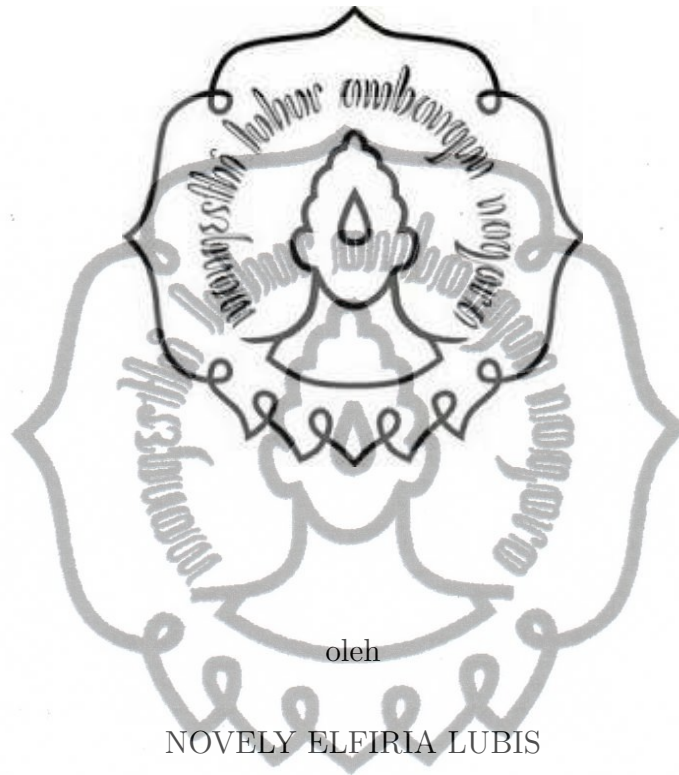


KEKUATAN SISI REFLEKSIF PADA GRAF *FIRECRACKER*  
DAN GRAF TANGGA



oleh

NOVELY ELFIRIA LUBIS

M0117053

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan  
memperoleh gelar Sarjana Matematika

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS SEBELAS MARET SURAKARTA

co-2021 to user

KEKUATAN SISI REFLEKSIF PADA GRAF *FIRECRACKER* DAN GRAF  
TANGGA

SKRIPSI

NOVELY ELFIRIA LUBIS

NIM. M0117053

dibimbing oleh

Pembimbing I



Dr. Dra. Diari Indriati, M.Si.

NIP. 19610112 198811 2 001

Pembimbing II

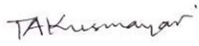





Bowo Winarno, S.Si., M.Kom.

NIP. 19810430 200812 1 001

dipertahankan di depan Dewan Penguji  
dan dinyatakan telah memenuhi syarat  
pada hari Kamis tanggal 24 Juni 2021

Dewan Penguji

Jabatan	Nama dan NIP	Tanda Tangan	Tanggal
Ketua	Prof. Tri Atmojo Kusmayadi, M.Sc., Ph.D. NIP. 19630826 198803 1 002		11/07/2021
Sekretaris	Dr. Siswanto, M.Si. NIP. 19670813 199203 1 002		13/07/2021
Anggota Penguji	Dr. Dra. Diari Indriati, M.Si. NIP. 19610112 198811 2 001		12/07/2021
	Bowo Winarno, S.Si., M.Kom. NIP. 19810430 200812 1 001		11/07/2021

Disahkan  
di Surakarta pada tanggal **13/07/2021**

Kepala Program Studi Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Sebelas Maret Surakarta



Dr. Drs. Siswanto, M.Si.

NIP. 19670813 199203 1 002

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul “Kekuatan Sisi Refleksif pada Graf *Firecracker* dan Graf Tangga” belum pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan pada suatu perguruan tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga belum pernah ditulis atau dipublikasikan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar rujukan.



Surakarta, Juni 2021

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Novely', written over a horizontal line.

Novely Elfiria Lubis

## RINGKASAN

Novely Elfiria Lubis, 2021. KEKUATAN SISI REFLEKSIF PADA GRAF FIRECRACKER DAN GRAF TANGGA. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret.

