

**ANALISIS ENERGI DAN FUNGSI GELOMBANG UNTUK  
PARTIKEL DENGAN VARIABEL MASSA YANG  
DIPENGARUHI POTENSIAL *SHAPE INVARIANT*  
DALAM KOORDINAT TOROIDAL**

**TESIS**

**Disusun untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan Mencapai Gelar Magister  
Program Studi Ilmu Fisika  
Minat Utama Fisika Teori dan Komputasi**



**Oleh  
SUCI FANIANDARI  
S911808011**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS SEBELAS MARET  
SURAKARTA**



**2020**

*commit to user*

**ANALISIS ENERGI DAN FUNGSI GELOMBANG UNTUK PARTIKEL  
DENGAN VARIABEL MASSA YANG DIPENGARUHI POTENSIAL  
SHAPE INVARIANT DALAM KOORDINAT TOROIDAL**

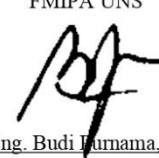
**TESIS**

Oleh  
**SUCI FANIANDARI**  
S911708005

Komisi Pembimbing	Nama	Tanda Tangan	Tanggal
Pembimbing I	Prof. Dra. Suparmi, M.A., Ph.D. NIP. 195209151976032001		12 Agustus 2020
Pembimbing II	Prof. Drs. Cari, M.A., M.Sc., Ph.D. NIP. 196103061985031002		12 Agustus 2020

Telah dinyatakan memenuhi syarat  
Pada tanggal 12 Agustus 2020

Kepala Program Studi Ilmu Fisika  
FMIPA UNS

  
Prof. Dr. Eng. Budi Imanama, S.Si., M.Si.  
NIP. 197311092000031001

*commit to user*

**ANALISIS ENERGI DAN FUNGSI GELOMBANG UNTUK PARTIKEL  
DENGAN VARIABEL MASSA YANG DIPENGARUHI POTENSIAL *SHAPE*  
*INVARIANT* DALAM KOORDINAT TOROIDAL**

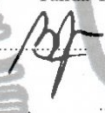


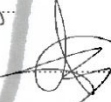
**TESIS**

Oleh

**SUCI FANIANDARI**

S911808011

**Tim Penguji**

Jabatan	Nama	Tanda Tangan
Ketua	Prof. Dr. Eng. Budi Purnama, S.Si., M.Si. NIP. 197311092000031001	
Sekretaris	Dr. Fuad Anwar, S. Si., M. Si. NIP. 197006102000031001	
Anggota Penguji I	Prof. Dra. Suparmi, M.A., Ph.D. NIP. 195209151976032001	
Anggota Penguji II	Prof. Drs. Cari, M.A., M.Sc., Ph.D. NIP. 196103061985031002	

Telah dinyatakan memenuhi syarat  
pada tanggal 27 Agustus 2020 .....

Kepala Program Studi S2 Ilmu Fisika  
FMIPA UNS



Prof. Dr. Eng. Budi Purnama, S.Si., M.Si.  
NIP. 197311092000031001

*commit to user*

**PERNYATAAN KEASLIAN DAN PERSYARATAN PUBLIKASI**

Saya menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa:

1. Tesis yang berjudul: **“ANALISIS ENERGI DAN FUNGSI GELOMBANG UNTUK PARTIKEL DENGAN VARIABEL MASSA YANG DIPENGARUHI POTENSIAL *SHAPE INVARIANT* DALAM KOORDINAT TOROIDAL”** ini adalah karya penelitian saya sendiri dan tidak terdapat karya ilmiah yang pernah diajukan oleh orang lain untuk memperoleh gelar akademik serta tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang tertulis dengan acuan yang disebutkan sumbernya, baik dalam naskah karangan dan daftar pustaka. Apabila ternyata di dalam naskah Tesis ini dapat dibuktikan terdapat unsur-unsur plagiasi, maka saya bersedia menerima sanksi, baik Tesis beserta gelar Magister saya dibatalkan serta diproses sesuai dengan peraturan perundang-undangan yang berlaku.
2. Publikasi sebagian atau keseluruhan isi Tesis pada jurnal atau forum ilmiah harus menyertakan tim pembimbing sebagai *author* dan Pascasarjana UNS sebagai institusinya. Apabila saya melakukan pelanggaran dari ketentuan publikasi ini, maka saya bersedia mendapatkan sanksi akademik yang berlaku.

