

**HARGA OPSI DENGAN *RETURN* STOKASTIK
MENGUNAKAN MODEL *BLACK-SCHOLES***



oleh
NOVANDRY WIDYASTUTI
M0105013

SKRIPSI
ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan
memperoleh gelar Sarjana Sains Matematika

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS SEBELAS MARET
SURAKARTA
2009
SKRIPSI

Harga opsi dengan *return* stokastik menggunakan model *black-scholes*

yang disiapkan dan disusun oleh

Novandry Widyastuti

M.0105013

dibimbing oleh

Pembimbing I

Pembimbing II

Dra. Respatiwulan, M.Si.

Drs. Sutrima, M.Si.

NIP. 19680611 199302 2 001

NIP. 19661007 199302 1

001

telah dipertahankan di depan Dewan Penguji

pada hari Jumat, tanggal 17 Juli 2009

dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Anggota Tim Penguji

Tanda Tangan

1. Drs. Kartiko, M.Si.

1.

NIP. 19500715 198601 1 001

.....

2. Irwan Susanto, DEA.

2.

NIP. 19710511 199512 1 001

.....

3. Dra. Sri Kuntari, M.Si.

3.

NIP. 19730225 199903 2 001

.....

Surakarta, 27 Juli 2009

Disahkan oleh

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dekan,

Ketua Jurusan Matematika,

Prof. Drs. Sutarno, M.Sc. Ph.D

Drs. Kartiko, M.Si.

NIP. 19600809 198612 1 001

NIP. 19500715 198601 1 001

ABSTRAK

Novandry Widyastuti, 2009. HARGA OPSI DENGAN RETURN STOKASTIK MENGGUNAKAN MODEL BLACK-SCHOLES. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret.

Istilah investasi berkaitan dengan berbagai macam aktivitas. Pada umumnya aktivitas yang dilakukan yaitu menginvestasikan sejumlah dana pada aset riil maupun aset finansial. Investasi aset finansial yang sering dilakukan oleh investor salah satunya adalah opsi.

Opsi merupakan suatu jenis kontrak yang memberikan hak, bukan kewajiban, kepada pembeli untuk membeli atau menjual suatu aset pada harga dan waktu yang telah disepakati bersama. Hak untuk membeli suatu saham dengan harga dan waktu yang telah disepakati bersama disebut opsi beli, sedangkan hak untuk menjual suatu saham dengan harga dan waktu yang telah disepakati bersama disebut opsi jual.

Model *Black-Scholes* merupakan model penentuan harga opsi yang telah banyak diterima oleh sektor finansial. Model ini memiliki beberapa asumsi yaitu opsi yang digunakan tipe Eropa, tidak memberikan pembayaran dividen, tidak ada biaya transaksi, tingkat bunga bebas resiko diketahui, serta perubahan harga saham mengikuti pola random. Tingkat suku bunga merupakan bagian utama dari *return* pada portofolio yang dapat menyebabkan fluktuasi. Resiko saat ini dalam harga saham adalah konstan dan sama dengan laju resiko bebas. Pada analisis selanjutnya, akan diasumsikan bahwa laju perubahan tingkat suku bunga jangka pendek dijelaskan melalui model Vasicek.

Tujuan penelitian ini adalah menentukan penurunan ulang model *Black-Scholes* dengan *return* stokastik dan menentukan harga opsi beli berdasarkan model *Black-Scholes* dengan *return* stokastik.

Hasilnya adalah dengan asumsi-asumsi model *Black-Scholes* dan model Vasicek sebagai *return* stokastik dapat diperoleh bentuk penyelesaian model *Black-Scholes* dalam penentuan harga opsi dengan *return* stokastik.

ABSTRACT

Novandry Widyastuti, 2009. OPTION PRICING WITH STOCHASTIC RETURN USING BLACK-SCHOLES MODEL. Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Sebelas Maret University.

Investment is related to various activity. Commonly, the activity is done with investing funds of real assets and financial assets. The financial asset is done by investor such as option.

Option is a contract between two sides where one of side gives the right to another side for buying or selling certain asset in exercise price and period. The right for buying a stock with certain price is called call option, while the right for selling a stock with certain price is called put option.

Black-Scholes model is a model used to determine an option price that has accepted by finance sector. The assumptions of this model are an option that used with European type, no dividend payment, no transaction cost, the risk free of interest rate is know, and the change of stock price follow a random pattern. The interest rate is essential for the return on a portfolio that can cause a fluctuations. The risk in stock price process is taken as constant and equal to the risk free rate. In further analysis, we shall assume that this short-term interest rate is represented by the Vasicek model.

The aims of this research are to rederive Black-Sholes model with stochastic return and to determine call option price with stochastic return based on Black-Scholes model.

As the results, the solution of Black-Scholes model in determining call option price with return stochastic is obtained based on Black-scholes model assumptions and Vasicek model as a stochastic return.

MOTO

“...niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang berilmu pengetahuan dengan beberapa derajat”.

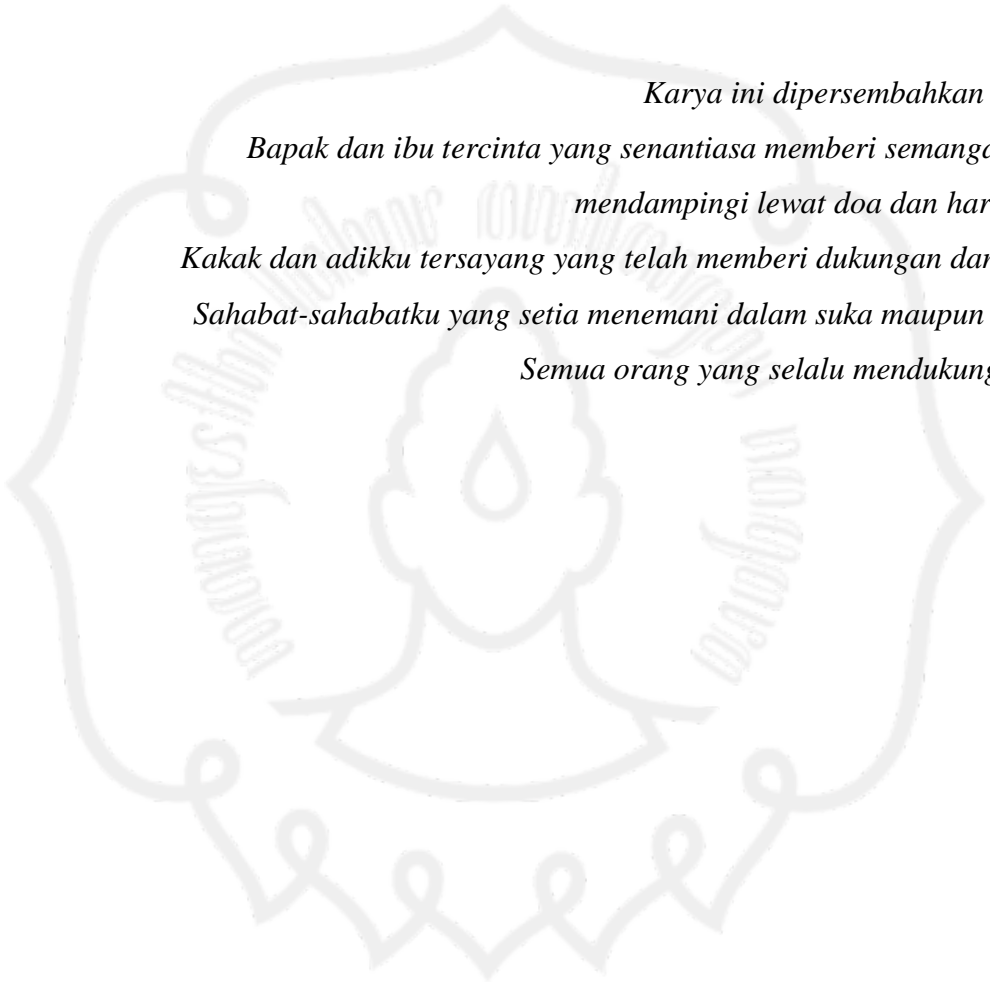
(QS. Al-Mujadalah : 11)

“Semua masalah pasti ada jalan keluarnya”

(Anonim)



PERSEMBAHAN



*Karya ini dipersembahkan untuk
Bapak dan ibu tercinta yang senantiasa memberi semangat dan
mendampingi lewat doa dan harapan.
Kakak dan adikku tersayang yang telah memberi dukungan dan doa.
Sahabat-sahabatku yang setia menemani dalam suka maupun duka.
Semua orang yang selalu mendukung aku.*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulisan skripsi ini dapat penulis selesaikan.

Ucapan terima kasih juga penulis sampaikan kepada :

1. Dra. Respatiwulan M.Si dan Drs. Sutrima, M.Si sebagai dosen pembimbing I dan II yang telah membimbing dan banyak memberikan masukan dalam penulisan skripsi ini.
2. Sahabatku Nia, Betty, Tia, Tina dan Isna yang telah banyak membantu selama masa perkuliahan dan memberikan semangat untuk segera menyelesaikan penulisan skripsi ini.
3. Teman-teman matematika 2005 yang telah memberikan dukungan dalam penulisan skripsi ini.
4. Serta pihak-pihak yang telah membantu dan mendukung terselesaikannya penulisan skripsi ini.

Terakhir, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang membacanya.

Surakarta, Juli 2009

Penulis

DAFTAR ISI

JUDUL	i
PENGESAHAN.....	ii
ABSTRAK	iii
ABSTRACT	iv
MOTO.....	v
PERSEMBAHAN.....	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR NOTASI.....	x
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang.....	1
1.2. Perumusan Masalah	2
1.3. Batasan Masalah	2
1.4. Tujuan.....	3
1.5. Manfaat.....	3
BAB II LANDASAN TEORI	4
2.1. Tinjauan Pustaka.....	4
2.1.1. Aspek-aspek Opsi.....	4
2.1.2. Distribusi Normal	8
2.1.3. Model Stokastik.....	10
2.1.3.1. Sifat Markov.....	10
2.1.3.2. Sifat Martingale.....	10
2.1.3.3. Variansi Kuadrat.....	11
2.1.3.4. Proses Stokastik Gerak Brown (<i>Brownian motion</i>).....	11
2.1.4. Persamaan Diferensial Stokastik	12
2.1.5. Model Harga Saham	13
2.1.6. Model <i>Black-Scholes</i>	14
2.1.7. Formula Ito.....	16
2.1.8. Model <i>Black-Scholes</i> untuk Opsi Beli Tipe Eropa.....	18
2.1.9. Model Vasicek.....	21

2.2. Kerangka Pemikiran.....	22
BAB III METODE PENELITIAN	23
BAB IV PEMBAHASAN	25
Model <i>Black-Scholes</i> dengan <i>Return</i> Stokastik	25
BAB V PENUTUP	35
5.1. Kesimpulan.....	35
5.2. Saran.....	35
DAFTAR PUSTAKA	36
LAMPIRAN	37

DAFTAR NOTASI

C : harga opsi beli

P	:	harga opsi jual
E	:	harga kesepakatan
T	:	waktu jatuh tempo atau kadaluarsa
t	:	waktu sebelum jatuh tempo
r	:	tingkat suku bunga
μ	:	nilai ekspektasi tingkat suku bunga saham
σ	:	volatilitas saham yang merupakan standar deviasi dari return
$X(t)$:	proses stokastik
W_t	:	gerak Brown
A	:	tingkat laju untuk mencapai target suku bunga
B	:	target suku bunga
$r(t)$:	fungsi stokastik dari tingkat suku bunga
Σ	:	deviasi standar yang merupakan penentuan volatilitas dari laju suku bunga
$C(S, t)$:	fungsi dari harga opsi beli yang dipengaruhi variabel S dan t
$\bar{C}(S, t)$:	fungsi dari harga opsi beli dengan <i>return</i> stokastik
Δ	:	delta <i>hedging</i>
Π	:	nilai portofolio
$N(d_1)$:	distribusi normal dari d_1
$N(d_2)$:	distribusi normal dari d_2
$\bar{N}(\bar{d}_1)$:	distribusi normal dari \bar{d}_1
$\bar{N}(\bar{d}_2)$:	distribusi normal dari \bar{d}_2
$e^{-r(T-t)}$:	faktor diskonto

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Investasi adalah komitmen atas sejumlah dana atau sumber daya lainnya yang dilakukan pada saat ini dengan tujuan memperoleh sejumlah keuntungan pada masa yang akan datang. Seorang investor membeli sejumlah saham saat ini dengan harapan memperoleh keuntungan dari kenaikan harga saham ataupun sejumlah dividen pada masa yang akan datang sebagai imbalan waktu dan resiko yang terkait dengan investasi tersebut.