Misalkan  $G$  merupakan graf sederhana dan terhubung dengan himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$ . Pelabelan- $k$  refleksif tak teratur sisi (*edge irregular reflexive  $k$ -labeling*) pada graf  $G$  adalah pemberian label untuk sisi dengan bilangan bulat positif  $\{1, 2, \dots, k_e\}$  dan bilangan genap dari  $\{0, 2, \dots, 2k_v\}$  untuk label titik, dengan  $k = \max\{k_e, 2k_v\}$  sehingga bobot pada setiap sisi dari graf  $G$  berbeda. Bobot sisi didefinisikan sebagai jumlahan label sisi dengan semua label titik yang *incident* dengan sisi tersebut. Bobot sisi  $xy$  terhadap pelabelan  $f$  dari graf  $G$  dinotasikan  $wt_f(xy)$ . Kekuatan sisi refleksif dari graf  $G$  yang dinotasikan dengan  $res(G)$  adalah nilai minimum  $k$  dari label terbesar pada graf  $G$ . Graf *firecracker* adalah sebuah graf yang berasal dari rangkaian  $m$  *star*  $S_n$  dan  $n$  adalah banyaknya *vertex* pada *star*  $S_n$  dengan menghubungkan salah satu daunnya untuk tiap-tiap *star*, yang dinotasikan dengan  $F_{m,n}$  dengan  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ . Selanjutnya, graf tangga adalah graf yang dibentuk dari hasil kali kartesius graf lintasan dengan dua titik dan graf lintasan dengan  $n$  titik, yang dinotasikan dengan  $L_n$  dengan  $n > 1$ .

Dalam penelitian ini, ditentukan  $res(F_{m,n})$  untuk  $m \geq 2$ ,  $n \geq 2$  dan  $res(L_n)$  untuk  $n > 1$ . Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka.

Hasil penelitian menyatakan bahwa  $res(F_{m,n})$  dengan  $m \geq 2$ ,  $n \geq 2$  adalah  $\frac{mn}{3}$  untuk  $m \equiv 0 \pmod{6}$ ,  $n \geq 2$ ;  $(\frac{mn+2}{3}) - 1$  untuk  $m \equiv 1 \pmod{6}$ ,  $n \equiv 1 \pmod{6}$ ;  $(\frac{m-1}{3})n + 2\lceil\frac{n}{6}\rceil$  untuk  $m \equiv 1 \pmod{6}$ ,  $n \not\equiv 1 \pmod{6}$ ;  $(\frac{m-2}{3})n + 2\lceil\frac{n}{3}\rceil$  untuk  $m \equiv 2 \pmod{6}$ ,  $n \not\equiv 1, 4 \pmod{6}$ ;  $(\frac{m-2}{3})n + 2\lceil\frac{n}{3}\rceil - 1$ , untuk  $m \equiv 2 \pmod{6}$ ,  $n \equiv 1, 4 \pmod{6}$ ;  $\frac{mn}{3} + 1$  untuk  $m \equiv 3 \pmod{6}$ ,  $n$  ganjil;  $\frac{mn}{3}$  untuk  $m \equiv 3 \pmod{6}$ ,  $n$  genap;  $((\frac{m+2}{3})n - 2) - 2\lceil\frac{n-3}{3}\rceil$  untuk  $m \equiv 4 \pmod{6}$ ,  $n \equiv 0, 3 \pmod{6}$ ;  $(\frac{mn+2}{3})$  untuk  $m \equiv 4 \pmod{6}$ ,  $n \equiv 1, 2, 4 \pmod{6}$ ;  $(\frac{m-1}{3})n + 2\lceil\frac{n}{6}\rceil$  untuk  $m \equiv 4 \pmod{6}$ ,  $n \equiv 5 \pmod{6}$ ;  $(\frac{m-2}{3})n + 2\lceil\frac{n}{3}\rceil - 1$  untuk  $m \equiv 5 \pmod{6}$ ,  $n \equiv 4 \pmod{6}$ ;  $(\frac{mn+2}{3}) - 1$  untuk  $m \equiv 5 \pmod{6}$ ,  $n \equiv 5 \pmod{6}$ ;  $(\frac{m+1}{3})n - 2\lceil\frac{n}{6}\rceil$  untuk  $m \equiv 5 \pmod{6}$ ,  $n \not\equiv 4, 5 \pmod{6}$ . Sementara  $res(L_n)$  untuk  $n > 1$  adalah  $n$  untuk setiap  $n$ .

## SUMMARY

Novely Elfiria Lubis, 2021. REFLEXIVE EDGE STRENGTH ON FIRECRACKER GRAPH AND LADDER GRAPH. Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Sebelas Maret University.