Surakarta, 12 Agustus 2020

Mahasiswa,

**SUCI FANIANDARI**

**S911808011**

*commit to user*

# ANALISIS ENERGI DAN FUNGSI GELOMBANG UNTUK PARTIKEL DENGAN VARIABEL MASSA YANG DIPENGARUHI POTENSIAL *SHAPE INVARIANT* DALAM KOORDINAT TOROIDAL

SUCI FANIANDARI

Program Studi S2 Ilmu Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,  
Universitas Sebelas Maret

## ABSTRAK

Persamaan Schrodinger diusulkan dalam fisika teoretis untuk mendapatkan informasi dan perilaku suatu sistem partikel. Solusi dari persamaan Schrodinger diselidiki dalam ruang-waktu dengan topologi *nonspherical* di dalam pengaruh potensial Yukawa, potensial Woods-Saxon termodifikasi plus Eckart, dan potensial Rosen Morse plus Poschl Teller. Metode Supersymmetric Quantum Mechanics (SUSY QM) digunakan untuk menyelesaikan persamaan Schrodinger dari partikel dengan variabel massa dalam koordinat toroidal. Solusi ini digunakan untuk mendapatkan nilai eigen energi nonrelativistik dan fungsi gelombang sistem. Persamaan Schrodinger di bagian angular, azimuthal, dan radial diselesaikan secara analitik dan numerik serta diterapkan pada kondisi beberapa jenis molekul. Nilai eigen energi dan fungsi gelombang untuk tingkat dasar dan pertama yang tidak ternormalisasi dapat diperoleh. Hasil penelitian menunjukkan bahwa nilai energi dan fungsi gelombang dipengaruhi oleh bilangan kuantum, parameter potensial, dan konstanta pemisahan variabel. Properti ini dapat digunakan untuk mendapatkan informasi lebih lanjut mengenai sifat termodinamika sistem serta digunakan sebagai titik awal untuk menyelesaikan sistem sejenis yang memiliki kondisi dan potensial geometris yang sama.

**Kata kunci:** persamaan Schrodinger, koordinat Toroidal, variabel massa, potensial Yukawa, potensial Modified Woods-Saxon plus Eckart, potensial Rosen Morse plus Poschl Teller, SUSY QM.

# THE ANALYSIS OF ENERGY AND WAVE FUNCTION FOR PARTICLE WITH VARIABLE MASS UNDER THE INFLUENCE OF SHAPE INVARIANT POTENTIAL IN TOROIDAL COORDINATE

SUCI FANIANDARI

Department of Physics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences,  
Universitas Sebelas Maret

## ABSTRACT

Schrodinger equation was proposed in theoretical physics to get the information and the behavior of the system of particle. The solutions of the Schrodinger equation was investigated in space-times with nonspherical topology in the presence of the Yukawa potential, the modified Woods-Saxon plus Eckart potential, and Rosen Morse plus Poschl Teller potential. The Supersymmetric Quantum Mechanics (SUSY QM) method were used to solve the Schrodinger equation of a variable mass particle in toroidal coordinate. This solution was used to obtain the nonrelativistic energy eigenvalue and the wave function of the system. The Schrodinger equation in the angular, azimuthal, and radial part was solved analytically and numerically then applied to the conditions of several types of molecules. The eigenvalues of energy and the wave function for the ground state and first excited state which are not normalized can be obtained. The results showed that the energy value and wave function were influenced by quantum numbers, potential parameters, and variable separation constants. This property can be used to obtain further information regarding the thermodynamic properties of a system as well as being used as a starting point for solving other system under the same conditions and geometric potentials..

