektor Eigen Bilangan Bulat dalam Aljabar Maks-Plus	20
V PENUTUP		36
5.1	Kesimpulan	36
5.2	Saran	36
DAFTAR RUJUKAN		37

DAFTAR GAMBAR

2.1	Graf $\mathcal{G}(B)$	10
4.1	Graf $\mathcal{G}(H)$	17
4.2	Graf $\mathcal{G}(J)$	23
4.3	Graf $\mathcal{G}(C)$	27
4.4	Graf $\mathcal{G}(D)$	29

DAFTAR TABEL

4.1	<i>Cycle</i> elementer dari $\mathcal{G}(\mathbf{H})$	18
4.2	<i>Cycle</i> elementer dari $\mathcal{G}(\mathbf{J})$	24
4.3	<i>Cycle</i> elementer dari $\mathcal{G}(\mathbf{C})$	27
4.4	<i>Cycle</i> elementer dari $\mathcal{G}(\mathbf{D})$	30

DAFTAR NOTASI

\mathbb{R}	: himpunan semua bilangan real
$\bar{\mathbb{R}}$: himpunan gabungan himpunan semua bilangan real dan himpunan ϵ
ϵ	: negatif tak hingga $(-\infty)$
\oplus	: operasi maksimum
\otimes	: operasi plus
\mathbb{R}_{maks}	: aljabar maks-plus
e	: elemen identitas terhadap \otimes
$\bar{\mathbb{R}}^{n \times n}$: himpunan matriks dengan entri bilangan real berukuran $n \times n$ atas aljabar maks-plus
$\bar{\mathbb{R}}^n$: himpunan vektor dengan entri bilangan real berukuran n atas aljabar maks-plus
\mathbb{N}	: himpunan semua bilangan asli
\mathbf{B}	: matriks
$b_{i,j}$: entri matriks pada baris ke- i dan kolom ke- j
$(\mathbf{B})_{i,j}$: notasi lain dari $b_{i,j}$
\mathbf{x}	: vektor
M	: himpunan indeks baris matriks, $M \subseteq \mathbb{N}$
N	: himpunan indeks kolom matriks, $N \subseteq \mathbb{N}$
$\mathbf{B}^{\otimes k}$: matriks \mathbf{B} dipangkatkan sebanyak $k, k \in \mathbb{N}$, dengan operasi \otimes
\mathbf{I}	: matriks identitas
\mathcal{G}	: graf berarah (digraf)
V	: himpunan vertex
A	: himpunan <i>arc</i>
λ	: nilai eigen <i>commit to user</i>
$\mathcal{G}(\mathbf{B})$: digraf representasi dari matriks \mathbf{B}

$w(j, i)$: bobot $\text{arc}(j, i)$
σ	: cycle
$w(\sigma)$: bobot cycle
$l(\sigma)$: panjang cycle
$\mu(\sigma, \mathbf{B})$: bobot rata-rata cycle pada \mathbf{B}
$\Delta(\mathbf{B})$: maksimum dari matriks \mathbf{I} dengan matriks \mathbf{B} sampai \mathbf{B}^{n-1}
$V(\mathbf{B}, \lambda)$: himpunan vektor eigen dari matriks \mathbf{B}
$\Lambda(\mathbf{B})$: himpunan nilai eigen dari matriks \mathbf{B}
$V^*(\mathbf{B}, \lambda)$: himpunan subvektor eigen dari matriks \mathbf{B}
\mathbb{Z}	: himpunan semua bilangan bulat
$\bar{\mathbb{Z}}^n$: himpunan vektor dengan entri bilangan bulat berukuran n atas aljabar maks-plus
$\bar{\mathbb{Z}}^{n \times n}$: himpunan matriks dengan entri bilangan bulat berukuran $n \times n$ atas aljabar maks-plus
$IV^*(\mathbf{B}, \lambda)$: himpunan subvektor eigen bilangan bulat dari matriks \mathbf{B}
$fr(a)$: fractional part dari a
$\lfloor \mathbf{B} \rfloor$: fungsi floor dari matriks \mathbf{B}
$\lceil \mathbf{B} \rceil$: fungsi ceiling dari matriks \mathbf{B}
\square	: akhir bukti