Istilah investasi berkaitan dengan berbagai macam aktivitas. Menginvestasikan sejumlah dana pada aset riil (tanah, mesin, bangunan, atau emas), maupun aset finansial (saham, deposito, atau obligasi) merupakan aktivitas investasi yang umumnya dilakukan. Bagi investor yang mereka lakukan juga dapat mencakup investasi pada aset-aset finansial lainnya yang lebih kompleks seperti opsi.

Menurut Husnan (1993) opsi merupakan suatu jenis kontrak antara dua pihak yaitu pemegang opsi yang memberi hak kepada pembeli untuk membeli suatu aset pada harga dan periode yang telah disepakati. Di sisi lain kontrak juga mengizinkan pihak pembeli untuk menjual aset pada harga dan periode yang telah disepakati. Hak untuk membeli suatu saham dengan harga dan periode yang telah disepakati (harga ini disebut sebagai *exercise price*) disebut opsi beli (*call option*), sedangkan hak untuk menjual suatu saham dengan harga dan periode yang telah disepakati disebut opsi jual (*put option*). Opsi tidak akan bernilai jika pada tanggal jatuh temponya kontrak tersebut tidak dilaksanakan. Masa jatuh tempo/*expiry date* merupakan tanggal hak pembeli untuk melakukan *exercise* habis.

Berdasarkan bentuk hak yang terjadi, opsi bisa dikelompokkan menjadi dua yaitu tipe Eropa dan tipe Amerika. Tipe Eropa menunjukkan bahwa opsi tersebut dapat dilaksanakan pada tanggal tertentu saja. Sedangkan tipe Amerika menunjukkan bahwa opsi tersebut dapat dilaksanakan pada tanggal tertentu atau sebelumnya.

Model *Black-Scholes* merupakan model penilaian harga opsi yang telah banyak diterima oleh sektor finansial. Model ini dikembangkan oleh Fisher Black dan Myron Scholes pada tahun 1973. Dalam menilai opsi, model *Black-Scholes* hanya digunakan untuk opsi tipe Eropa dan bagi saham yang tidak memberikan pembayaran dividen. Asumsi lain yang harus dipenuhi diantaranya tidak ada biaya transaksi, tingkat bunga bebas resiko diketahui dan konstan selama umur opsi, serta perubahan harga saham mengikuti pola acak.

Return adalah tingkat keuntungan yang diperoleh seseorang sebagai akibat dari investasi yang dilakukannya yang nilainya dapat positif maupun negatif bergantung kondisi riil dari aset investasi dan biasanya dihitung dengan ukuran pemusatan data (terutama mean aritmetis) pada waktu tertentu. Laju bunga r (*the interest rate r*) merupakan bagian utama dari *return* pada portofolio dimana untuk beberapa resiko dari variabel menyebabkan fluktuasi dan resiko saat ini dalam harga saham adalah konstan dan sama dengan laju resiko bebas (*risk free rate*).

Berdasarkan uraian tersebut, skripsi ini membahas tentang penurunan ulang model *Black-Scholes* dengan dasar persamaan diferensial parsial dan asumsi bahwa proses *return* mengikuti proses stokastik. Bagian selanjutnya menggunakan model *Black-Scholes* untuk penentuan harga opsi beli dengan *return* stokastik.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, diperoleh perumusan masalah:

1. bagaimana penurunan ulang model *Black-Scholes* dengan *return* stokastik,
2. bagaimana fungsi penyelesaian untuk menentukan harga opsi beli berdasarkan model *Black-Scholes* dengan *return* stokastik.

1.3 Batasan Masalah

Penulisan skripsi ini dibatasi pada nilai portofolio (Π) yang hanya dipengaruhi oleh variabel S dan t yang dinotasikan $C(S,t)$. Nilai portofolio tersebut digunakan untuk menurunkan ulang model *Black-Scholes* dan menggunakan *return* jangka pendek sehingga diperoleh persamaan diferensial stokastik dengan opsi beli yang digunakan adalah opsi beli tipe Eropa.

1.4 Tujuan

Tujuan penelitian ini adalah

1. menentukan penurunan ulang model *Black-Scholes* dengan *return* stokastik,
2. menentukan fungsi penyelesaian untuk harga opsi beli berdasarkan model *Black-Scholes* dengan *return* stokastik.

1.5 Manfaat

Manfaat dari penulisan skripsi ini diharapkan dapat mengaplikasikan model *Black-Scholes* untuk menentukan bentuk penyelesaian harga opsi beli yang bukan hanya dengan nilai *return* konstan tetapi juga dengan nilai *return* tidak konstan yang berupa *return* stokastik. Selain itu dapat menambah wawasan dan pengetahuan tentang model *Black-Scholes* dengan berbagai macam jenis-jenis opsi yang ada.

BAB II LANDASAN TEORI

2.1 Tinjauan Pustaka

Teori-teori yang mendukung dan diperlukan dalam pembahasan skripsi ini meliputi; aspek – aspek opsi, model stokastik, model stokastik untuk menentukan harga opsi, model *Black-Scholes*, dan model Vasicek sebagai *return* stokastik.

2.1.1 Aspek-aspek Opsi

Menurut Husnan (1993) opsi merupakan suatu jenis kontrak antara dua pihak dimana satu pihak memberi hak kepada pihak lain untuk membeli saham tertentu pada harga dan periode tertentu. Ada empat variabel yang berpengaruh dalam menentukan harga opsi.

1) Harga Saham

Harga saham dinotasikan dengan S , dan harga saham awal dinotasikan dengan S_0 , sedangkan S_t merupakan harga saham pada waktu t . Harga saham memiliki hubungan yang searah dengan harga opsi beli, artinya kenaikan harga saham juga menaikkan harga opsi beli. Sedangkan dalam kaitannya dengan harga opsi jual, harga saham memiliki hubungan yang terbalik. Kenaikkan harga saham dapat memicu turunnya harga opsi jual.

2) Harga Kesepakatan

Harga kesepakatan adalah harga yang telah disepakati oleh penjual dan pembeli opsi. Harga kesepakatan dinotasikan dengan E . Harga kesepakatan memiliki hubungan yang terbalik dengan harga opsi beli, artinya kenaikan harga kesepakatan mengakibatkan turunnya harga opsi beli. Sedangkan kaitannya dengan harga opsi jual harga kesepakatan memiliki hubungan yang searah artinya kenaikan harga kesepakatan menyebabkan naiknya harga opsi jual.

3) Masa Jatuh Tempo

Masa jatuh tempo pelaksanaan opsi dinotasikan dengan T . Masa jatuh tempo berbanding lurus dengan harga opsi. Semakin lama masa jatuh tempo, semakin tinggi harga opsi.

4) Suku Bunga Bebas Resiko

Suku bunga bebas resiko dinotasikan dengan r . Hubungan suku bunga bebas resiko terhadap harga opsi sama halnya dengan hubungan harga saham terhadap harga opsi, yakni memiliki hubungan yang searah dengan harga opsi beli dan memiliki hubungan terbalik dengan harga opsi jual.

Return adalah tingkat keuntungan yang diperoleh seseorang sebagai akibat dari investasi yang dilakukan yang nilainya dapat positif maupun negatif bergantung kondisi riil dari aset investasi dan biasanya dihitung dengan ukuran pemusatan *return* (terutama mean aritmetis) pada waktu tertentu. Volatilitas adalah tingkat variabilitas dari suatu *return* yang digunakan untuk memprediksi pergerakan harga saham.

Jika ditinjau dari jenis hak yang diberikan kepada *option holder* maka ada dua jenis opsi yaitu.

1. Opsi Beli

Opsi beli memberikan hak untuk membeli suatu saham dengan harga tertentu (harga dimana seseorang dapat menjual atau membeli saham) pada tanggal tertentu (untuk tipe Eropa) atau sebelumnya (untuk tipe Amerika). Opsi beli dinotasikan dengan C . Berdasarkan pengertian dari opsi beli, harga opsi beli merupakan selisih antara harga saham dengan harga kesepakatan. Bentuk persamaan matematis nilai intrinsik opsi beli dapat dinyatakan sebagai berikut

$$C = \text{maks}(S - E, 0) \quad (2.1)$$

dengan C : harga opsi beli

S : harga saham

E : harga kesepakatan.

Persamaan (2.1) menunjukkan opsi beli bernilai nol jika harga kesepakatan lebih tinggi dari harga saham. Jika harga saham lebih tinggi dari harga kesepakatan maka nilai opsi beli merupakan selisih dari harga saham dengan harga kesepakatan, sehingga opsi beli dapat dibedakan menjadi 3 macam yaitu.

- a) Opsi beli dikatakan *out of the money* jika harga saham lebih rendah dari pada harga kesepakatan dan opsi ini akan bernilai nol. Pemilik opsi tidak akan menggunakan haknya dan dia akan menderita kerugian sebesar premi yang sudah dibayarkan.
- b) Opsi beli dikatakan *in the money* jika harga saham lebih tinggi dari harga kesepakatan dan bernilai positif. Dalam keadaan ini pemilik opsi akan menjalankan opsinya karena akan mendapat keuntungan atau dapat meminimalisasi kerugian yang disebabkan telah membayar premi kepada penjual opsi.
- c) Opsi beli dikatakan *at the money* jika harga saham sama dengan harga kesepakatan, sehingga opsi ini akan bernilai nol.

2. Opsi Jual

Opsi jual memberikan hak untuk menjual suatu saham dengan harga tertentu (harga dimana seseorang dapat menjual atau membeli saham) pada tanggal tertentu (untuk tipe Eropa) atau sebelumnya (untuk tipe Amerika). Opsi jual dinotasikan dengan P .

Berdasarkan pengertian dari opsi jual, nilai opsi jual merupakan selisih antara harga kesepakatan dengan harga saham. Bentuk persamaan matematis nilai intrinsik opsi jual dapat dinyatakan sebagai berikut

$$P = \max(E - S, 0) \quad (2.2)$$

dengan P : harga opsi jual

S : harga saham

E : harga kesepakatan.

Persamaan (2.2) menunjukkan opsi *jual* bernilai nol, jika harga saham lebih tinggi dari harga kesepakatan. Jika harga kesepakatan lebih tinggi dari harga saham maka nilai opsi jual merupakan selisih dari harga kesepakatan dengan harga saham sehingga opsi jual dapat dibedakan menjadi 3 macam yaitu.