**Keywords:** Schrodinger equation, Toroidal coordinate, Variable mass, Yukawa potential, Modified Woods-Saxon plus Eckart potential, Rosen Morse plus Poschl Teller potential, SUSY QM.

## KATA PENGANTAR

Puji syukur senantiasa penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga tesis yang berjudul “Analisis energi dan fungsi gelombang untuk Partikel dengan Variabel massa yang Dipengaruhi Potensial *Shape Invariant* dalam Koordinat Toroidal” ini dapat diselesaikan dengan baik untuk memenuhi sebagian dari persyaratan guna mendapatkan gelar Magister Ilmu Fisika.

Penulisan tesis ini tidak lepas dari dukungan dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Drs. Harjana, M.Sc., Ph.D. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sebelas Maret.
2. Prof. Dr. Eng. Budi Purnama, S.Si., M.Si. selaku Kepala Program Studi S2 Ilmu Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret dan selaku penguji yang selalu membimbing dan memberi motivasi kepada penulis selama penyelesaian tesis.
3. Prof. Dra. Suparmi, M.A., Ph.D. selaku pembimbing I yang selalu membimbing dengan sabar, memberi pengarahan dan memberi nasehat kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tesis.
4. Prof. Drs. Cari, M.A., M.Sc., Ph.D. selaku pembimbing II yang selalu membimbing dengan sabar, memberi pengarahan dan memberi nasehat kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tesis.
5. Dr. Fuad Anwar, S.Si., M.Si. selaku penguji yang memberi pengarahan dan memberi nasehat kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tesis.
6. Orang tua dan seluruh keluarga yang selalu memberikan semangat dalam menyelesaikan tesis ini.
7. Semua pihak yang telah membantu penyelesaian tesis ini.

Semoga Allah SWT memberikan balasan kebaikan atas semua pengorbanan dan dukungan dari semua pihak. Akhirnya, dengan segala kerendahan hati penulis menyadari masih banyak terdapat kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu dengan segala kerendahan hati, penulis

*commit to user*

mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun. Penulis berharap semoga tesis ini dapat bermanfaat baik bagi penulis maupun pembaca.

Surakarta, 12 Agustus 2020

Mahasiswa

SUCI FANIANDARI

S911808011



## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL .....</b>	<b>i</b>
<b>HALAMAN PERSETUJUAN .....</b>	<b>ii</b>
<b>HALAMAN PENGESAHAN .....</b>	<b>iii</b>
<b>PERNYATAAN KEASLIAN TESIS .....</b>	<b>iv</b>
<b>ABSTRAK .....</b>	<b>v</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>vi</b>
<b>KATA PENGANTAR .....</b>	<b>vii</b>
<b>DAFTAR ISI .....</b>	<b>ix</b>
<b>DAFTAR TABEL .....</b>	<b>xii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR .....</b>	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR SIMBOL .....</b>	<b>xv</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN .....</b>	<b>xvii</b>
<b>DAFTAR PUBLIKASI .....</b>	<b>xviii</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
A. Latar Belakang Masalah .....	1
B. Kebaruan Penelitian .....	5
C. Rumusan Masalah .....	6
D. Tujuan Penelitian .....	7
E. Manfaat Penelitian .....	8
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	
A. Landasan Teori .....	9
1. Persamaan Schrodinger .....	9
2. Koordinat Toroidal .....	11
3. Partikel dengan Variabel massa .....	16
4. Potensial <i>Shape Invariant</i> .....	17
5. Metode <i>Supersymmetric Quantum Mechanics</i> .....	20
6. Pemisahan Variabel .....	22
7. Sifat Termodinamika .....	27
B. Kerangka Berpikir .....	28

