SUBVEKTOR EIGEN BILANGAN BULAT DALAM ALJABAR MAKS-PLUS

oleh

ULFIYYATUL HANNIAH
M0116060

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan memeroleh gelar Sarjana Matematika

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SEBELAS MARET SURAKARTA

2020

SUBVEKTOR EIGEN BILANGAN BULAT DALAM ALJABAR MAKS-PLUS

SKRIPSI

ULFIYYATUL HANNIAH
NIM. M0116060
dibimbing oleh

Pembimbing I	Pembimbing II
Dr. Drs. Siswanto, M.Si.	Dra. Purnami Widyaningsih, M.App.Sc.
NIP. 19670813 199203 1 002	NIP. 19620815 198703 2 003

dipertahankan di depan Dewan Penguji
dan dinyatakan telah memenuhi syarat
pada hari Jumat tanggal 25 September 2020

Dewan Penguji

Jabatan	Nama dan NIP	Tanda Tangan	Tanggal
Ketua	Vika Yugi Kurniawan, S.Si., M.Sc.		
	NIP. 19870701 201504 1 001	....	24-11-2020
Sekretaris	Bowo Winarno, S.Si., M.Kom.		
	NIP. 19810430 200812 1 001	....	24-11-2020
Anggota	Dr. Drs. Siswanto, M.Si.		
Penguji	NIP. 19670813 199203 1 002	....	24-11-2020
	Dra. Purnami Widyaningsih, M.App.Sc.		
	NIP. 19620815 198703 2 003	....	23-11-2020

Disahkan
di Surakarta pada tanggal ....25 NOV 2020....

Kepala Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Sebelas Maret Surakarta

Dr. Drs. Siswanto, M.Si.
NIP. 19670813 199203 1 002

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul "Subvektor Eigen Bilangan Bulat dalam Aljabar Maks-Plus" belum pernah diajukan untuk memeroleh gelar kesarjanaan pada suatu perguruan tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga belum pernah ditulis atau dipublikasikan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dirujuk dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar rujukan.

Surakarta, September 2020

Ulfiyyatul Hanniah

RINGKASAN

Aljabar maks-plus adalah aljabar linear atas *semiring* $\bar{\mathbb{R}}$ atau $(\mathbb{R}_{maks})$, dengan $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan real, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\epsilon\}$, dan $\epsilon = -\infty$, yang dilengkapi dengan operasi maksimum $\oplus$ dan plus $\otimes$. Masalah menentukan vektor eigen $\boldsymbol{x} \in \bar{\mathbb{R}}^n, \boldsymbol{x} \neq (\epsilon, \epsilon, \ldots, \epsilon)^T$, dan nilai eigen $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$ yang memenuhi persamaan $\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{x} = \lambda \otimes \boldsymbol{x}$, dengan $\boldsymbol{B} \in \bar{\mathbb{R}}^{n \times n}$ disebut masalah eigen. Selain masalah eigen, terdapat masalah subeigen, yaitu masalah menentukan subvektor eigen $\boldsymbol{x} \in \bar{\mathbb{R}}^n, \boldsymbol{x} \neq (\epsilon, \epsilon, \ldots, \epsilon)^T$, dan subnilai eigen $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$ yang memenuhi pertidaksamaan $\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{x} \leq \lambda \otimes \boldsymbol{x}$. Untuk $\boldsymbol{B} \in \bar{\mathbb{R}}^{n \times n}$ dan $\lambda(\boldsymbol{B}) \leq 0$, didefinisikan $\Delta(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{B} \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{B}^{n-1}$.

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan ulang subvektor eigen bilangan bulat dalam aljabar maks-plus. Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur dengan menggunakan referensi berupa buku, jurnal, maupun tulisan lain yang membahas tentang aljabar maks-plus.