Let  $G$  be an undirected and connected graph with vertex set  $V(G)$  and edge set  $E(G)$ . An edge irregular reflexive  $k$ -labeling of a graph  $G$  is a labeling which chooses positive integers numbers  $\{1, 2, \dots, k_e\}$  as labels for edges and takes non negative even numbers  $\{0, 2, \dots, 2k_v\}$  as vertex labels, where  $k = \max\{k_e, 2k_v\}$ , such that all edges of graph  $G$  have different weights. The weight of an edge  $xy$  to the labeling  $f$  of the graph  $G$  denoted by  $wt_f(xy)$ , defined as the sum of edge labels which all incident on that edge. The minimum  $k$  for which such labeling exists is called reflexive edge strength of graph  $G$ , denoted by  $res(G)$ . A firecracker graph is the graph originating from a series of  $m$  stars  $S_n$  and  $n$  is the number of vertices in star  $S_n$  by connecting one of its leaves for each star, denoted by  $F_{m,n}$  where  $m \geq 2$  and  $n \geq 2$ . While, a ladder graph is the graph formed from a cartesian product of a path graph with two vertices and a path graph with  $n$  vertices, denoted by  $L_n$  where  $n > 1$ .

In this research, we determined  $res(F_{m,n})$  for  $m \geq 2$ ,  $n \geq 2$  and  $res(L_n)$  for  $n > 1$ . The research method in this paper is literature study.

The results of this research are as follows. We obtain  $res(F_{m,n})$  with  $m \geq 2$ ,  $n \geq 2$  are  $\frac{mn}{3}$  for  $m \equiv 0 \pmod{6}$ ,  $n \geq 2$ ;  $(\frac{mn+2}{3}) - 1$  for  $m \equiv 1 \pmod{6}$ ,  $n \equiv 1 \pmod{6}$ ;  $(\frac{m-1}{3})n + 2\lceil\frac{n}{6}\rceil$  for  $m \equiv 1 \pmod{6}$ ,  $n \not\equiv 1 \pmod{6}$ ;  $(\frac{m-2}{3})n + 2\lceil\frac{n}{3}\rceil$  for  $m \equiv 2 \pmod{6}$ ,  $n \not\equiv 1, 4 \pmod{6}$ ;  $(\frac{m-2}{3})n + 2\lceil\frac{n}{3}\rceil - 1$ , for  $m \equiv 2 \pmod{6}$ ,  $n \equiv 1, 4 \pmod{6}$ ;  $\frac{mn}{3} + 1$  for  $m \equiv 3 \pmod{6}$ ,  $n$  odd;  $\frac{mn}{3}$  untuk  $m \equiv 3 \pmod{6}$ ,  $n$  even;  $((\frac{m+2}{3})n - 2) - 2\lceil\frac{n-3}{3}\rceil$  for  $m \equiv 4 \pmod{6}$ ,  $n \equiv 0, 3 \pmod{6}$ ;  $(\frac{mn+2}{3})$  for  $m \equiv 4 \pmod{6}$ ,  $n \equiv 1, 2, 4 \pmod{6}$ ;  $(\frac{m-1}{3})n + 2\lceil\frac{n}{6}\rceil$  for  $m \equiv 4 \pmod{6}$ ,  $n \equiv 5 \pmod{6}$ ;  $(\frac{m-2}{3})n + 2\lceil\frac{n}{3}\rceil - 1$  for  $m \equiv 5 \pmod{6}$ ,  $n \equiv 4 \pmod{6}$ ;  $(\frac{mn+2}{3}) - 1$  for  $m \equiv 5 \pmod{6}$ ,  $n \equiv 5 \pmod{6}$ ;  $(\frac{m+1}{3})n - 2\lceil\frac{n}{6}\rceil$  for  $m \equiv 5 \pmod{6}$ ,  $n \not\equiv 4, 5 \pmod{6}$ . Meanwhile,  $res(L_n)$  for  $n > 1$  is  $n$  for each  $n$ .