C. Hipotesis .....	30
<b>BAB III METODE PENELITIAN</b>	
A. Tempat dan Waktu Penelitian .....	31
B. Bahan dan Alat Penelitian .....	31
C. Tata Laksana Penelitian .....	32
<b>BAB VI HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN</b>	
A. Hasil Penelitian .....	34
1. Penyelesaian persamaan Schrodinger fungsi radial dengan variabel massa dalam koordinat toroidal untuk potensial <i>central</i> Yukawa .....	34
2. Penyelesaian persamaan Schrodinger fungsi radial dengan variabel massa dalam koordinat toroidal untuk potensial <i>central</i> Woods-Saxon termodifikasi plus Eckart .....	44
3. Penyelesaian persamaan Schrodinger fungsi radial, angular, dan azimuthal dengan variabel massa dalam koordinat toroidal untuk potensial <i>non-central</i> Rosen Morse plus Poschl Teller .....	61
B. Pembahasan .....	92
1. Analisis penyelesaian persamaan Schrodinger fungsi radial dengan variabel massa dalam koordinat toroidal untuk potensial <i>central</i> Yukawa .....	92
2. Analisis penyelesaian persamaan Schrodinger fungsi radial dengan variabel massa dalam koordinat toroidal untuk potensial <i>central</i> Woods-Saxon termodifikasi plus Eckart .....	94
3. Analisis penyelesaian persamaan Schrodinger fungsi radial, angular, dan azimuthal dengan variabel massa dalam koordinat toroidal untuk potensial <i>non-central</i> Rosen Morse plus Poschl Teller ... ..	99
C. Nilai-nilai Kebaruan .....	104
D. Keterbatasan Penelitian .....	104
<b>BAB V SIMPULAN, IMPLIKASI, DAN SARAN</b>	
A. Simpulan .....	105

B. Implikasi .....	107
C. Saran .....	107
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>102</b>
<b>LAMPIRAN .....</b>	<b>112</b>



## DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
4.1 Tingkatan Energi untuk Potensial Yukawa dalam Koordinat Toroidal.....	37
4.2 Parameter Model untuk Beberapa Molekul.....	48
4.3 Nilai Eigen Energi Beberapa Molekul dengan Variasi Bilangan Kuantum .....	49
4.4 Hubungan Nilai Energi Molekul Cobalt dengan Suhu dan Kapasitas Panas .....	50
4.5 Nilai Eigen Energi untuk Beberapa Molekul dengan Variasi Parameter Potensial .....	52
4.6 Nilai Eigen Energi untuk Beberapa Partikel dengan Variasi Konstanta Pemisah Variabel .....	54
4.7 Parameter Model untuk Beberapa Molekul Diatomik.....	76
4.8 Nilai Eigen Energi untuk Beberapa Molekul Diatomik dengan Variasi Bilangan Kuantum .....	77

## DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
2.1 Perpotongan Bola, Torus, dan Bidang Azimuth .....	12
2.2 Sistem Koordinat Toroidal ( $r, \varphi_1, \varphi_2$ ).....	12
2.3 Gambar 2.3 Grafik Fungsi Massa $m$ dengan Variasi $\eta, m_0 = 1, a = 1$ .....	16
2.4 Grafik Fungsi Massa $m$ dengan Variasi $\mu, m_0 = 1, a = 1$ .....	17
2.5 Kerangka Berfikir .....	28
3.1 Diagram Alir Prosedur Penelitian.....	32
4.1 Grafik Tingkatan Energi untuk Potensial Yukawa dalam Koordinat Toroidal.....	38
4.2 Visualisasi Fungsi Gelombang Bagian Radial Tingkat Dasar Terpengaruh Potensial Yukawa dalam Koordinat Toroidal .....	40
4.3 Visualisasi Fungsi Gelombang Bagian Radial Tingkat Pertama Terpengaruh Potensial Yukawa dalam Koordinat Toroidal .....	42
4.4 Nilai Eigen Energi dengan Variasi Bilangan Kuantum $n$ untuk Molekul Berbeda .....	51
4.5 Nilai Eigen Energi dengan Variasi Parameter Potensial untuk Molekul Berbeda .....	53
4.6 Nilai Eigen Energi dengan Variasi Konstanta Pemisah Variabel untuk Molekul Berbeda .....	54
4.7 Visualisasi Fungsi Gelombang Bagian Radial Tingkat Dasar Terpengaruh Potensial Woods-Saxon Termodifikasi Plus Eckart dalam Koordinat Toroidal .....	56
4.8 Visualisasi Fungsi Gelombang Bagian Radial Tingkat Pertama Terpengaruh Potensial Woods-Saxon Termodifikasi Plus Eckart dalam Koordinat Toroidal.....	59
4.9 Visualisasi Fungsi Gelombang Bagian Angular Tingkat Dasar dalam Koordinat Toroidal .....	64

*commit to user*

4.10 Visualisasi Fungsi Gelombang Bagian Angular Tingkat Pertama dalam Koordinat Toroidal .....	65
4.11 Visualisasi Fungsi Gelombang Bagian Azimuthal Tingkat Dasar dalam Koordinat Toroidal .....	70
4.12 Visualisasi Fungsi Gelombang Bagian Azimuthal Tingkat Pertama dalam Koordinat Toroidal .....	72
4.13 Nilai Eigen Energi dengan Variasi $n_\mu$ (Bilangan Kuantum Radial) untuk Molekul Diatomik .....	78
4.14 Nilai Eigen Energi dengan Variasi $n_\eta$ (Bilangan Kuantum Angular) untuk Molekul Diatomik .....	79
4.15 Nilai Eigen Energi dengan Variasi $n_\phi$ (Bilangan Kuantum Azimuthal) untuk Molekul Diatomik .....	80
4.16 Visualisasi Fungsi Gelombang Bagian Radial Tingkat Dasar dalam Koordinat Toroidal .....	82
4.17 Visualisasi Fungsi Gelombang Bagian Radial Tingkat Pertama dalam Koordinat Toroidal .....	83
4.18 Visualisasi Fungsi Partisi Vibrasi .....	85
4.19 Visualisasi Energi Rata-Rata Vibrasi .....	86
4.20 Visualisasi Kapasitas Kalor Spesifik Vibrasi .....	87
4.21 Visualisasi Energi Bebas Rata-Rata Vibrasi .....	89
4.22 Visualisasi Entropi Vibrasi .....	91

## DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan	Satuan
$\mu$	Variabel fungsi radial	-
$\eta$	Variabel fungsi angular	-
$\phi$	Variabel fungsi azimuthal	-
$\vec{p}$	Momentum linier	kg.m/s
$\lambda$	Panjang gelombang	nm
$\hbar$	$h/2\pi$	-
$h$	Konstanta Planck	eV.s
$\vec{v}$	Kecepatan gerak partikel	m/s
$k$	Angka gelombang	-
$\nu$	Frekuensi gelombang	Hz
$\omega$	Kecepatan sudut	rad/s
$E_k$	Energi kinetik	eV
$E_p$	Energi potensial	eV
$m$	Massa	kg
$m_0$	Konstanta partikel dengan variabel massa	kg
$c$	Kecepatan Cahaya	m/s
$h_\mu$	<i>Scaling factor</i> fungsi radial	-
$h_\eta$	<i>Scaling factor</i> fungsi angular	-
$h_\phi$	<i>Scaling factor</i> fungsi azimuthal	-
$E$	Energi Total	eV
$\nabla$	Operator del	-
$\Psi$	Fungsi Gelombang	-
$\Psi_0$	Fungsi Gelombang Tingkat Dasar	-
$\nabla^2$	Operator Laplacian	-
$g_{ij}$	Riemannian	-
$Q_i$	Operator muatan super	-
$H_{ss}$	Hamiltonian Supersimetri	-