- a) Opsi jual dikatakan *out of the money* jika harga saham lebih tinggi dari pada harga kesepakatan dan opsi ini akan bernilai nol. Pemilik opsi tidak akan menggunakan haknya dan akan menderita kerugian sebesar premi yang sudah dibayarkan.
- b) Opsi jual dikatakan *in the money* jika harga saham lebih rendah dari harga kesepakatan dan bernilai positif. Dalam keadaan ini pemilik opsi akan menjalankan opsinya karena akan mendapat keuntungan atau dapat meminimalisasi kerugian yang disebabkan telah membayar premi kepada penjual opsi.
- c) Opsi jual dikatakan *at the money* jika harga saham sama dengan harga kesepakatan, sehingga opsi ini akan bernilai nol.

Ada empat pihak yang terlibat dalam transaksi opsi.

1. Pembeli opsi beli mempunyai hak untuk membeli saham dengan harga tertentu dan waktu tertentu. Pembeli opsi beli berkewajiban membayar sebesar harga opsi kepada penjual opsi beli. Jika harga saham pada saat jatuh tempo lebih besar dari harga kesepakatan maka pembeli opsi beli akan memperoleh keuntungan. Keuntungan yang diperoleh pembeli opsi beli semakin besar jika harga saham semakin tinggi. Jika harga saham pada saat jatuh tempo lebih kecil dari harga kesepakatan maka pembeli opsi beli akan menderita kerugian. Kerugian maksimal yang diderita pembeli opsi beli hanya sebesar harga opsi beli.
2. Penjual opsi beli menerima pembayaran dan berjanji menyerahkan sejumlah saham dengan harga dan waktu tertentu. Penjual opsi beli berkewajiban menjual saham kepada pembeli opsi beli sebesar harga kesepakatan dalam jangka waktu tertentu terlepas berapapun harga saham pada waktu itu. Keuntungan atau kerugian yang dialami penjual opsi beli merupakan kebalikan dari pembeli opsi beli. Keuntungan maksimal yang diperoleh penjual opsi beli hanya sebesar harga opsi beli tetapi kerugian maksimal tak terbatas.
3. Pembeli opsi jual mempunyai hak untuk menjual sejumlah saham dengan harga dan waktu tertentu. Pembeli opsi jual berkewajiban

membayar sebesar harga opsi kepada penjual opsi jual. Jika harga saham pada saat jatuh tempo lebih kecil dari harga kesepakatan maka pembeli opsi jual memperoleh keuntungan. Jika harga saham lebih besar dari harga kesepakatan maka pembeli opsi jual menderita kerugian. Kerugian maksimal yang diderita pembeli opsi jual hanya sebesar harga opsi jual.

4. Penjual opsi jual menerima pembayaran dan berjanji untuk membeli sejumlah saham dengan harga dan waktu tertentu. Penjual opsi jual berkewajiban membeli saham kepada pembeli opsi sebesar harga kesepakatan dalam jangka waktu tertentu terlepas berapapun harga saham pada waktu itu. Keuntungan atau kerugian yang dialami penjual opsi jual merupakan kebalikan dari pembeli opsi jual. Keuntungan maksimal yang diperoleh penjual opsi jual hanya sebesar harga opsi jual tetapi kerugian maksimal tak terbatas.

2.1.2 Distribusi Normal

Sebelum diperoleh penentuan harga opsi beli, terlebih dulu dijabarkan secara rinci tentang penurunan model *Black-Scholes*. Pada bagian awal dijabarkan tentang sifat-sifat dasar dari distribusi normal dan nilai rata-rata suatu variabel random dimana sebagai salah satu asumsi dasar dari model *Black-Scholes*.

Definisi 2.1 :

Variabel random X mengikuti distribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 , dinotasikan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, mempunyai fungsi densitas

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.3)$$

untuk $-\infty < x < \infty$, dengan $-\infty < \mu < \infty$ dan $-\infty < \sigma < \infty$.

Oleh karena itu, variabel random X mempunyai fungsi distribusi kumulatif atau

$$\text{CDF yaitu } F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

Berdasarkan pada substitusi $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, diperoleh hasil-hasil untuk $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

sebagai berikut

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \mu, \quad (2.4)$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \mu^2 + \sigma^2,$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[X^2] &= E[X^2] - [E[X]]^2 \\ &= (\mu^2 + \sigma^2) - \mu^2 \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Fungsi kepadatan probabilitas normal standar, $n(z)$ berbentuk

$$n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \text{ dengan } -\infty < z < \infty.$$

Definisi 2.2 :

Fungsi distribusi kumulatif atau CDF dari distribusi normal standar didefinisikan

$$N(z) = \int_{-\infty}^z f(x)dx = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1.$$

Teorema 2.1 : (Bain and Engelhardt, 1992)

Jika Z berdistribusi normal standar dari fungsi densitas $N(z)$ maka

- a. $N(z) = N(-z)$,
- b. $N'(z) = -zN(z)$

2.1.3 Model Stokastik

Model stokastik, sifat markov, sifat martingale, variasi kuadrat, proses stokastik gerak Brown didefinisikan dari suatu proses stokastik menurut Nielsen (1998).

Definisi 2.3 : *Proses stokastik adalah kumpulan variabel random $\{X(t); t \in T\}$ dengan t menyatakan waktu dan $X(t)$ menyatakan proses pada saat t .*

Jika T terhitung maka dikatakan proses stokastik waktu diskrit dan jika T kontinu maka dikatakan proses stokastik waktu kontinu. Proses stokastik waktu kontinu $\{X(t); t \in T\}$ dikatakan mempunyai kenaikan independen jika untuk semua $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, variabel random $X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1)$, ..., $X(t_n) - X(t_{n-1})$ independen. Proses dikatakan mempunyai kenaikan stasioner jika $X(t+s) - X(t)$ mempunyai distribusi yang sama untuk semua t .

2.1.3.1 Sifat Markov

Sifat Markov adalah sifat nilai harapan suatu variabel random ke- i dari suatu proses stokastik (X_i) dengan syarat diketahui semua nilai variabel random sebelumnya adalah hanya bergantung pada nilai variabel random ke- $i-1$ (X_{i-1}), tetapi nilai harapan tersebut tidak harus sama dengan nilai variabel random ke- $i-1$. Sifat Markov dinotasikan dengan

$$E(X_i | X_1, X_2, \dots, X_{i-1}) = E(X_i | X_{i-1}).$$

2.1.3.2 Sifat Martingale

Sifat martingale adalah sifat nilai harapan suatu variabel random ke- i dari suatu proses stokastik (X_j) dengan syarat diketahui semua nilai variabel random sebelumnya yang nilai harapan tersebut sama dengan nilai variabel random ke- $i-1$ (X_{i-1}). Sifat martingale dinotasikan dengan

$$E[X_i | X_j, j < i] = X_j \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

2.1.3.3 Variasi Kuadrat

Variasi kuadrat adalah jumlah kuadrat dari perubahan nilai suatu variabel random yang berurutan atau jumlah kuadrat selisih nilai variabel random ke- i (X_i) dengan variabel random ke- $i-1$ (X_{i-1}). Variasi kuadrat dinotasikan dengan

$$\sum_{j=1}^i (X_j - X_{j-1})^2 \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

2.1.3.4 Proses Stokastik Gerak Brown (*Brownian motion*)

Gerak Brown dapat didefinisikan sebagai suatu perubahan-perubahan yang cukup singkat. Menurut Wilmott (2001) sifat-sifat penting dari gerak Brown yaitu,

1. berhingga,
2. kontinu,
3. Markov,
4. martingale,
5. mempunyai variasi kuadrat dengan syarat jika waktu 0 sampai t dibagi menjadi partisi dengan $n + 1$ titik partisi $t_i = it/n$, maka

$$\sum (X(t_j) - X(t_{j-1}))^2 \rightarrow t,$$

6. *increment* $X(t_i) - X(t_{i-1})$ berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan variansi $t_i - t_{i-1}$.

Definisi 2.4 : Suatu proses stokastik $[X(t), t \geq 0]$ dikatakan proses gerak Brown (*Brownian Motion*) jika

- a. $X(0) = 0$,
- b. $\{X(t), t \geq 0\}$ mempunyai *increment* kestabilan independen,
- c. $X(t) > 0$, $X(t)$ berdistribusi normal dengan rata-rata 0 dan variansi σ^2 .

Definisi 2.5 : Proses Wiener adalah suatu proses stokastik $\{W_t; t \geq 0\}$ yang memenuhi kondisi berikut

- $W_0 = 0$,
- untuk interval $0 \leq s \leq t$, $W(t) - W(s)$ berdistribusi $N(0, t-s)$ dengan rata-rata 0 dan variansi $(t-s)$,
- increment $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ dalam interval $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < \infty$ adalah independen.

Dari definisi 2.4 dan definisi 2.5 dapat diketahui bahwa gerak Brown sama dengan proses Wiener. Suatu proses stokastik $(W(t), t \geq 0)$ dikatakan mengikuti gerak Brown jika memenuhi.

- Perubahan $W(t)$ selama periode waktu Δt adalah

$$\Delta W_t = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

ε adalah sampel random dari distribusi normal standar dengan mean 0 dan variansi 1. dari pengertian tersebut maka nilai mean dari ΔW_t adalah 0, standar deviasi $\Delta W(t)$ adalah $\sqrt{\Delta t}$, dan variansinya Δt . Jadi, $W(t) - W(s)$ berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi $t-s$. Jika $s = 0$ maka $W(t) - W(s)$ berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi t .

- $(W(t), t \geq 0)$ mengalami kenaikan independen, yaitu $W(t) - W(s)$ tidak tergantung pada keadaan yang lalu.
- $W(t)$ kontinu dengan $t > 0$ merupakan fungsi kontinu dari t .

2.1.4 Persamaan Diferensial Stokastik

Persamaan diferensial tidak hanya berlaku pada model yang deterministik tapi juga berlaku pada model yang bersifat stokastik yang dikenal dengan persamaan diferensial stokastik.

Definisi 2.6 : Diberikan persamaan dalam bentuk persamaan diferensial stokastik yaitu

$$dX_t = f(t, X_t)dt + G(t, X_t)dW_t, \text{ dengan } X_{t_0} = c, t_0 \leq t \leq T < \infty.$$

2.1.5 Model Harga Saham

Menurut Ruey (2002), mengenai hipotesis efisiensi pasar bahwa harga saham merupakan gerak random. Hipotesis efisiensi pasar ini dipengaruhi oleh dua faktor yaitu keadaan saham pada waktu lalu yang berpengaruh pada harga saham saat ini dan respon saham terhadap informasi baru tentang saham. Berdasarkan kedua faktor ini dapat dikatakan bahwa perubahan harga saham mengikuti proses Markov. Proses Markov merupakan proses stokastik dimana hanya harga saat ini yang berpengaruh untuk memprediksi harga yang akan datang. Harga saham dilambangkan dengan S dan waktu dilambangkan oleh t . Perubahan harga saham dinyatakan dS pada interval waktu dt . Model umum *return* dari aset dinyatakan dengan $\frac{dS}{S}$ yang terdiri atas dua bagian. Bagian pertama adalah bagian deterministik yang dilambangkan dengan μdt . Ukuran dari rata-rata pertumbuhan harga saham atau lebih dikenal sebagai *drift* ditunjukkan sebagai μ . Sedangkan bagian kedua merupakan model perubahan harga saham secara random yang disebabkan oleh faktor eksternal. Faktor eksternal dilambangkan dengan σdW_t . Nilai σ didefinisikan sebagai volatilitas dari saham yang digunakan untuk mengukur standar deviasi dari *return* dan dapat dinyatakan sebagai fungsi dari S dan t . Nilai μ dan σ dapat diestimasi menggunakan harga saham pada hari sebelumnya. Model harga saham yang dipengaruhi oleh nilai μ dan σ dengan masing-masing bergantung pada S dan t dirumuskan sebagai berikut

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (2.5)$$

dengan

μ : nilai ekspektasi tingkat suku bunga saham,

σ : volatilitas saham yang merupakan standar deviasi dari *return*,

W_t : gerak Brown atau proses Wiener.