Hasil yang diperoleh pada penelitian ini adalah subvektor eigen bilangan bulat dari matriks $\boldsymbol{B} \in \bar{\mathbb{R}}^{n \times n}, \boldsymbol{B}$ tidak semua entrinya bernilai ϵ, yaitu vektor $\boldsymbol{x} \in \bar{\mathbb{Z}}^n, \boldsymbol{x} \neq (\epsilon, \epsilon, \ldots, \epsilon)^T$ yang memenuhi pertidaksamaan $\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{x} \leq \lambda \otimes \boldsymbol{x}$, dengan $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$, $\lambda \geq \lambda(\boldsymbol{B})$, $\lambda > \epsilon$. Subvektor eigen bilangan bulat dapat diperoleh dengan mengalikan $\Delta(\lceil \lambda^{-1} \otimes \boldsymbol{B} \rceil)$ dengan sembarang vektor bilangan bulat, yaitu $\boldsymbol{x} = \Delta(\lceil \lambda^{-1} \otimes \boldsymbol{B} \rceil) \otimes \boldsymbol{z}; \boldsymbol{z} \in \bar{\mathbb{Z}}^n$.

SUMMARY

Max-plus algebra is the linear algebra over the semiring $\bar{\mathbb{R}}$ or $(\mathbb{R}_{max})$ where $\mathbb{R}$ is a set of all real numbers, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\epsilon\}$, and $\epsilon = -\infty$ which is equipped with maximum $\oplus$ and plus $\otimes$ operations. Problems determine eigenvector $\mathbf{x} \in \bar{\mathbb{R}}^n, \mathbf{x} \neq (\epsilon, \epsilon, \ldots, \epsilon)^T$, and the eigenvalue $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$ that satisfies equation $\boldsymbol{B} \otimes \mathbf{x} = \lambda \otimes \mathbf{x}$ where $\boldsymbol{B} \in \bar{\mathbb{R}}^{n\times n}$ is called the eigenproblem. Besides the eigenproblem, there is the subeigenproblem, which are problem determining subeigenvector $\mathbf{x} \in \bar{\mathbb{R}}^n, \mathbf{x} \neq (\epsilon, \epsilon, \ldots, \epsilon)^T$ and the subeigenvalue $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$ that satisfy the inequality $\boldsymbol{B} \otimes \mathbf{x} \leq \lambda \otimes \mathbf{x}$. For $\boldsymbol{B} \in \bar{\mathbb{R}}^{n\times n}$ and $\lambda(\boldsymbol{B}) \leq 0$, defined $\Delta(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{B} \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{B}^{n-1}$.

This research aims to redetermine the integer subeigenvector in the max-plus algebra. The research method used is literature study by using references in the form of books, journals, and other writing about max-plus algebra.

The results obtained in this research are the integer subeigenvector of matrix $\boldsymbol{B} \in \bar{\mathbb{R}}^{n\times n}$, not all entries $\boldsymbol{B}$ are ϵ, which is the vector $\mathbf{x} \in \bar{\mathbb{Z}}^n, \mathbf{x} \neq (\epsilon, \epsilon, \ldots, \epsilon)^T$ that satisfies inequality $\boldsymbol{B} \otimes \mathbf{x} \leq \lambda \otimes \mathbf{x}$, with $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$, $\lambda \geq \lambda(\boldsymbol{B})$, $\lambda > \epsilon$. Integer subeigenvector can be obtained by multiplying $\Delta(\lceil \lambda^{-1} \otimes \boldsymbol{B} \rceil)$ with any integer vector, that is $\boldsymbol{x} = \Delta(\lceil \lambda^{-1} \otimes \boldsymbol{B} \rceil) \otimes \boldsymbol{z}; \boldsymbol{z} \in \bar{\mathbb{Z}}^n$.

PERSEMBAHAN

Skripsi ini kupersembahkan untuk ibu (Musriah), bapak (Masruri), dan kakakku (Siti Mahmudah).