$A^\dagger$	Operator Penaik	-
$A$	Operator Penurun	-
$V_+, V_-$	Pasangan Potensial Supersimetri	-
$H_+, H_-$	Pasangan Hamiltonian Supersimetri	-
$\Phi$	Superpotential	-
$n$	Bilangan Kuantum	-
$V_0$	Kedalaman potensial Yukawa	nm
$\xi$	Lebar potensial Yukawa	nm
$B, D, F$	Parameter potensial Woods-Saxon	-
$A, C$	Parameter potensial Eckart	-
$b, c$	Parameter potensial Rosen Morse untuk fungsi angular	-
$v, q$	Parameter potensial Rosen Morse untuk fungsi azimuth	-
$x, \lambda$	Parameter potensial Poschl Teller	-
$\chi_1, \chi_2$	Konstanta pemisah variabel	-
$n_\mu$	Bilangan kuantum radial	0,1,2,3,...
$n_\eta$	Bilangan kuantum angular	0,1,2,3,...
$n_\phi$	Bilangan kuantum azimuthal	0,1,2,3,...
$\beta$	Fungsi Temperatur	eV <sup>-1</sup>
$\zeta$	Nilai maksimum bilangan kuantum radial	-
$k$	Konstanta Boltzmann	eV.K <sup>-1</sup>
$Z$	Fungsi pertisi vibrasi	-
$U$	Energi rata-rata vibrasi	eV
$C$	Kapasitas panas spesifik vibrasi	J/cm <sup>3</sup> .K
$F$	Energi bebas rata-rata	eV
$S$	Entropi Vibrasi	eV/K

*commit to user*

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Halaman
1 Jadwal Penelitian .....	112
2 Perhitungan $h_\mu, h_\eta, h_\phi$ .....	113
3 Perhitungan Matematis Laplacian dalam Koordinat Toroidal .....	116
4 Penyederhanaan Persamaan Fungsi Radial .....	120
5 Penjabaran Matematis untuk Potensial <i>Central</i> Yukawa .....	122
6 Penjabaran Matematis untuk Potensial <i>Central</i> Woods-Saxon Termodifikasi Plus Eckart .....	131
7 Penjabaran Matematis untuk Potensial <i>Non-Central</i> Rosen Morse Plus Poschl Teller .....	146
8 <i>Script</i> pemrograman GNU Octave 4.4.1 .....	173
9 Artikel Publikasi .....	206

## DAFTAR PUBLIKASI

Publikasi	Halaman
1 Suci Faniandari, A. Suparmi, and C. Cari. 2020. “Analytical Solution of Schrödinger Equation for Yukawa Potential with Variable Mass in Toroidal Coordinate Using Supersymmetric Quantum Mechanics”. <i>Periodico Tche Quimica</i> . Vol 17, No. 35. ....	206
2 A. Suparmi, C. Cari, and Suci Faniandari. 2020. “Eigen solutions of the Schrodinger equation with variable mass under the influence of the linear combination of modified Woods–Saxon and Eckart potentials in toroidal coordinate”. <i>Molecular Physics</i> . Vol 2020, No. e1781946.....	215
2 S. Faniandari, M. Ma’arif, A. Suparmi, and C. Cari. 2019. “Renyi entropy of ground state eigen function of non-relativistic particle in the presence of DRSCO potential and cosmic string framework”. <i>AIP Conference Proceedings</i> . Vol 2202, No. 020031 .....	225
4 M. Ma’arif, S. Faniandari, A. Suparmi, C. Cari, and N. A. Pambudi. 2019. “Tsallis entropy of ground state classical cosmic string framework with DRSCO potential”. <i>AIP Conference Proceedings</i> . Vol 2202, No. 020032.....	229