Jika volatilitasnya nol ($\sigma = 0$) maka model menjadi

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

Jika diketahui μ konstan maka model menjadi

$$\int_{S_0}^{S_t} \frac{dS}{S} = \int \mu dt \text{ atau } S_t = S_0 e^{\mu t}$$

dengan S_t merupakan harga saham saat t dan S_0 adalah harga saham saat $t = 0$.

2.1.6 Model Black-Scholes

Model *Black-Scholes* merupakan model yang digunakan untuk menentukan harga opsi yang telah banyak diterima oleh pihak-pihak bidang keuangan. Model ini dikembangkan oleh Fisher Black dan Myron Scholes. Penggunaannya terbatas karena hanya dapat digunakan pada penentuan harga opsi tipe Eropa yang dijalankan pada waktu jatuh tempo saja. Sedangkan model ini tidak berlaku untuk opsi tipe Amerika karena tipe Amerika dapat dijalankan setiap saat sampai waktu jatuh tempo. Selain itu hanya dapat diterapkan pada saham yang tidak memberikan deviden sepanjang jangka waktu opsi. Hal tersebut merupakan kekurangan dari model *Black-Scholes* yang dapat diabaikan apabila opsinya merupakan opsi beli dan tidak membayar deviden.

Model *Black-Scholes* menggunakan beberapa asumsi. Asumsi-asumsi tersebut diperlukan untuk mengembangkan suatu cegah resiko untuk memperoleh laba *arbitrage* jika harga pasar opsi beli berbeda dengan nilai yang diperoleh melalui model *Black-Scholes*. Beberapa asumsi yang mendasari model *Black-Scholes* adalah

a) Opsi yang digunakan adalah opsi tipe Eropa

Model *Black-Scholes* diterapkan bagi saham yang tidak memberikan deviden, maka pelaksanaan opsi sebelum waktunya tidak akan menguntungkan karena tindakan menjual opsi akan menyebabkan pemegang opsi kehilangan

premi waktu dari opsi. Premi waktu terjadi apabila harga opsi melebihi nilai intrinsiknya.

b) Variansi harga saham

Model *Black-Scholes* mengasumsikan bahwa variansi harga saham bersifat konstan sepanjang usia opsi dan diketahui dengan pasti. Jika variansi harga saham tidak konstan maka model penetapan harga opsi dapat dikembangkan sehingga memungkinkan perubahan variansi. Variansi harus diketahui dengan pasti untuk dapat membentuk cegah resiko yang sesuai, karena model *Black-Scholes* menggunakan konsep cegah resiko dan apabila variansi harga saham tidak diketahui dengan pasti maka cegah resiko yang sesuai tidak dapat diterapkan.

c) Proses acak dalam harga saham

Untuk memperoleh model penetapan harga opsi, diperlukan suatu asumsi mengenai cara pergerakan harga saham. Model *Black-Scholes* didasarkan pada asumsi bahwa harga saham diperoleh dari suatu proses acak yang disebut proses difusi. Dalam proses difusi, harga saham dapat memiliki nilai positif berapa pun, namun pada saat harga saham mengalami perubahan/bergerak dari satu ke harga lain, harga saham harus mengambil seluruh nilai diantara kedua harga tersebut. Maksudnya harga saham tidak langsung melompat dari satu harga ke harga lainnya dengan melewati harga-harga sementara.

d) Suku bunga bebas resiko

Model *Black-Scholes* menggunakan dua asumsi sehubungan dengan suku bunga bebas resiko. Pertama, diasumsikan bahwa suku bunga pinjaman dan pemberian pinjaman adalah sama. Asumsi kedua adalah suku bunga bersifat konstan dan diketahui sepanjang usia opsi. Asumsi pertama cenderung tidak berlaku dikarenakan suku bunga pinjaman umumnya lebih besar daripada suku bunga pemberian pinjaman. Pengaruh model *Black-Scholes* adalah harga opsi akan terletak antara harga opsi beli yang diperoleh dari model yang menggunakan dua suku bunga. Model dapat menggunakan asumsi kedua dengan jalan mengganti suku bunga bebas resiko sepanjang usia opsi dengan rata-rata geometris pengembalian sepanjang usia opsi.

e) Dividen

Model *Black-Scholes* digunakan bagi saham yang tidak memberikan dividen. Jika saham yang mendasari memberikan dividen, maka pemegang opsi beli dapat memperoleh manfaat dengan melaksanakan opsi sebelum jatuh tempo.

f) Pajak dan biaya transaksi

Model *Black-Scholes* mengasumsikan tidak ada pajak dan biaya transaksi. Model ini dapat dimodifikasi sehingga turut memperhitungkan pajak, namun masalahnya adalah tingkat pajak tidak hanya satu. Biaya transaksi meliputi komisi dan penyebaran permintaan-penawaran bagi saham dan opsi, biaya-biaya lain berhubungan dengan opsi.

Salah satu teori dasar dalam dunia keuangan adalah *arbitrage pricing theory*. Teori ini berdasarkan pada hukum dimana dua aset yang sama tidak dapat dijual dengan harga yang berlainan. Jika terjadi perbedaan harga antara dua aset yang sama tersebut maka akan terjadi proses *arbitrage*. Investor akan menjual aset yang lebih mahal dan membeli aset lain yang harganya lebih murah. Dengan proses ini maka diperoleh keuntungan yaitu sebesar selisih dari harga kedua aset tersebut tanpa harus menanggung resiko. Pada akhirnya proses ini menyamakan harga dari kedua aset tersebut. Orang yang melakukan *arbitrage* disebut *arbitrageur* yaitu orang yang memperhatikan keadaan pasar terlebih dahulu, kemudian mencoba menemukan situasi bebas resiko untuk memperoleh keuntungan dengan cara membandingkan dua pasar yang berbeda.

Hedging merupakan salah satu strategi yang digunakan investor untuk mengurangi/menghilangkan resiko. Salah satu strategi yang penting dalam *hedging* adalah *delta hedging*. *Delta hedging* dapat didefinisikan sebagai perubahan harga opsi terhadap perubahan harga saham.

2.1.7 Formula Ito

Menurut Hull (2000), misalkan bahwa harga dari suatu variabel X mengikuti proses Ito

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

dengan dz adalah proses Wiener, a dan b adalah fungsi dari x dan t . Variabel X mempunyai rata-rata *drift* a dan sebuah rata-rata variansi b^2 . Formula Ito menunjukkan bahwa sebuah fungsi G , dari x dan t mengikuti proses berikut

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dW_t$$

dengan dW_t merupakan proses Wiener yang sama dengan atas. Jadi, G juga mengikuti sebuah proses Ito dengan rata-rata *drift*

$$\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2$$

dan rata-rata variansi

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 b^2$$

Pada persamaan (2.5) dikatakan bahwa $dS = \mu S dt + \sigma S dz$ adalah model yang cocok untuk menggambarkan pergerakan saham dengan μ adalah *return* yang diharapkan investor per tahun dan σ adalah volatilitas dari harga saham.

Mengaplikasikan formula Ito diperoleh bahwa proses yang diikuti oleh fungsi C dari S dan t

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial S} \mu S + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S} \sigma S dW_t. \quad (2.6)$$

Sebagai catatan bahwa S dan C dipengaruhi oleh sumber pokok yang sama dari ketidaktentuan suatu gerak Brown yaitu dW_t .

Misalkan $C = \ln S$, sehingga

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial C}{\partial t} = 0$$

maka dari persamaan (2.6), proses yang diikuti oleh C adalah

$$dC = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t$$

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t. \quad (2.7)$$

Karena μ dan σ konstan, persamaan ini menunjukkan bahwa C mengikuti proses Wiener. Persamaan ini mempunyai rata-rata *drift* konstan $\mu - \frac{1}{2} \sigma^2$ dan rata-rata variansi konstan σ^2 . Perubahan dalam C antara waktu t dan waktu selanjutnya T berdistribusi normal dengan rata-rata $\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t)$ dengan variansi $\sigma^2 (T - t)$.

2.1.8 Model Black-Scholes untuk Opsi Beli Tipe Eropa

Sebelum melakukan penjabaran tentang penurunan ulang model *Black-Scholes* untuk opsi beli tipe Eropa, terlebih dulu dijelaskan beberapa notasi penting, yaitu

1. Harga opsi beli C merupakan fungsi dari harga saham S , dan waktu t sehingga dinotasikan dengan $C = C(S, t)$
2. σ merupakan volatilitas harga saham
3. E merupakan harga kesepakatan
4. T merupakan waktu jatuh tempo atau kadaluarsa
5. r merupakan tingkat suku bunga.

Opsi beli tipe Eropa didefinisikan sebagai sebuah perjanjian finansial yang memberikan kesempatan kepada pemegang saham untuk membeli satu unit harga saham pada masa mendatang (t disebut sebagai waktu kesepakatan) pada suatu harga tertentu (disebut harga kesepakatan). Opsi beli tipe Eropa dinotasikan dengan $C(S, t)$ dengan harga kesepakatan E dan waktu jatuh tempo T . Jika saat jatuh tempo $S > E$ maka opsi beli akan bernilai $S - E$ karena pembeli opsi dapat membeli saham seharga E dan menjualnya seharga S . Jika saat jatuh tempo $S < E$ maka opsi tidak dilakukan *exercise* atau tidak dieksekusi dan opsi bernilai 0. Oleh karena itu, kontrak opsi mempunyai pembayaran maksimum $(S_T - E, 0)$ pada saat

jatuh tempo dengan S_T adalah harga saham pada saat jatuh tempo dan E adalah harga kesepakatan.

Proses perubahan harga saham dalam penghitungan pembayaran saham tanpa deviden, mengikuti gerak Brown Geometri dengan *drift* yaitu $S_t = e^{(\mu + \sigma W_t)}$. Karena bentuk lognormal dari harga saham $S_t = e^{(\mu + \sigma W_t)}$ sama dengan persamaan (2.5) maka diperoleh $Y_t = \ln S_t$ sehingga diperoleh persamaan diferensial stokastik

$$dY_t = \mu dt + \sigma dW_t \quad (2.8)$$

dengan W_t adalah gerak Brown.