PRAKATA

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan, dorongan, serta bimbingan berbagai pihak. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada

1. Dr. Drs. Siswanto, M.Si. sebagai Pembimbing I yang telah memberikan saran dan bimbingan selama proses penyusunan skripsi ini khususnya bagian materi dan
2. Dra. Purnami Widyaningsih, M.App.Sc. sebagai Pembimbing II yang telah memberikan saran dan bimbingan selama proses penyusunan skripsi ini khususnya bagian penulisan.

Semoga skripsi ini bermanfaat.

Surakarta, September 2020

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR NOTASI

$\mathbb{R}$	:	himpunan semua bilangan real
$\bar{\mathbb{R}}$	:	himpunan gabungan himpunan semua bilangan real dan himpunan ϵ
ϵ	:	negatif tak hingga $(-\infty)$
$\oplus$	:	operasi maksimum
$\otimes$	:	operasi plus
$\mathbb{R}_{maks}$	:	aljabar maks-plus
e	:	elemen identitas terhadap $\otimes$
$\bar{\mathbb{R}}^{n\times n}$	:	himpunan matriks dengan entri bilangan real berukuran $n \times n$ atas aljabar maks-plus
$\bar{\mathbb{R}}^{n}$	:	himpunan vektor dengan entri bilangan real berukuran n atas aljabar maks-plus
$\mathbb{N}$	:	himpunan semua bilangan asli
$\boldsymbol{B}$	:	matriks
$b_{i,j}$	:	entri matriks pada baris ke-i dan kolom ke-j
$(\boldsymbol{B})_{i,j}$	:	notasi lain dari $b_{i,j}$
$\boldsymbol{x}$	:	vektor
M	:	himpunan indeks baris matriks, $M \subseteq \mathbb{N}$
N	:	himpunan indeks kolom matriks, $N \subseteq \mathbb{N}$
$\boldsymbol{B}^{\otimes^k}$	:	matriks $\boldsymbol{B}$ dipangkatkan sebanyak $k, k \in \mathbb{N}$, dengan operasi $\otimes$
$\boldsymbol{I}$	:	matriks identitas
$\mathcal{G}$	:	graf berarah (digraf)
V	:	himpunan vertex
A	:	himpunan *arc*
λ	:	nilai eigen
$\mathcal{G}(\boldsymbol{B})$	:	digraf representasi dari matriks $\boldsymbol{B}$

$w(j,i)$	:	bobot $arc(j,i)$
σ	:	*cycle*
$w(\sigma)$	:	bobot *cycle*
$l(\sigma)$	:	panjang *cycle*
$\mu(\sigma,\boldsymbol{B})$	:	bobot rata-rata *cycle* pada $\boldsymbol{B}$
$\Delta(\boldsymbol{B})$	:	maksimum dari matriks $\boldsymbol{I}$ dengan matriks $\boldsymbol{B}$ sampai $\boldsymbol{B}^{n-1}$
$V(\boldsymbol{B},\lambda)$	:	himpunan vektor eigen dari matriks $\boldsymbol{B}$
$\Lambda(\boldsymbol{B})$	:	himpunan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{B}$
$V^*(\boldsymbol{B},\lambda)$	:	himpunan subvektor eigen dari matriks $\boldsymbol{B}$
$\mathbb{Z}$	:	himpunan semua bilangan bulat
$\bar{\mathbb{Z}}^n$	:	himpunan vektor dengan entri bilangan bulat berukuran n atas aljabar maks-plus
$\bar{\mathbb{Z}}^{n\times n}$	:	himpunan matriks dengan entri bilangan bulat berukuran $n\times n$ atas aljabar maks-plus
$IV^*(\boldsymbol{B},\lambda)$	:	himpunan subvektor eigen bilangan bulat dari matriks $\boldsymbol{B}$
$fr(a)$	:	*fractional part* dari a
$\lfloor\boldsymbol{B}\rfloor$	:	fungsi *floor* dari matriks $\boldsymbol{B}$
$\lceil\boldsymbol{B}\rceil$	:	fungsi *ceiling* dari matriks $\boldsymbol{B}$
$\square$	:	akhir bukti