## MOTO

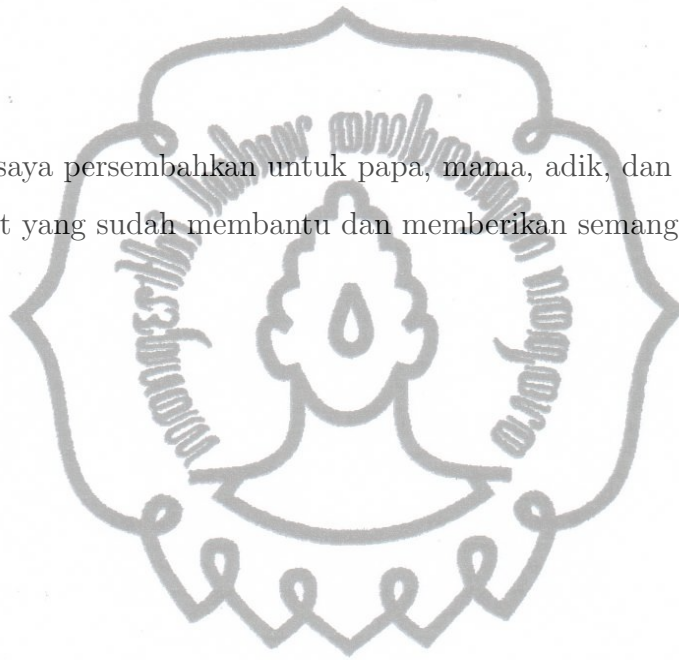
*"Carilah dahulu Kerajaan Allah dan kebenarannya, maka semuanya itu akan ditambahkan kepadamu." (Matius 6:33)*

*"Raihlah cita-citamu setinggi bintang di langit tetapi rendahkanlah hatimu serendah mutiara di dasar lautan."*

*commit to user*

## PERSEMBAHAN

Karya ini saya persembahkan untuk papa, mama, adik, dan orang-orang terdekat yang sudah membantu dan memberikan semangat selalu.



*commit to user*

## PRAKATA

Puji syukur kepada Tuhan Yesus Kristus atas segala kasih dan anugerahnya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa terwujudnya skripsi ini tidak akan berhasil dengan baik tanpa bantuan dari berbagai pihak.

Dengan selesainya skripsi ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada

1. Dr. Dra. Diari Indriati, M.Si. sebagai Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan mengenai materi serta dukungan dan motivasi sehingga skripsi ini dapat terselesaikan,
2. Bowo Winarno, S.Si., M.Kom. sebagai Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan mengenai penulisan dan motivasi sehingga skripsi ini dapat terselesaikan,
3. Papa Boston Lubis, Mama Meifi Morisa Massie, Audry, dan Evan yang selalu memberikan doa dan dukungan selama penyelesaian skripsi ini,
4. Ecel, Renot, Eten, Ijul, Hari, Cinto, dan Pipo yang memberikan semangat dalam menyelesaikan skripsi ini,
5. Celine, Epe, dan bang Kia yang selalu membantu dan memberikan semangat selama perkuliahan dan menyelesaikan skripsi ini, dan
6. Coco, Pia, Gaby dan bang Remon yang memberikan semangat dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pembaca.