Dengan mengaplikasikan hasil dari formula Ito diperoleh persamaan diferensial stokastik untuk proses harga saham yaitu

$$dS_t = \left(\mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (2.9)$$

Diberikan $C(S, t)$ yang merupakan notasi dari harga opsi beli dengan harga kesepakatan E pada waktu t sebelum jatuh tempo, dimana harga per unit saham adalah S . Diasumsikan bahwa $C(S, t)$ tidak dipengaruhi oleh harga saham sebelumnya. Mengaplikasikan kembali formula Ito pada persamaan (2.6) untuk $C(S, t)$ sehingga dihasilkan

$$\begin{aligned} dC &= \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt \\ &= \left(\mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S} \sigma S dW. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Sebuah perusahaan atau organisasi biasanya terdapat kumpulan dari nilai investasi yang dinamakan dengan portofolio. Portofolio dapat berupa aset, opsi maupun uang dalam bentuk investasi di bank. Pembentukan sebuah portofolio Π dipengaruhi oleh harga opsi C dan untuk suatu Δ yaitu nilai perubahan dari S , nilai portofolio tersebut dirumuskan sebagai

$$\Pi = C - \Delta S. \quad (2.11)$$

Menggunakan (2.10) dan (2.11) perubahan $d\Pi$ dinyatakan sebagai berikut

$$d\Pi = dC - \Delta dS.$$

Jika dipilih $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$, maka bagian dari proses random tersebut dapat dieliminasi dengan alasan perubahan Δ sebagai jumlah saham yang bebas resiko dalam portofolio. Perubahan tersebut merupakan laju perubahan opsi yang berhubungan dengan harga saham, sehingga nilai portofolio tidak lagi mengandung komponen random yang dinyatakan sebagai berikut

$$d\Pi = dC(S,t) - \frac{\partial C}{\partial S} dS = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt.$$

Menggunakan aplikasi formula Ito's untuk nilai portofolio Π diperoleh

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{d}{dt} \left[C(S,t) - S \frac{\partial C(S,t)}{\partial S} \right] = \frac{dC(S,t)}{dt} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C(S,t)}{\partial S^2}. \quad (2.12)$$

Kerandoman pada nilai harga opsi beli berasal dari bagian stokastik proses harga saham setelah dieliminasi secara lengkap dengan pilihan nilai portofolio

$$\Pi = C(S,t) - S \frac{\partial C(S,t)}{\partial S}.$$

Nilai perubahan portofolio dengan tidak adanya konsep arbitrase yang diterapkan harus sama dengan tingkat suku bunga bebas resiko yang ada. Jika diasumsikan tingkat suku bunga bebas resiko r , maka nilai perubahan portofolio $d\Pi$ yang diinvestasikan adalah $r\Pi dt$ selama selang waktu dt . Oleh karena itu diperoleh

$$\frac{d\Pi}{dt} = r\Pi.$$

Pada model *Black-Scholes* dengan *return* konstan, tingkat suku bunga merupakan tingkat suku bunga bebas resiko r yang selanjutnya diasumsikan sebagai konstanta sehingga diperoleh nilai perubahan portofolio

$$\frac{d\Pi}{dt} = r \left[C(S,t) - S \frac{\partial C(S,t)}{\partial S} \right]. \quad (2.13)$$

Substitusi persamaan (2.12) ke dalam persamaan (2.13) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(S,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C(S,t)}{\partial S^2} &= rC(S,t) - rS \frac{\partial C(S,t)}{\partial S}, \\ \frac{\partial C(S,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C(S,t)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C(S,t)}{\partial S} - rC(S,t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Teorema 2.2 : (Singh dan Prabakaran, 2006)

Persamaan *Black-Scholes* pada persamaan (2.14) mempunyai penyelesaian

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (2.15)$$

dengan

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{dan} \quad N(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (2.16)$$

2.1.9 Model Vasicek

Model Vasicek dikenalkan oleh Oldrich Vasicek pada tahun 1977 yang merupakan model matematika tentang perkembangan laju perubahan suku bunga. Model Vasicek adalah tipe model satu faktor yang menerangkan tentang pergerakan laju suku bunga pada waktu yang dikendalikan oleh resiko pasar dan juga digunakan untuk penilaian dari turunan laju suku bunga. Teori model Vasicek sangat baik disesuaikan dengan pasar hutang (*credit markets*). Berdasarkan model Vasicek, laju suku bunga dijelaskan dengan persamaan diferensial stokastik yaitu

$$\frac{dr(t)}{dt} + Ar(t) + B - \Sigma W(t) = 0$$

dengan,

$W(t)$: proses Wiener dengan model faktor resiko dari pemilihan pasar,

Σ : standar deviasi yang merupakan penentuan volatilitas dari laju suku bunga,

$Ar(t) + B$: faktor *drift* yang menjelaskan tentang perubahan harga harapan dari laju suku bunga pada A bagian waktu t dan B adalah parameter yang merupakan batas nilai pendekatan jangka panjang dari laju suku bunga.

Model Vasicek ini dapat digunakan sebagai *return* stokastik pada penentuan harga opsi berdasar model *Black-Scholes* karena pergerakan laju suku bunga tergantung pada waktu yang dikendalikan oleh resiko pasar.

2.2 Kerangka Pemikiran

Penjelasan tentang penentuan harga opsi berdasarkan model *Black-Scholes* dengan *return* stokastik dimulai dengan menentukan penurunan ulang model *Black-Scholes* dari suatu harga saham dengan variabel S dan t . Bentuk penyelesaian model *Black-Scholes* dapat ditentukan dengan mengaplikasikan nilai ekspektasi distribusi normal serta sifat gerak Brown yang merupakan salah satu asumsi model *Black-Scholes*. Penurunan ulang model *Black-Scholes* ada dua macam yaitu dengan *return* stokastik dan tanpa *return* stokastik. Untuk penurunan ulang model *Black-Scholes* tanpa *return* stokastik akan diperoleh penyelesaian *Black-Scholes* $C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$. Sedangkan untuk penurunan ulang model *Black-scholes* dengan *return* stokastik dipilih model Vasicek sebagai dasar *return* stokastik yang akan digunakan. Kemudian menentukan model *Black-Scholes* dengan nilai portofolio dengan *return* stokastik sehingga diperoleh suatu model *Black-Scholes* dengan *return* stokastik yang akan diselesaikan dengan mencari rata-rata dari opsi beli $\bar{C}(S, t)$. Melalui fungsi Heaviside dan syarat batas Dirichlet dilakukan beberapa substitusi sehingga diperoleh fungsi penyelesaian model *Black-Scholes* mengenai penentuan harga opsi dengan *return* stokastik pada nilai portofolio sekarang.

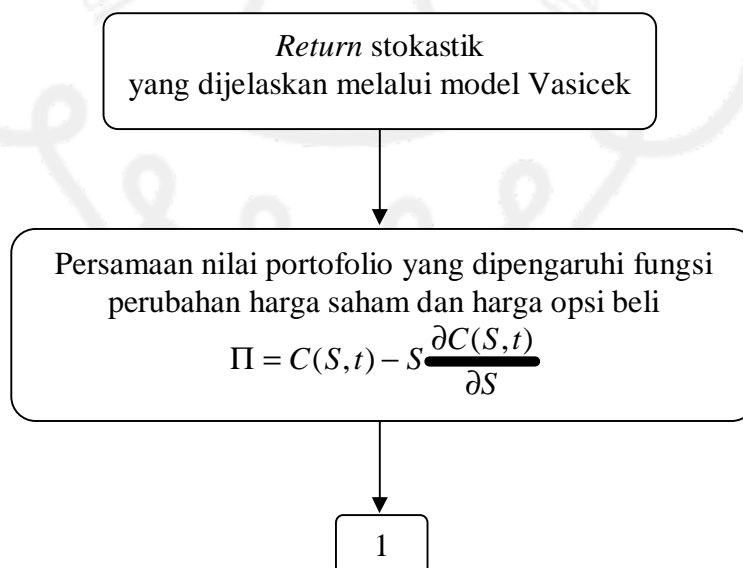
BAB III

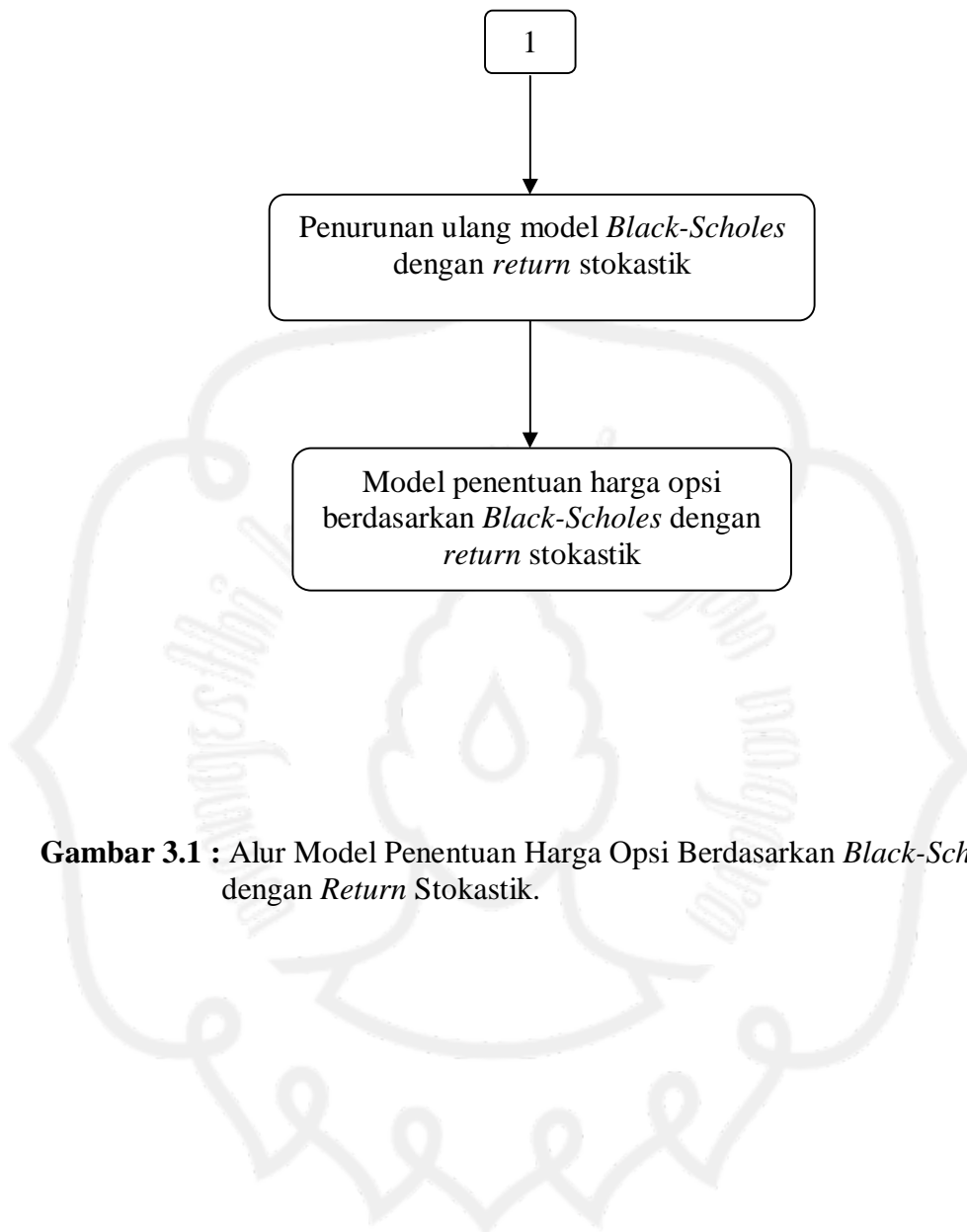
METODE PENELITIAN

Pada penulisan skripsi ini, metode yang digunakan adalah studi literatur dengan mengacu pada sumber-sumber pustaka stokastik, ekonomi, dan informasi-informasi yang dimuat di situs web yang berkaitan dengan model *Black-Scholes* dan model stokastiknya. Langkah-langkah dalam pembahasan rumusan masalah sebagai berikut

1. menentukan jenis *return* stokastik yang merupakan tingkat suku bunga dari harga saham dengan formulasi *return* jangka pendek pada jaminan keamanan pendapatan tetap,
2. menentukan persamaan nilai portofolio yang dipengaruhi oleh fungsi perubahan harga saham dan harga opsi beli dengan variabel S dan t ,
3. menentukan penurunan ulang model *Black-Scholes* untuk opsi beli dengan *return* stokastik,
4. menentukan harga opsi beli dengan *return* stokastik menggunakan model *Black-Scholes*.

Langkah-langkah 1-4 dapat ditunjukkan dalam diagram alur berikut





Gambar 3.1 : Alur Model Penentuan Harga Opsi Berdasarkan *Black-Scholes* dengan *Return* Stokastik.

BAB IV PEMBAHASAN

Dalam pembahasan ini dikaji tentang perumusan model *Black-Scholes* dengan *return* stokastik.

Model *Black-Scholes* dengan *Return* Stokastik

Tingkat bunga r (*the interest rate* r) merupakan bagian utama dari *return* stokastik pada portofolio untuk beberapa resiko dari variabel yang menyebabkan fluktuasi. Tingkat suku bunga saat ini adalah tingkat suku bunga bebas resiko dalam harga saham yang bernilai konstan. Berdasarkan kesepakatan bahwa model laju jangka pendek (mewakili *return* jangka pendek dalam jaminan pendapatan tetap) melalui bentuk persamaan diferensial stokastik

$$dr(t) = -\psi[r(t), t]dt + \eta[r(t), t]dW(t). \quad (4.1)$$

dengan $r(t)$ adalah laju kepentingan jangka pendek pada waktu t , ψ dan η adalah fungsi deterministik dengan r , t , $W(t)$ merupakan proses Wiener.

Pada analisis selanjutnya, akan diasumsikan bahwa laju perubahan tingkat suku bunga jangka pendek dijelaskan melalui model Vasicek yaitu

$$\frac{dr(t)}{dt} + Ar(t) + B - \Sigma W(t) = 0 \quad (4.2)$$

dengan $W(t)$ adalah proses stokastik *white noise*.

Proses harga opsi beli sekarang menjadi fungsi dari dua variabel stokastik yaitu proses harga saham $S(t)$ dan proses perjanjian *return* $r(t)$. Dengan formula Ito diperoleh

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial S}dS + \frac{\partial C}{\partial r}dr + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}dt + \frac{1}{2}\Sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial r^2}dt \quad (4.3)$$

dengan dS dan dr yang masing-masing diberikan oleh persamaan (2.9) dan (4.2) secara runtut.

Pada bagian selanjutnya akan diformulasikan nilai portofolio Π yang mengandung opsi beli $C(S, r, t)$ dan penjualan jangka pendek $\frac{\partial C}{\partial S}$ unit stok $S(t)$

sehingga $\Pi = C - S \frac{\partial C}{\partial S}$, sehingga diperoleh suatu nilai perubahan portofolio sebagai berikut

$$\begin{aligned} d\Pi &= dC - \frac{\partial C}{\partial S} dS \\ &= \left(\frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\partial C}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \Sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} dt \right) - \frac{\partial C}{\partial S} dS \\ &= \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \Sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} dt. \end{aligned}$$

Menggunakan aplikasi formula Ito untuk nilai portofolio Π diperoleh

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{dC}{dt} - \frac{\partial C}{\partial S} \frac{dS}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \Sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial r^2}. \quad (4.4)$$

Tingkat suku bunga diasumsikan merupakan tingkat suku bunga bebas resiko r yang selanjutnya akan diasumsikan sebagai konstanta yang mengawali diperolehnya persamaan diferensial parsial untuk harga opsi beli

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dt} &= r(t)\Pi \\ \frac{d\Pi}{dt} &= r(t) \left[C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Substitusi persamaan (4.4) ke dalam persamaan (4.5) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial r} \frac{dr(t)}{dt} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \Sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} &= r(t)C - r(t)S \frac{\partial C}{\partial S}, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r(t)S \frac{\partial C}{\partial S} - r(t)C &+ \frac{1}{2} \Sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\partial C}{\partial r} \frac{dr(t)}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Persamaan ini merupakan bentuk fungsi penyelesaian harga opsi beli dengan return stokastik menggunakan model *Black-Scholes*. Karena tingkat suku bunga yang digunakan merupakan bagian dari return stokastik maka harga opsi beli dinotasikan sebagai $\bar{C}(S, t)$. Untuk memperoleh $\bar{C}(S, t)$ digunakan substitusi

$\int_t^T r(\tau) d\tau / \int_t^T d\tau$ pada konstanta tingkat suku bunga bebas resiko r formula *Black-*

Scholes pada persamaan (2.15).

Dari persamaan (2.16) diuraikan bahwa

$$N(\bar{d}_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\bar{d}_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(\bar{d}_1 - x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (4.7)$$

dengan $H(x - y)$ adalah fungsi Heaviside yang didefinisikan

$$H(x - y) = \begin{cases} 0 & , x < y \\ 1 & , x > y . \end{cases}$$

Jika x diganti dengan \bar{d}_1 dan y diganti dengan x maka diperoleh

$$H(\bar{d}_1 - x) = \begin{cases} 0 & , \bar{d}_1 < x \\ 1 & , \bar{d}_1 > x . \end{cases}$$

Berikut ini diberikan nilai integral dari $H(x - y)$ yaitu

$$H(x - y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{e^{iw(x-y)}}{w - i\varepsilon} \text{ sehingga diperoleh}$$

$$H(\bar{d}_1 - x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{e^{iw(\bar{d}_1 - x)}}{w - i\varepsilon} . \quad (4.8)$$

Substitusi persamaan (4.8) ke persamaan (4.7), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} N(\bar{d}_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\bar{d}_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(\bar{d}_1 - x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{3/2} i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2} - iw(\bar{d}_1 - x)}}{w - i\varepsilon} dx dw \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi) i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-iw)^2} dx \right] \frac{e^{iw(\bar{d}_1 + i\frac{w}{2})}}{w - i\varepsilon} dw \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi) i} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \frac{e^{iw(\bar{d}_1 + i\frac{w}{2})}}{w - i\varepsilon} dw \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi) i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iw(\bar{d}_1 + i\frac{w}{2})}}{w - i\varepsilon} dw . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Penggantian variabel r dengan $\int_t^T r(\tau) d\tau$ diperoleh

$$\bar{d}_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\int_t^T r(\tau)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1^0 + \frac{\int_t^T r(\tau)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

dengan

$$d_1^0 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Karena ini menunjukkan bagian dari model stokastik dari pernyataan

$\int_t^T r(\tau) d\tau$ pada $N(\bar{d}_1)$, diperoleh

$$\begin{aligned} N(\bar{d}_1) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iw(\bar{d}_1 + i\frac{w}{2})}}{w - i\varepsilon} dw \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iw\left(d_1^0 + \frac{\int_t^T r(\tau)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + i^2\frac{w^2}{2}}}{w - i\varepsilon} dw \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwd_1^0 + i^2\frac{w^2}{2} + iw\frac{\int_t^T r(\tau) d\tau}{\sigma\sqrt{T-t}}}}{w - i\varepsilon} dw \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwd_1^0 + i^2\frac{w^2}{2}}}{w - i\varepsilon} e^{iw\frac{\int_t^T r(\tau) d\tau}{\sigma\sqrt{T-t}}} dw \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)i} \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{e^{iwd_1^0 - \frac{w^2}{2}}}{w - i\varepsilon} I_1 \end{aligned} \tag{4.10}$$

dengan $I_1 = \left(e^{\frac{iw}{\sigma\sqrt{T-t}} \int_t^T r(\tau) d\tau} \right)$ dan i adalah akar imajiner.

Melalui proses yang sama dapat diperoleh

$$N(\overline{d}_2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)i} \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{e^{\frac{iwd_2^0 - w^2}{2}}}{w - i\varepsilon} I_1 \quad (4.11)$$

dengan

$$d_2^0 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Menyamakan faktor potongan (*discount*) $e^{-r(T-t)}$ dengan $\left(e^{-\int_t^T r(\tau) d\tau} \right) = I_2$.

Untuk mencari nilai integral ekspektasi dari I_1 dan I_2 dipergunakan bentuk fungsi integral. Pada bentuk ini, nilai ekspektasi I_1 diberikan dengan

$$I_1 = \frac{\int_{r(t)}^{r(T)} Dr. \exp\left[-\frac{1}{2\Sigma^2} \int_t^T d\tau \left(\frac{dr(\tau)}{d\tau} + Ar(\tau) + B\right)^2 + \frac{iw}{\sigma\sqrt{T-t}} \int_t^T d\tau r(\tau)\right]}{\int_{r(t)}^{r(T)} Dr. \exp\left[-\frac{1}{2\Sigma^2} \int_t^T d\tau \left(\frac{dr(\tau)}{d\tau} + Ar(\tau) + B\right)^2\right]} = \frac{P}{Q} \quad (4.12)$$

dengan $Dr = \int_{r(t)}^{r(T)} \frac{dr(\tau)}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ adalah fungsi integral terukur.

Tahap pertama yaitu mencari nilai fungsi integral P . Digunakan substitusi

$x(\tau) = -\frac{B}{A} - r(\tau)$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} P &= \int_{x(t)}^{x(T)} Dr. \exp\left[-\frac{1}{2\Sigma^2} \int_t^T d\tau \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} + Ax(\tau) + B\right)^2 + \frac{iw}{\sigma\sqrt{T-t}} \int_t^T d\tau r(\tau)\right] \\ &= \int_{x(t)}^{x(T)} Dr. \exp\left[-\frac{1}{2\Sigma^2} \int_t^T d\tau \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} + Ax(\tau)\right)^2 + \frac{iw}{\sigma\sqrt{T-t}} \int_t^T d\tau \left(-\frac{B}{A} - x(\tau)\right)\right] \\ &= \int_{x(t)}^{x(T)} Dr. \exp\left\{-\frac{1}{2\Sigma^2} \int_t^T d\tau \left[\left(\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)^2 + A^2 x^2(\tau)\right] - \frac{A}{2\Sigma^2} [x^2(T) - x^2(t)] - \frac{iwB(T-t)}{A\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{iw}{\sigma\sqrt{T-t}} \int_t^T x(\tau) d\tau\right\} \\ &= \int_{x(t)}^{x(T)} Dr. \exp\left\{-\frac{A}{2\Sigma^2} [x^2(T) - x^2(t)] - \frac{iwB(T-t)}{A\sigma\sqrt{T-t}} - I_3\right\} \quad (4.13) \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \frac{1}{2\Sigma^2} \int_t^T d\tau \left[\left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 + A^2 x^2(\tau) \right] + \frac{iw}{\sigma \sqrt{T-t}} \int_t^T x(\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{2\Sigma^2} \int_t^T d\tau \left[\left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 + A^2 x^2(\tau) + \frac{2iw\Sigma^2}{\sigma \sqrt{T-t}} x(\tau) \right] \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

Untuk menentukan nilai I_3 , dengan membentuk fungsi perubahan variabel $x(\tau)$ dari beberapa fungsi tetap $y(\tau)$ maka $x(\tau) = y(\tau) + z(\tau)$ dimana $y(\tau)$ adalah fungsi tetap tetapi dengan syarat batas $y(t) = x(t)$, $y(T) = x(T)$ sehingga $z(\tau)$ mempunyai syarat batas Dirichlet maka $z(t) = z(T) = 0$.