Surakarta, Juni 2021

*commit to user*

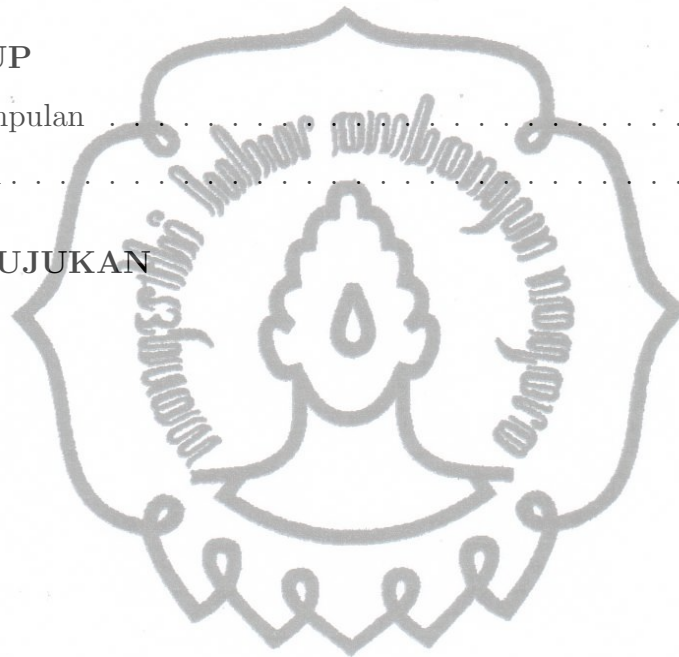
Penulis



## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL . . . . .	i
PENGESAHAN . . . . .	ii
PERNYATAAN . . . . .	iii
RINGKASAN . . . . .	iv
<i>SUMMARY</i> . . . . .	v
MOTO . . . . .	vi
PERSEMBAHAN . . . . .	vii
PRAKATA . . . . .	viii
DAFTAR ISI . . . . .	x
DAFTAR GAMBAR . . . . .	xi
DAFTAR NOTASI DAN SIMBOL . . . . .	xii
<b>I PENDAHULUAN</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang Masalah . . . . .	1
1.2 Perumusan Masalah . . . . .	2
1.3 Tujuan Penelitian . . . . .	2
1.4 Manfaat Penelitian . . . . .	2
<b>II LANDASAN TEORI</b> . . . . .	<b>3</b>
2.1 Tinjauan Pustaka . . . . .	3
2.2 Teori Penunjang . . . . .	4
2.2.1 Pengertian Dasar Graf . . . . .	4
2.2.2 Operasi pada Graf . . . . .	5
2.2.3 Kelas-kelas Graf . <i>commit to user</i> . . . . .	6
2.2.4 Pelabelan Refleksif Tak Teratur Sisi . . . . .	9

2.2.5 Kerangka Pemikiran . . . . .	10
<b>III METODE PENELITIAN</b>	<b>12</b>
<b>IV HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	<b>13</b>
4.1 Kekuatan Sisi Refleksif pada Graf <i>Firecracker</i> . . . . .	13
4.2 Kekuatan Sisi Refleksif pada Graf Tangga . . . . .	25
<b>V PENUTUP</b>	<b>29</b>
5.1 Kesimpulan . . . . .	29
5.2 Saran . . . . .	29
<b>DAFTAR RUJUKAN</b>	<b>30</b>



## DAFTAR GAMBAR

2.1	Graf $G$ . . . . .	4
2.2	Graf $G_1$ . . . . .	5
2.3	Perkalian kartesius graf $L_3 = P_2 \times P_3$ . . . . .	6
2.4	Graf Tree . . . . .	7
2.5	Graf Siklus $C_n$ . . . . .	7
2.6	Graf Lintasan $P_n$ . . . . .	7
2.7	Graf <i>star</i> $S_4$ . . . . .	8
2.8	Graf <i>firecracker</i> $F_{m,n}$ . . . . .	8
2.9	Graf tangga $L_n$ untuk $n > 1$ . . . . .	9
4.1	Graf <i>firecracker</i> $F_{m,n}$ dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ . . . . .	13
4.2	Pelabelan-3 Refleksif Tak Teratur Sisi pada Graf <i>firecracker</i> $F_{2,4}$ . . . . .	24
4.3	Graf tangga $L_n$ untuk $n > 1$ . . . . .	25
4.4	Pelabelan-3 Refleksif Tak Teratur Sisi pada Graf Tangga $L_3$ . . . . .	27

## DAFTAR NOTASI DAN SIMBOL

$G$	: Graf $G$
$xy$	: Sisi $xy$
$V(G)$	: Himpunan titik dari graf $G$
$E(G)$	: Himpunan sisi dari graf $G$
$ V(G) $	: Banyaknya titik dari graf $G$ ( <i>order</i> )
$ E(G) $	: Banyaknya sisi dari graf $G$ ( <i>size</i> )
$k$	: Bilangan bulat positif terkecil dari label terbesar dari suatu pelabelan
$deg_G(v)$	: Derajat titik $v$ dari graf $G$
$P_2 \times P_3$	: Perkalian kartesius dari graf $P_2$ dan $P_3$
$C_n$	: Graf siklus dengan <i>order</i> $n$
$P_n$	: Graf lintasan dengan <i>order</i> $n$
$S_n$	: Graf star
$F_{m,n}$	: Graf <i>firecracker</i> dengan <i>order</i> $mn$
$L_n$	: Graf tangga dengan <i>order</i> $2n$
$res(G)$	: Kekuatan sisi refleksif dari graf $G$
$f$	: Suatu pemetaan yang membawa elemen-elemen graf ke bilangan-bilangan non negatif (pelabelan)
$f(x)$	: Label titik $x$
$f(y)$	: Label titik $y$
$f(xy)$	: Label sisi $xy$
$wt_f(xy)$	: Bobot sisi $xy$ dari pelabelan $f$

- $\lceil a \rceil$  : *Ceiling* dari  $a$  (bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan  $a$ )
- $\lfloor a \rfloor$  : *Flooring* dari  $a$  (bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan  $a$ )
- $\in$  : Anggota
- $=$  : Sama dengan
- $\neq$  : Tidak sama dengan
- $<$  : Lebih kecil dari
- $>$  : Lebih besar dari
- $\leq$  : Kurang dari atau sama dengan
- $\geq$  : Lebih dari atau sama dengan
- $\equiv$  : Ekuivalen
- $\not\equiv$  : Tidak ekuivalen
- $\square$  : Akhir bukti