Dengan mensubstitusikan $x(\tau) = y(\tau) + z(\tau)$ ke dalam persamaan (4.14) maka diperoleh

$$I_3 = \frac{1}{2\Sigma^2} \int_t^T d\tau . K \quad (4.15)$$

dengan

$$\begin{aligned}
 K &= \left(\frac{dy(\tau)}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dz(\tau)}{d\tau} \right)^2 + 2 \left(\frac{dy(\tau)}{d\tau} \right) \left(\frac{dz(\tau)}{d\tau} \right) + A^2 y^2(\tau) + A^2 z^2(\tau) + 2A^2 y(\tau) z(\tau) \\
 &+ \frac{2iw\Sigma^2}{\sigma \sqrt{T-t}} y(\tau) + \frac{2iw\Sigma^2}{\sigma \sqrt{T-t}} z(\tau) .
 \end{aligned}$$

Pengintegralan tahap kedua dan ketiga pada bagian ini dapat diperoleh

$$I_3 = \frac{z(\tau)}{2\Sigma^2} \left(\frac{dz(\tau)}{d\tau} + 2 \frac{dy(\tau)}{d\tau} \right) \Bigg|_t^T + \frac{1}{2\Sigma^2} \int_t^T d\tau . L$$

dengan

$$\begin{aligned}
 L &= -z(\tau) \frac{d^2 z(\tau)}{d\tau^2} - 2z(\tau) \frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2} + \left(\frac{dy(\tau)}{d\tau} \right)^2 + A^2 y^2(\tau) + A^2 z^2(\tau) + 2A^2 y(\tau) z(\tau) \\
 &+ \frac{2iw\Sigma^2}{\sigma \sqrt{T-t}} y(\tau) + \frac{2iw\Sigma^2}{\sigma \sqrt{T-t}} z(\tau)
 \end{aligned}$$

sekarang batas dari semua bagian yang hilang adalah $z(\tau)$ yang mempunyai syarat batas Dirichlet.

Selanjutnya jika digunakan fungsi tetap $y(\tau)$ pada bagian persamaan diferensial

$$-\frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2} + A^2 y(\tau) + \frac{iw\Sigma^2}{\sigma\sqrt{T-t}} = 0 \quad (4.16)$$

dengan syarat batas $y(t) = x(t)$, $y(T) = x(T)$ maka diperoleh

$$I_3 = \frac{1}{2\Sigma^2} \int_t^T M \cdot d\tau$$

dengan

$$\begin{aligned} M &= \left(-2z(\tau) \frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2} + 2A^2 y(\tau) z(\tau) + \frac{2iw\Sigma^2}{\sigma\sqrt{T-t}} z(\tau) \right) \\ &+ \left(\frac{dy(\tau)}{d\tau} \right)^2 + A^2 y^2(\tau) + \frac{2iw\Sigma^2}{\sigma\sqrt{T-t}} y(\tau) + A^2 z^2(\tau) - z(\tau) \frac{d^2 z(\tau)}{d\tau^2} \\ &= 2z(\tau) \left(-\frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2} + A^2 y(\tau) + \frac{iw\Sigma^2}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) + \left(\frac{dy(\tau)}{d\tau} \right)^2 + A^2 y^2(\tau) \\ &+ \frac{2iw\Sigma^2}{\sigma\sqrt{T-t}} y(\tau) + A^2 z^2(\tau) - z(\tau) \frac{d^2 z(\tau)}{d\tau^2} \\ &= 2z(\tau)(0) + \left(\frac{dy(\tau)}{d\tau} \right)^2 + A^2 y^2(\tau) + \frac{2iw\Sigma^2}{\sigma\sqrt{T-t}} y(\tau) \\ &+ A^2 z^2(\tau) - z(\tau) \frac{d^2 z(\tau)}{d\tau^2} \\ &= \left[\left(\frac{dy(\tau)}{d\tau} \right)^2 + A^2 y^2(\tau) + \frac{2iw\Sigma^2}{\sigma\sqrt{T-t}} y(\tau) \right] + \left[A^2 z^2(\tau) - z(\tau) \frac{d^2 z(\tau)}{d\tau^2} \right] \end{aligned}$$

maka,

$$I_3 = \frac{1}{2\Sigma^2} \int_t^T M \cdot d\tau$$

$$= \frac{1}{2\Sigma^2} \int_t^T d\tau \left\{ \left[\left(\frac{dy(\tau)}{d\tau} \right)^2 + A^2 y^2(\tau) + \frac{2iw\Sigma^2}{\sigma\sqrt{T-t}} y(\tau) \right] + \left[A^2 z^2(\tau) - z(\tau) \frac{d^2 z(\tau)}{d\tau^2} \right] \right\}. \quad (4.17)$$

Fungsi $y(\tau)$ adalah tetap dan memberikan solusi pada persamaan (4.16)

yaitu

$$y = \alpha e^{A\tau} + \beta e^{-A\tau} - \gamma \quad (4.18)$$

dengan

$$\gamma = \frac{iw\Sigma^2}{A^2\sigma\sqrt{T-t}}, \quad \alpha = \frac{x(T)e^{AT} - x(t)e^{At}}{e^{2AT} - e^{2At}} + \gamma \frac{e^{AT} - e^{At}}{e^{2AT} - e^{2At}}, \text{ dan}$$

$$\beta = \frac{x(T)e^{-AT} - x(t)e^{-At}}{e^{-2AT} - e^{-2At}} + \gamma \frac{e^{-AT} - e^{-At}}{e^{-2AT} - e^{-2At}}.$$

Pengintegralan bagian $y(\tau)$ pada persamaan (4.17) menggunakan persamaan (4.18), maka diperoleh

$$I_3 = \frac{1}{2\Sigma^2} \left\{ A[\alpha^2(e^{2AT} - e^{2At}) - \beta^2(e^{-2AT} - e^{-2At}) - A\gamma^2(T-t)] + \int_t^T d\tau \left[-z(\tau) \frac{d^2 z(\tau)}{d\tau^2} + A^2 z^2(\tau) \right] \right\}.$$

Substitusi nilai I_3 pada persamaan (4.12) diperoleh untuk P dan sebagai catatan bahwa $Dx = Dz$ dengan $y(\tau)$ adalah tetap pada persamaan (4.16)

$$P = \exp \left\{ -\frac{A^2}{2\Sigma^2} [x^2(T) - x^2(t)] - \frac{iwB\sqrt{T-t}}{A\sigma} - \frac{1}{2\Sigma^2} \cdot N \right\}$$

$$\int_{z(t)=0}^{z(T)=0} Dz \cdot \exp \left\{ \frac{-1}{2\Sigma^2} \int_t^T d\tau \left[-z(\tau) \frac{d^2 z(\tau)}{d\tau^2} + A^2 z^2(\tau) \right] \right\}. \quad (4.19)$$

dengan

$$N = A \left[\left(\frac{x(T)e^{AT} - x(t)e^{At}}{e^{2AT} - e^{2At}} \right)^2 - \left(\frac{x(T)e^{-AT} - x(t)e^{-At}}{e^{-2AT} - e^{-2At}} \right)^2 \right]$$

$$- \left(\frac{w^2 \Sigma^4}{A^3 \sigma^2 (T-t)} \right) \left[\left(\frac{e^{AT} - e^{At}}{e^{2AT} - e^{2At}} \right)^2 - \left(\frac{e^{-AT} - e^{-At}}{e^{-2AT} - e^{-2At}} \right)^2 - A(T-t) \right]$$

$$+ \left(\frac{2iw \Sigma^2}{A \sigma \sqrt{T-t}} \right) \left[\frac{(x(T)e^{AT} - x(t)e^{At})(e^{AT} - e^{At})}{(e^{2AT} - e^{2At})^2} - \frac{(x(T)e^{-AT} - x(t)e^{-At})(e^{-AT} - e^{-At})}{(e^{-2AT} - e^{-2At})^2} \right].$$

Melalui tahap persamaan yang sama akan diperoleh

$$Q = \exp \left\{ -\frac{A^2}{2\Sigma^2} [x^2(T) - x^2(t)] - \frac{1}{2\Sigma^2} \left[A \left[\left(\frac{x(T)e^{AT} - x(t)e^{At}}{e^{2AT} - e^{2At}} \right)^2 - \left(\frac{x(T)e^{-AT} - x(t)e^{-At}}{e^{-2AT} - e^{-2At}} \right)^2 \right] \right] \right\}$$

$$\int_{z(t)=0}^{z(T)=0} Dz \exp \left\{ \frac{-1}{2\Sigma^2} \int_t^T d\tau \left[-z(\tau) \frac{d^2 z(\tau)}{d\tau^2} + A^2 z^2(\tau) \right] \right\}. \tag{4.20}$$

Substitusi persamaan (4.19) dan (4.20) ke persamaan (4.12) diperoleh

$$I_1 = \exp \left\{ -\frac{iw B \sqrt{T-t}}{A \sigma} - \frac{1}{2\Sigma^2} .V \right\} \tag{4.21}$$

dengan

$$V = - \left(\frac{w^2 \Sigma^4}{A^3 \sigma^2 (T-t)} \right) \left[\left(\frac{e^{AT} - e^{At}}{e^{2AT} - e^{2At}} \right)^2 - \left(\frac{e^{-AT} - e^{-At}}{e^{-2AT} - e^{-2At}} \right)^2 - A(T-t) \right]$$

$$+ \left(\frac{2iw \Sigma^2}{A \sigma \sqrt{T-t}} \right) \left[\frac{(x(T)e^{AT} - x(t)e^{At})(e^{AT} - e^{At})}{(e^{2AT} - e^{2At})^2} - \frac{(x(T)e^{-AT} - x(t)e^{-At})(e^{-AT} - e^{-At})}{(e^{-2AT} - e^{-2At})^2} \right]$$

yang akan disubstitusi ke persamaan (4.10) dan (4.11) sehingga memberikan nilai $N(\bar{d}_1)$ dan $N(\bar{d}_2)$ secara berurutan yaitu

$$N(\bar{d}_1) = N \left(\frac{\log \left(\frac{S}{E} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{B \sqrt{T-t}}{A \sigma} - \frac{Y}{A \sigma \sqrt{T-t}}}{\left[1 - \frac{\Sigma^2 X}{A^3 \sigma^2 (T-t)} \right]^{\frac{1}{2}}} \right) \tag{4.22}$$

dan

$$N(\bar{d}_2) = N \left\{ \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) - \frac{B\sqrt{T-t}}{A\sigma} - \frac{Y}{A\sigma\sqrt{T-t}}}{\left[1 - \frac{\Sigma^2 X}{A^3 \sigma^2 (T-t)}\right]^{\frac{1}{2}}}\right\} \quad (4.23)$$

dengan

$$X = \left(\frac{e^{AT} - e^{At}}{e^{2AT} - e^{2At}} \right)^2 - \left(\frac{e^{-AT} - e^{-At}}{e^{-2AT} - e^{-2At}} \right)^2 - A(T-t) \text{ dan}$$

$$Y = \frac{(x(T)e^{AT} - x(t)e^{At})(e^{AT} - e^{At})}{(e^{2AT} - e^{2At})^2} - \frac{(x(T)e^{-AT} - x(t)e^{-At})(e^{-AT} - e^{-At})}{(e^{-2AT} - e^{-2At})^2}.$$

Untuk mencari nilai I_2 dengan substitusi $w = i\sigma\sqrt{T-t}$ pada persamaan (4.21) sehingga dihasilkan

$$I_2 = \exp \left\{ \frac{B(T-t)}{A} - \frac{1}{2\Sigma^2} \left[\left(\frac{\Sigma^4}{A^3} \right) X - \left(\frac{2\Sigma^2}{A} \right) Y \right] \right\}. \quad (4.24)$$

Bentuk fungsi penyelesaian *Black-Scholes* mengenai harga opsi dengan *return* stokastik pada nilai portofolio sekarang dapat diperoleh dengan mensubstitusikan rata-rata pada persamaan (2.15) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \bar{C}(S,t) &= SN(\bar{d}_1) - Ee^{-r(T-t)}N(\bar{d}_2) \\ &= SN(\bar{d}_1) - EI_2N(\bar{d}_2) \end{aligned}$$

dengan

S : harga saham,

E : harga kesepakatan,

$N(\bar{d}_1)$ dan $N(\bar{d}_2)$: distribusi normal dari \bar{d}_1 dan \bar{d}_2 ,

I_2 : merupakan faktor diskonto (*discount*) $e^{-r(T-t)}$.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Harga opsi beli dengan *return* stokastik menggunakan model *Black-Scholes* adalah

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r(t)S \frac{\partial C}{\partial S} - r(t)C + \frac{1}{2}\Sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{\partial C}{\partial r} \cdot \frac{dr(t)}{dt} = 0.$$

Adapun penyelesaian dari model *Black-Scholes* dengan *return* stokastik yang dipengaruhi oleh variabel harga saham S dan waktu t adalah

$$\bar{C}(S, t) = SN(\bar{d}_1) - EI_2 N(\bar{d}_2)$$

dengan harga kesepakatan E dan faktor diskonto yaitu

$$I_2 = \exp\left\{\frac{B(T-t)}{A} - \frac{1}{2\Sigma^2} \left[\left(\frac{\Sigma^4}{A^3}\right) X - \left(\frac{2\Sigma^2}{A}\right) Y \right]\right\}$$

5.2 Saran

Dalam skripsi ini penulis menggunakan model *Black-Scholes* dengan opsi beli Tipe Eropa dan dengan menggunakan model Vasicek sebagai dasar *return* stokastik yang digunakan. Bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini, dapat mengembangkan lebih lanjut untuk membahas harga opsi menggunakan model *Black-Scholes* dengan mempertimbangkan adanya dividen. Dapat juga dengan menggunakan jenis opsi lain misalnya opsi beli tipe Amerika.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdurakhman. (2007). *Model Umum Teori Penentuan Harga Opsi State Diskrit Menggunakan Pseudoinverse serta Aplikasinya*. Disertasi Program Studi Matematika Pasca Sarjana, UGM Yogyakarta.
- Arnold, L. (1992). *Stochastic Differential Equations : Theory and Application*. Krieger, Pub. Malabar.
- Bain, L. J. and Engerhardt M. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics, Second edition*, Duxbury Press, California.
- Ermogenous, A. (2005). *Brownian Motion and Its Applications In The Stock Market*. Departement of Applied Mathematics, Illinois Institute of Technology, Chicago, 11, 606016, USA.
- Hull, J. C. (2000). *Options, Futures, and Other Derivatives, Fourth Edition*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Husnan, S. (1993). *Dasar – Dasar Teori Portofolio*, Yogyakarta.
- Molchanov, I. (2007). *Stochastic Models In Finance and Insurance*.
- Nielsen, J. N. (1998). *Stochastic Calculus an Introduction*. Dept of Math Modelling, Technical University of Denmark Lyngby.
- Ruey, S. T. (2002). *Analysis of Financial Time Series*. JohnWiley and Sons, USA.
- Singh, J. P. dan Prabakaran, S. (2006). *Black Scholes Option Pricing with Stochastic Returns on Hedge Portofolio*. Electronic Journal of Theoretical Physics 3, No. 13, pp. 19-28.
- Surya, Y dan Hariadi. (2004). *Mempelajari Ekonofisika*. Resume online, URL: <http://www.Ekonofisika.com/tutor.html>, Tanggal 28 Oktober 2008, Pukul 19.30 WIB.
- Wilmott, P. (2001). *Introduce Quantitatif Finance*. John Wiley, Chichester.

LAMPIRAN

Teorema 2.1:

Jika Z berdistribusi normal standar dari fungsi densitas $N(z)$ maka

c. $N(z) = N(-z)$

d. $N'(z) = -zN(z)$

Bukti :

a. Distribusi normal standar simetrik di $z = 0$, dari definisi 2.1 diperoleh

$$N(-z) = N(z | 0,1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(-z)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$= N(z)$$

b. Merupakan turunan dari CDF normal standar.

$$N'(z) = \frac{d}{dz}(N(z)) = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dz} \left(e^{-\frac{z^2}{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-z) \left(e^{-\frac{z^2}{2}} \right) = -zN(z)$$

Teorema 2.2 :

Persamaan *Black-Scholes* pada persamaan (2.14) mempunyai penyelesaian

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

dengan

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \text{ dan}$$

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Bukti :

Diasumsikan harga saham dalam *risk-neutral* bergerak sesuai dengan gerak Brownian, yaitu

$$dS = Srdt + S\sigma.dW(t) \quad (1)$$

dengan mengaplikasikan formula Ito persamaan (2.6) ke persamaan (1) diperoleh

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma.dW(t). \quad (2)$$

Persamaan (2.7) menunjukkan bahwa $\ln S$ pada persamaan (1) mengikuti proses Wiener. Dengan perubahan $\ln S$ antara waktu t dan T berdistribusi normal, maka

$$\ln S(T) - \ln S \sim N\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

dari persamaan tersebut diperoleh

$$\ln \frac{S(T)}{S} \sim N\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

dan

$$\ln S(T) \sim N\left[\ln S + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right] \quad (3)$$

Berdasarkan dari persamaan (3), maka ekspresi limit waktu kontinu untuk harga saham pada waktu T menjadi

$$S(T) = S \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma.W(T-t)\right] \quad (4)$$

dengan $S(T)$ adalah harga saham pada waktu T , S adalah harga saham pada waktu t , dan $N(r, \sigma)$ menunjukkan distribusi normal dengan mean r dan deviasi standar σ . Ini menunjukkan bahwa $\ln S(T)$ berdistribusi normal maka $S(T)$ mempunyai distribusi lognormal. Persamaan (3) menunjukkan bahwa harga saham pada waktu T yang diberikan harga sekarang berdistribusi lognormal. Karena $W(T-t) \sim N(0, T-t)$, $S(T)$ dapat diinterpretasikan sebagai variabel random dari bentuk $S(T) = X = f(W(T-t))$ dengan

$$f(x) = S \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma x\right)$$

Menghitung nilai opsi adalah dengan menghitung nilai harga harapan pembayaran dan potongan yang menggunakan laju bebas resiko, r . Untuk itu dapat diketahui bahwa opsi beli tipe Eropa dimulai pada waktu t dengan harga kesepakatan E dan T sebagai waktu jatuh tempo adalah

$$C(S, t) = \exp(-r(T-t))E[\max(S(T) - E, 0)] = \exp(-r(T-t))E[\max(S(T) - E)^+].$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4) ke dalam bentuk $(S_T - E)^+$ yang merupakan pembayaran maksimum $(S_T - E, 0)$ sehingga diperoleh

$$(S(T) - E)^+ = \left(S \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma \frac{W(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) - E \right)^+ = g\left(\frac{W(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right)$$

Jika $W(T-t) \sim N(0, T-t)$, maka $\frac{W(T-t)}{\sqrt{T-t}} \sim N(0, 1)$. Jadi untuk menentukan nilai laju pada persamaan tersebut dapat menerapkan persamaan (2.4)

dengan mengambil $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ dan $X = \frac{W(T-t)}{\sqrt{T-t}}$:

$$\begin{aligned} E[(S(T) - E)^+] &= E\left[g\left(\frac{W(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(S \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} x \right) - E \right)^+ \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx. \tag{5}
\end{aligned}$$

Integral tersebut terlihat tidak mudah, akan tetapi sebagai catatan bahwa

$$\begin{aligned}
g(x) \geq 0 &\Leftrightarrow S \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} x \right) \geq E \\
&\Leftrightarrow \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} x \geq \ln \left(\frac{E}{S} \right) \\
&\Leftrightarrow x \geq \frac{\ln \left(\frac{E}{S} \right) - \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \\
&\Leftrightarrow x \geq -\frac{\ln \left(\frac{E}{S} \right) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \cong -d_2
\end{aligned}$$

karena hasil integral bernilai nol pada saat $x \geq -d_2$ maka dapat menggantikan batas bawah integral pada persamaan (5) dengan $-d_2$ sehingga

$$\begin{aligned}
E[(S(T) - E)^+] &= \int_{-d_2}^{\infty} \left(S \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} x \right) - E \right)^+ \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx. \\
&= \int_{-d_2}^{\infty} S \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} x \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx \\
&\quad - \int_{-d_2}^{\infty} E \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx \\
&= \text{(I)} - \text{(II)}.
\end{aligned}$$

Kemudian bentuk tersebut diselesaikan dengan membaginya menjadi dua bagian integral yaitu

$$\text{(I)} = \int_{-d_2}^{\infty} S \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} x \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-d_2}^{\infty} S \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}x - \frac{x^2}{2}\right) dx \\
&= S \exp(r(T-t)) \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}x - \frac{x^2}{2}\right) dx \\
&= S \exp(r(T-t)) \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \sigma\sqrt{T-t})^2\right) dx.
\end{aligned}$$

Untuk mempermudah pengintegralan maka dapat dilakukan substitusi dengan mengambil $v = x - \sigma\sqrt{T-t}$, maka batas integralnya akan berubah menjadi

$$x = -d_2 \Rightarrow v = -d_2 - \sigma\sqrt{T-t} \cong -d_1, \quad x = \infty \Rightarrow v = \infty.$$

maka,

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \quad &= S \exp(r(T-t)) \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \sigma\sqrt{T-t})^2\right) dx \\
&= S \exp(r(T-t)) \int_{-d_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv \\
&= S \exp(r(T-t)) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv - \int_{-\infty}^{-d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv \right) \\
&= S \exp(r(T-t))(1 - N(-d_1)) \\
&= S \exp(r(T-t))N(d_1).
\end{aligned}$$

Hasil tersebut diperoleh melalui integral dengan penerapan fungsi densitas dari variabel random yang berdistribusi normal standar. Kemudian untuk bagian integral yang kedua dapat diselesaikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\text{(II)} \quad &= \int_{-d_2}^{\infty} E \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\
&= E \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\
&= E \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx - \int_{-\infty}^{-d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right) \\
&= E(1 - N(-d_2)) \\
&= EN(d_2).
\end{aligned}$$

Sekarang nilai opsi beli terlihat lebih mudah perhitungannya dengan penyederhanaan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 C(S, t) &= \exp(-r(T-t))E[\max(S(T) - E, t)] \\
 &= \exp(-r(T-t))E[\max(S(T) - E)^+] \\
 &= \exp(-r(T-t))\{(I) - (II)\} \\
 &= \exp(-r(T-t))\{S \exp(r(T-t))N(d_1) - EN(d_2)\} \\
 &= SN(d_1) - E \exp(-r(T-t))N(d_2) \\
 &= SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2).
 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\
 d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\
 N(d_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \text{ dan } N(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx
 \end{aligned}$$

Hasil ini merupakan penyelesaian dari model *Black-Scholes*.